

## РАЗРУШЕНИЕ ГОРНЫХ ПОРОД

УДК 539.375

### ВОЛНЫ МАЯТНИКОВОГО ТИПА НА ПОВЕРХНОСТИ БЛОЧНОГО ПОРОДНОГО МАССИВА ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

**Н. И. Александрова**

*Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, E-mail: nialex@misd.ru,  
Красный проспект, 54, 630091, г. Новосибирск, Россия*

Численно исследуется распространение поверхностных маятниковых волн в трехмерной блочной среде. Среда моделируется пространственной решеткой масс, соединенных упругими пружинами и вязкими демпферами. Рассматривается поверхностное сосредоточенное вертикальное импульсное нагружение. Рассчитаны перемещения поверхностных масс и их скорости. Проводится сравнение численных результатов для блочной среды с аналитическими решениями для упругой среды и данными натурных экспериментов, полученными другими исследователями.

*Задача Лэмба, блочная среда, полупространство, волновое движение, волна Рэлея, численное моделирование*

Фундаментальная концепция М. А. Садовского [1], согласно которой массив горных пород представляет собой систему вложенных друг в друга блоков разного масштабного уровня, соединенных между собой прослойками, состоящими из более слабых трещиноватых пород, оказала огромное воздействие на развитие новых представлений о распространении волн в блочной среде. Как отмечено в [2], структура блочной среды — причина различных динамических явлений, которые отсутствуют в однородной среде, а значит, не могут быть описаны ее моделями. Среди таких динамических явлений выделим распространение маятниковых волн, обладающих низкой скоростью, большой длиной волны и слабым затуханием [2, 3].

В простейшем случае динамику блочной среды изучают в маятниковом приближении, когда считают, что блоки несжимаемы, а все деформации и смещения происходят за счет сжимаемости прослоек. Расчетной моделью в этом случае служит решетка масс, соединенных друг с другом пружинами и демпферами. Несмотря на очевидную ограниченность возможностей использования периодических решеток как моделей для описания реальных блочных сред, их преимущество заключается в способности привлекать аналитические и численные методы, а также качественно описывать динамические явления, свойственные этим средам.

В данной работе блочная среда моделируется как трехмерная решетка масс, соединенных пружинами и демпферами в осевых и диагональных направлениях. В рамках используемой модели получено конечно-разностное решение задачи Лэмба для блочной среды и проведено сопоставление с результатами полевых экспериментов, приведенных в [4], а также с аналитическими решениями для однородной упругой среды [5].

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Исследуется нестационарная пространственная задача Лэмба о действии вертикальной сосредоточенной нагрузки на поверхность блочного полупространства. Блочная среда моделируется однородной трехмерной решеткой, состоящей из точечных масс, соединенных пружинами и демпферами в направлениях осей  $x, y, z$  и в диагональных направлениях плоскостей  $x = \text{const}$ ,  $y = \text{const}$ ,  $z = \text{const}$ , как показано на рис. 1а. Здесь  $u, v$  — горизонтальные перемещения в направлениях  $x, y$ ;  $w$  — вертикальные перемещения в направлении  $z$ ;  $n, m, k$  — номера блоков в направлениях  $x, y, z$ . Пусть  $l$  — длина пружин в направлениях осей  $x, y, z$ . Для теоретического описания деформирования прослоек используется реологическая модель Кельвина–Фойгта [6]. На поверхности блочного полупространства ( $k = 0$ ) в точке  $O$  с координатами  $n = 0, m = 0$  приложена вертикальная сосредоточенная нагрузка  $Q$  (рис. 1б).

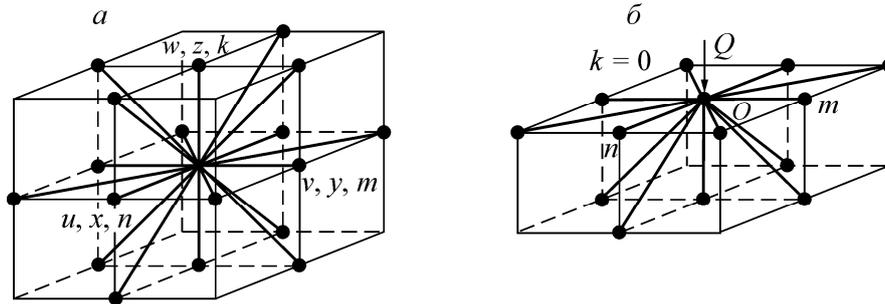


Рис. 1. Схема соединения масс пружинами и демпферами внутри полупространства (а) и на поверхности полупространства (б)

Уравнения движения массы с координатами  $n, m, k$ , находящейся внутри полупространства, имеют вид:

$$\begin{aligned}
 M\ddot{u}_{n,m,k} &= k_1\Lambda_{nn}u_{n,m,k} + k_2[(\Phi_{nk} + \Phi_{nm})u_{n,m,k} + \Psi_{nm}v_{n,m,k} + \Psi_{nk}w_{n,m,k}]/2 + \\
 &+ \lambda_1\Lambda_{nn}\dot{u}_{n,m,k} + \lambda_2[(\Phi_{nk} + \Phi_{nm})\dot{u}_{n,m,k} + \Psi_{nm}\dot{v}_{n,m,k} + \Psi_{nk}\dot{w}_{n,m,k}]/2; \\
 M\ddot{v}_{n,m,k} &= k_1\Lambda_{mm}v_{n,m,k} + k_2[\Psi_{nm}u_{n,m,k} + (\Phi_{mk} + \Phi_{nm})v_{n,m,k} + \Psi_{mk}w_{n,m,k}]/2 + \\
 &+ \lambda_1\Lambda_{mm}\dot{v}_{n,m,k} + \lambda_2[\Psi_{nm}\dot{u}_{n,m,k} + (\Phi_{mk} + \Phi_{nm})\dot{v}_{n,m,k} + \Psi_{mk}\dot{w}_{n,m,k}]/2; \\
 M\ddot{w}_{n,m,k} &= k_1\Lambda_{kk}w_{n,m,k} + k_2[\Psi_{nk}u_{n,m,k} + \Psi_{mk}v_{n,m,k} + (\Phi_{mk} + \Phi_{nk})w_{n,m,k}]/2 + \\
 &+ \lambda_1\Lambda_{kk}\dot{w}_{n,m,k} + \lambda_2[\Psi_{nk}\dot{u}_{n,m,k} + \Psi_{mk}\dot{v}_{n,m,k} + (\Phi_{mk} + \Phi_{nk})\dot{w}_{n,m,k}]/2,
 \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$\begin{aligned}
 \Lambda_{nn}f_{n,m,k} &= f_{n+1,m,k} - 2f_{n,m,k} + f_{n-1,m,k}; \\
 \Phi_{nm}f_{n,m,k} &= f_{n+1,m+1,k} + f_{n-1,m-1,k} - 4f_{n,m,k} + f_{n+1,m-1,k} + f_{n-1,m+1,k}; \\
 \Psi_{nm}f_{n,m,k} &= f_{n+1,m+1,k} + f_{n-1,m-1,k} - f_{n+1,m-1,k} - f_{n-1,m+1,k}.
 \end{aligned}$$

Уравнения движения массы с координатами  $n, m, 0$ , находящейся на поверхности полупространства, имеют вид:

$$\begin{aligned}
 M\ddot{u}_{n,m,0} &= k_1\Lambda_{nn}u_{n,m,0} + k_2[(\Phi_{nk}^- + \Phi_{nm}^-)u_{n,m,0} + \Psi_{nm}^-v_{n,m,0} + \Psi_{nk}^-w_{n,m,0}]/2 + \\
 &+ \lambda_1\Lambda_{nn}\dot{u}_{n,m,0} + \lambda_2[(\Phi_{nk}^- + \Phi_{nm}^-)\dot{u}_{n,m,0} + \Psi_{nm}^-\dot{v}_{n,m,0} + \Psi_{nk}^-\dot{w}_{n,m,0}]/2; \\
 M\ddot{v}_{n,m,0} &= k_1\Lambda_{mm}v_{n,m,0} + k_2[\Psi_{nm}^-u_{n,m,0} + (\Phi_{mk}^- + \Phi_{nm}^-)v_{n,m,0} + \Psi_{mk}^-w_{n,m,0}]/2 + \\
 &+ \lambda_1\Lambda_{mm}\dot{v}_{n,m,0} + \lambda_2[\Psi_{nm}^-\dot{u}_{n,m,0} + (\Phi_{mk}^- + \Phi_{nm}^-)\dot{v}_{n,m,0} + \Psi_{mk}^-\dot{w}_{n,m,0}]/2; \\
 M\ddot{w}_{n,m,0} &= k_1\Lambda_k^-w_{n,m,0} + k_2[\Psi_{nk}^-u_{n,m,0} + \Psi_{mk}^-v_{n,m,0} + (\Phi_{mk}^- + \Phi_{nk}^-)w_{n,m,0}]/2 + \\
 &+ \lambda_1\Lambda_k^-\dot{w}_{n,m,0} + \lambda_2[\Psi_{nk}^-\dot{u}_{n,m,0} + \Psi_{mk}^-\dot{v}_{n,m,0} + (\Phi_{mk}^- + \Phi_{nk}^-)\dot{w}_{n,m,0}]/2 + Q(t)\delta_{n0}\delta_{m0},
 \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda_k^- f_{n,m,0} &= f_{n+1,m,-1} - f_{n,m,0}; \\ \Phi_{nk}^- f_{n,m,0} &= f_{n-1,m,-1} - 2f_{n,m,0} + f_{n+1,m,-1}; \quad \Phi_{mk}^- f_{n,m,0} = f_{n,m-1,-1} - 2f_{n,m,0} + f_{n,m+1,-1}; \\ \Psi_{nk}^- f_{n,m,0} &= f_{n-1,m,-1} - f_{n+1,m,-1}; \quad \Psi_{mk}^- f_{n,m,0} = f_{n,m-1,-1} - f_{n,m+1,-1}. \end{aligned}$$

В (1), (2) использованы обозначения:  $k_1, \lambda_1$  — жесткости пружин и вязкости демпферов в направлениях осей  $x, y, z$ ;  $k_2, \lambda_2$  — в диагональных направлениях;  $\delta_{n0}$  — символ Кронекера;  $Q(t)$  — действующая поверхностная нагрузка. Начальные условия для уравнений (1), (2) нулевые. Вывод уравнений (1), (2) представлен в [7]. В силу симметрии будем рассматривать процесс распространения волн только в области  $n \geq 0, m \geq 0$ .

В дальнейшем полагаем, что  $k_1 = k_2$  и  $\lambda_1 = \lambda_2$ . Анализ дисперсионных свойств, проведенный в [7], показал, что фазовые скорости продольных  $c_p$  и сдвиговых  $c_s$  бесконечно длинных волн определяются формулами:

$$q_x \rightarrow 0, \quad q_y \rightarrow 0, \quad q_z \rightarrow 0, \quad c_p = l \sqrt{\frac{3k_1}{M}}, \quad c_s = l \sqrt{\frac{k_1}{M}}. \quad (3)$$

Численные расчеты в работе [7] показали, что модули фазовых и групповых скоростей длинных волн в блочной среде совпадают. Из этого факта следует, что бесконечно длинные волны распространяются в блочной среде без дисперсии и формируют низкочастотные маятниковые волны.

Используя уравнения Рэлея для упругой среды [8] и формулы (3), вычислим скорость бесконечно длинных волн Рэлея в блочной среде:

$$c_R = l \sqrt{\frac{2k_1}{M} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)}. \quad (4)$$

### РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ. ИМПУЛЬСНАЯ НАГРУЗКА

Уравнения (1), (2) с нулевыми начальными условиями решались методом конечных разностей по явной схеме. Для вторых производных по времени использовалась центрально-разностная аппроксимация второго порядка точности, для первых производных по времени — разность “назад” первого порядка точности:

$$\ddot{u}_{n,m,k} \approx \frac{u_{n,m,k}^{s+1} - 2u_{n,m,k}^s + u_{n,m,k}^{s-1}}{\tau^2}, \quad \dot{u}_{n,m,k} \approx \frac{u_{n,m,k}^s - u_{n,m,k}^{s-1}}{\tau}, \quad k \leq 0, \quad s = 0, 1, 2, \dots$$

Здесь  $\tau$  — шаг разностной сетки по времени;  $u_{n,m,k}^s$  — значение перемещения  $u_{n,m,k}(t)$  в момент времени  $t = s\tau$ ;  $s$  — номер слоя по времени в конечно-разностной схеме. Для перемещений  $v_{n,m,k}(t), w_{n,m,k}(t)$  используются аналогичные аппроксимации. Условие устойчивости разностных уравнений задачи Лэмба для блочной среды при  $\lambda_1 = 0$  имеет вид  $\tau \leq l \sqrt{M/3k_1}$ .

Рассмотрим задачу Лэмба для блочной среды при действии вертикальной импульсной нагрузки, моделируемой полусинусоидой длительности  $t_0$ :

$$Q(t) = Q_0 \sin(\omega t) H(t) H(t_0 - t), \quad \omega = \frac{\pi}{t_0}, \quad (5)$$

где  $H(t)$  — функция Хевисайда;  $Q_0$  — амплитуда нагрузки.

На рис. 2 представлены радиальные  $u_r = (n u_{n,m,0} + m v_{n,m,0}) / \sqrt{n^2 + m^2}$  и вертикальные  $w = w_{n,m,0}$  перемещения в цилиндрической системе координат  $r, \theta, z$  и их скорости  $\dot{u}_r, \dot{w}$  как функции времени, полученные, во-первых, численно для блочной среды в точке с координатами  $n = 30, m = 0$ , а во-вторых, из аналитического решения, приведенного в работе [5], для упругой среды с коэффициентом Пуассона  $\sigma = 0.25$  в точке с координатой  $r = 30$ . Для блочной и упругой сред принято  $\omega = 0.15$ . Все расчеты по уравнениям (1), (2) выполнены при следующих значениях параметров:  $Q_0 = l = M = 1, k_1 = 0.4, \lambda_1 = 0, \tau = 0.5$ . Вертикальные линии на рис. 2 соответствуют моментам времени прихода квазифронтов продольных, сдвиговых и рэлеевских волн в заданную точку с координатами  $(n, 0, 0)$ :  $t_p = n/c_p, t_s = n/c_s, t_R = n/c_R$ , где  $c_p, c_s, c_R$  определены в (3), (4). Вертикальная линия в момент времени  $t_R + t_0$  соответствует заднему фронту волны Рэля, отстоящему от переднего фронта на время, равное длительности действующего импульса.

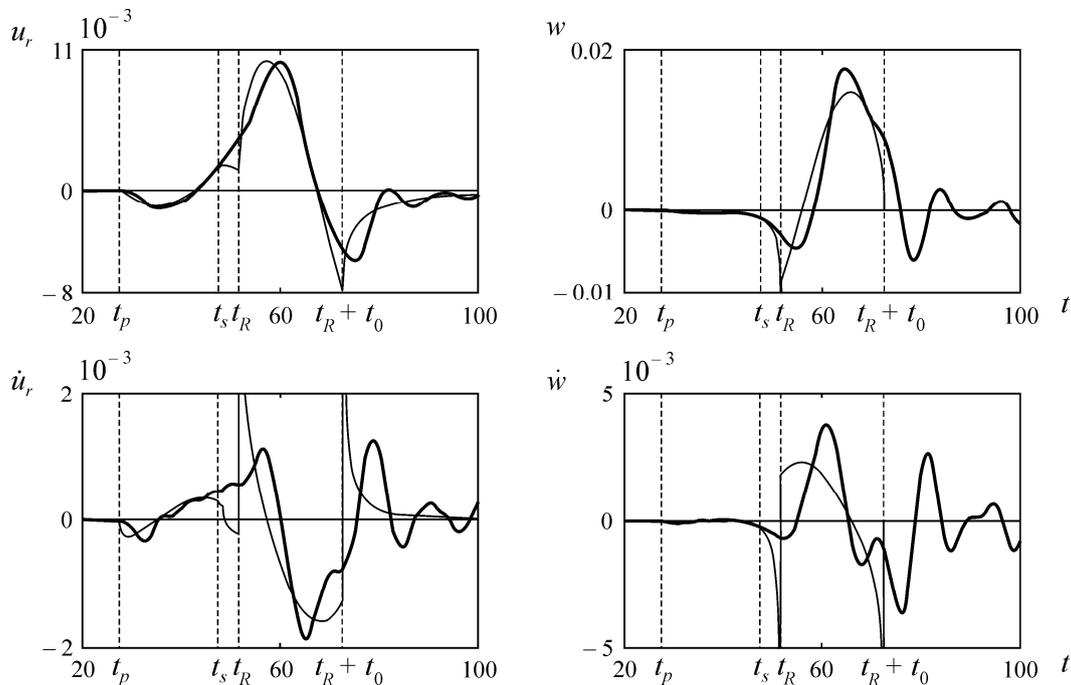


Рис. 2. Радиальные  $u_r$  и вертикальные  $w$  перемещения и их скорости  $\dot{u}_r, \dot{w}$ , рассчитанные для блочной среды (жирные кривые) и для упругой среды (тонкие кривые)

В электронных дополнительных материалах к [5] представлена программа расчета вертикальных и радиальных перемещений на поверхности упругого полупространства в случае действия ступенчатой нагрузки. С использованием этой программы вычислялись вертикальные и радиальные перемещения  $u_r$  и  $w$  на поверхности упругого полупространства. Затем, с помощью численного дифференцирования этих перемещений по времени рассчитывались вертикальные и радиальные скорости перемещений  $\dot{u}_r$  и  $\dot{w}$  в этой же точке. Расчеты возмущений для упругой среды в случае действия импульсной нагрузки проводились с использованием интеграла Дюамеля:

$$f(t) = \int_0^t g(\tau) \frac{\partial Q(t-\tau)}{\partial t} d\tau,$$

где  $g(\tau)$  — реакция среды при действии ступенчатой нагрузки;  $f(t)$  — реакция среды при действии импульсной нагрузки (5). Интегрирование в интеграле Дюамеля осуществлялось численно по формуле трапеций.

Видно, что решение для блочной среды существенно отличается от решения для упругой среды. Тем не менее, есть качественное соответствие, а именно решение для блочной среды осциллирует относительно решения для упругой среды.

#### СРАВНЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ И РЕЗУЛЬТАТОВ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ

Сравним результаты натуральных экспериментов и теоретических расчетов для того, чтобы выяснить, насколько хорошо модель (1), (2) блочной среды описывает распространение маятниковых волн в реальных породных массивах.

В работе [4] приводятся результаты экспериментальных исследований на известняковом карьере ОАО “Искитимизвесть” Новосибирской области. Регистрировались сейсмические волны на поверхностях породных блоков, порождаемые ударным воздействием на горный массив, а также определялись их скорости, амплитуды и спектр на разных расстояниях от места воздействия. Отмечено, что во взятом из этого карьера образце известняка, не имеющем трещин, продольные волны распространяются со скоростью 5.5 км/с. Пример записи сейсмограмм радиальной скорости перемещений  $\dot{i}_r$ , заимствованный из [4], показан на рис. 3. Момент начала удара соответствует времени  $t = 0.045$  с. Каждая сейсмограмма нормирована так, что все они имеют одинаковую амплитуду. Прямая 1 на рис. 3 соответствует времени появления первых возмущений в данной точке. Ее наклон соответствует скорости распространения 3.7 км/с. Прямая 2 соответствует времени появления волны, имеющей максимальную амплитуду. Ее наклон соответствует скорости волны 2.3 км/с. Согласно полученным данным, скорость распространения продольных волн в блочной среде (3.7 км/с) заметно меньше скорости продольных волн в материале, не содержащем трещин, из которого состоят блоки (5.5 км/с).

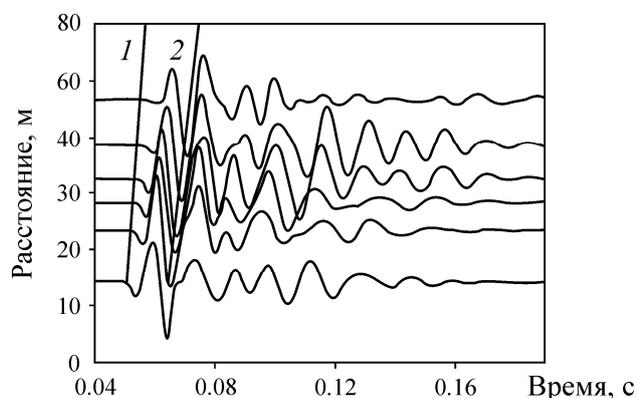


Рис. 3. Сейсмограммы радиальной скорости колебаний поверхности блоков, вызванные ударной нагрузкой, на разных расстояниях от точки удара (заимствовано из [4])

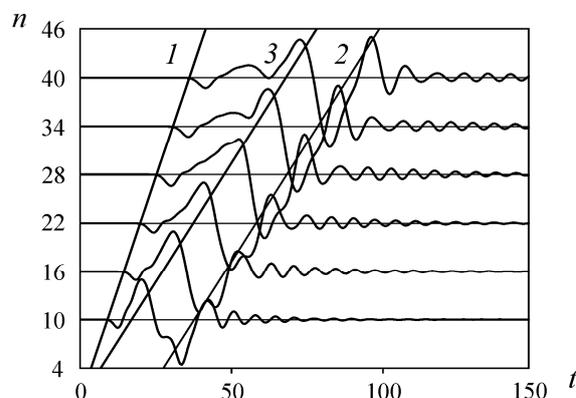


Рис. 4. Радиальная скорость перемещений  $\dot{i}_r$ , рассчитанная на поверхности полупространства по трехмерной модели блочной среды (1), (2) при импульсном воздействии

На рис. 4 представлены результаты численных расчетов радиальной скорости перемещений  $\dot{i}_r$  на поверхности полупространства по трехмерной модели блочной среды (1), (2) при действии вертикальной импульсной нагрузки (5), приложенной в точке с координатами (0, 0, 0). Параметры задачи имеют следующие значения:  $\omega = 0.15$ ,  $Q_0 = l = M = 1$ ,  $k_1 = 0.4$ ,  $\lambda_1 = 0.01$ ,  $\tau = 0.5$ . Радиальные скорости перемещений  $\dot{i}_r$  рассчитаны в точках с координатами  $n = 10, 16, 22, 28, 34, 40$ ,

$m = k = 0$ . Каждая кривая на рис. 4 нормирована таким же образом, как и экспериментальные сейсмограммы на рис. 3. Прямые 1 и 3 на рис. 4 пересекают каждую кривую в точках, которые соответствуют моментам времени  $t = n/c_p$  и  $t = n/c_R$  прихода фронтов продольных и рэлеевских волн в точку с координатами  $(n, 0, 0)$ . Прямая 2 проведена параллельно прямой 3 через точки  $t = n/c_R + t_0$ . Как видно на рис. 4, сдвиг между рэлеевской волной и волной бегущей вслед за ней равен длительности действующего импульса (5).

В данной работе не ставилась задача установить соответствие между физическими параметрами известняка и безразмерными параметрами теоретической модели блочной среды, которые использовались при расчетах, представленных на рис. 4. Нашей целью является демонстрация качественного соответствия поведения экспериментальных сейсмограмм (см. рис. 3) и результатов теоретических расчетов (см. рис. 4). Это качественное соответствие проявляется в следующем: сейсмограммы и теоретические кривые ведут себя аналогично; прямые 1 и 2 расположены относительно сейсмограмм и теоретических кривых похожим образом; радиальная скорость колеблется после момента времени  $t = n/c_R + t_0$ , чего нет в случае однородной упругой среды (см. рис. 2). Можно заключить, что модель блочной среды (1), (2) значительно лучше описывает экспериментальные результаты, чем классическая модель однородной изотропной упругой среды.

#### ВЫВОДЫ

Для расчетов распространения сейсмических волн использовалась трехмерная математическая модель блочной горной породы, основанная на представлении, что динамическое поведение блочной среды может быть приближенно описано как движение жестких блоков за счет податливости прослоек между ними и что деформацию прослоек можно приближенно описать моделью Кельвина–Фойгта. Показано качественное соответствие экспериментальных данных и численных расчетов по этой модели.

Полученные результаты свидетельствуют о следующем: при расчете сейсмических волн необходимо учитывать блочное строение горных пород и реологические свойства прослоек; математическая модель трехмерной блочной среды (1), (2) качественно верно описывает распространение сейсмических волн в горных породах.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Садовский М. А. Естественная кусковатость горной породы // ДАН СССР. — 1979. — Т. 247. — № 4. — С. 829–832.
2. Курленя М. В., Опарин В. Н., Востриков В. И. О формировании упругих волновых пакетов при импульсном возбуждении блочных сред. Волны маятникового типа  $U_\mu$  // ДАН СССР. — 1993. — Т. 333. — № 4. — С. 3–13.
3. Курленя М. В., Опарин В. Н., Востриков В. И. Волны маятникового типа. Ч. II: Методика экспериментов и основные результаты физического моделирования // ФТПРПИ. — 1996. — № 4. — С. 3–38.
4. Шер Е. Н., Черников А. Г. Экспериментальное исследование распространения сейсмических волн по поверхности блочного породного массива при ударном нагружении // Нелинейные геомеханико-геодинамические процессы при отработке месторождений полезных ископаемых на больших глубинах: тр. II Росс.-Кит. науч. конф. — Новосибирск, 2012.
5. Kausel E. Lamb's problem at its simplest, Proc. R. Soc. A, 2013, Vol. 469, 20120462. doi:10.1098/rspa.2012.0462.
6. Bland D. R. The theory of linear viscoelasticity, 1960, Oxford, UK: Pergamon Press.
7. Aleksandrova N. I. Seismic waves in a three-dimensional block medium, Proc. R. Soc. A, 2016, Vol. 472, No. 2192. — p. 16. Article ID 20160111. doi:10.1098/rspa.2016.0111.
8. Lord Rayleigh C. On waves propagated along the plane surface of an elastic solid, Proc. Lond. Math. Soc., 1985, Vol. 17. — P. 4–11. doi:10.1112/plms/s1-17.1.4.

Поступила в редакцию 4/VIII 2016