

УДК 536.24.001.57

## Теплообмен при ламинарном течении в прямоугольных каналах\*

Е.П. Валужева, М.С. Пурдин

*Национальный исследовательский университет*

*«Московский энергетический институт»*

E-mail: ep.valueva@gmail.com

Проведено численное моделирование методом конечных разностей теплообмена при ламинарном стационарном и пульсирующем течении в прямоугольных каналах с различным отношением длин сторон  $\gamma$  для двух граничных условий: постоянной температуры стенки и постоянной плотности теплового потока на стенке. Для граничного условия первого рода установлено подобие распределений по периметру канала плотности теплового потока и касательного напряжения на стенках. Обсуждаются причины немонотонной зависимости длины начального термического участка от  $\gamma$ . Для граничного условия второго рода объяснено отличие среднего по периметру числа Нуссельта при  $\gamma \rightarrow 0$  от его значения для течения в плоском канале. Для пульсирующего течения в квазистационарном режиме обнаружено увеличение среднего по периметру и периоду колебаний числа Нуссельта при больших амплитудах колебаний средней по сечению скорости.

**Ключевые слова:** теплообмен, пульсирующее ламинарное течение, прямоугольный канал, численное моделирование.

### Введение

В настоящее время все большее распространение получают микротехнологии, обеспечивающие отвод тепла от элементов электронной техники. С практической точки зрения является важным изучение теплообмена в планарных теплообменных аппаратах, представляющих собой систему щелевых микроканалов. Эти компактные теплообменники характеризуются высоким коэффициентом теплоотдачи несмотря на ламинарный режим течения теплоносителей [1]. Имеются сведения о том, что наложение пульсаций расхода на течение теплоносителя в канале может привести к интенсификации теплообмена. Например, в работе [2] экспериментальным путем было получено, что для колебаний с большими амплитудами ( $A = 2,5$ ) теплоотдача увеличивается на 40 % по сравнению со стационарным случаем. Данные о теплообмене при пульсирующем течении в прямоугольных каналах крайне ограничены. Ряд исследований выполнялся для течения в прямоугольных каналах с поперечными канавками на стенке. Такие каналы используются для интенсификации теплообмена и массообмена. Еще большее увеличение теплоотдачи и массоотдачи может наблюдаться при пульсирующем течении. В работе [3] экспериментально исследовалось влияние на массообмен частоты, амплитуды колебаний расхода жидкости

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (гос. задание № 3.1519.2014/к).

и геометрических характеристик канавок. Было установлено, что в области ламинарного течения при больших амплитудах колебаний ( $A = 10$ ) среднее по периметру число Шервуда может возрастать более чем в четыре раза по сравнению с его значением при стационарном течении. Результаты расчетов, выполненных в работе [4] для прямоугольного канала с волнистыми стенками, показали, что при наложении пульсаций расхода теплоотдача тоже увеличивается (до полутора раз при  $A = 0,8$ ).

Поскольку тепловые характеристики при пульсирующем течении должны сопоставляться с характеристиками при стационарном течении, полезно проанализировать имеющиеся исследования теплообмена для стационарного развитого течения в прямоугольном канале. Детальный анализ результатов этих исследований до сих пор не проводился.

Наибольшее количество работ, в основном расчетно-теоретических, появилось в 50–70-х годах прошлого века. Впервые к указанной тематике обратились авторы работы [5]. Для случая постоянной температуры стенки  $T_c = \text{const}$  в области стабилизированного теплообмена зависимость среднего по периметру числа Нуссельта от отношения длин сторон канала  $\langle \text{Nu}_\infty \rangle (\gamma)$  была получена из решения уравнения энергии методом конечных разностей в работах [6]–[10], методом разложения по собственным функциям — в работах [11]–[13]. Число Нуссельта на начальном термическом участке вычислялось в работах [6, 7, 9, 10, 12, 13], причем лишь в [13] были проведены расчеты для малого отношения длин сторон  $\gamma = 0,1$ . Для квадратного канала зависимость числа Нуссельта от продольной координаты  $\langle \text{Nu} \rangle (X)$  из работы [10] при малых  $X$  совпадает с зависимостью, полученной в работе [7], и несколько отличается от данных из работы [9]. При больших  $X$  результаты работ [10] и [9] совпадают, а результаты [10] и [7] — несколько различаются. Средние по длине стороны числа Нуссельта  $\langle \text{Nu} \rangle (X)$  на короткой и длинной сторонах канала приведены в работе [9] для  $\gamma = 0,25$  и  $0,5$ . В работе [12] исследовалось влияние числа Био ( $\text{Bi}$ ), учитывающего теплообмен с окружающей канал средой, на изменение среднего по периметру числа Нуссельта вдоль продольной координаты. Для  $\gamma = 0,25$ ,  $\gamma = 0,5$  и  $\text{Bi} \rightarrow \infty$  (что соответствует граничному условию  $T_c = \text{const}$ ) результаты расчета совпадают с данными работ [7, 9].

Приближенное аналитическое решение уравнения энергии в предположении о постоянстве продольного градиента температур (что выполняется в области стабилизированного теплообмена при постоянной плотности теплового потока на стенке  $q_c = \text{const}$ ) проводилось в работах [14, 15]. В [15] было получено распределение температуры стенки по периметру канала для разных отношений длин сторон  $\gamma$ . При условии  $q_c = \text{const}$  для области стабилизированного теплообмена в работах [11, 15] были вычислены значения  $\langle \text{Nu}_\infty \rangle$ , а также максимальная и минимальная температуры стенки в зависимости от  $\gamma$ . Функция  $\langle \text{Nu}_\infty \rangle (\gamma)$  определялась из решения уравнения энергии методом конечных разностей в работах [8–11], вариационным методом — в работах [16, 18], методом пристрелки — в работе [17] для квадратного канала, методом разложения по собственным функциям — в работах [19, 20]. Рассчитанные в работе [18] числа Нуссельта  $\langle \text{Nu}_\infty \rangle$  для канала с квадратным поперечным сечением совпадают с результатами, полученными ранее в работах [16, 17], а для канала с  $\gamma = 0,1$  — с результатами работы [16]. В работе [19] вычислялись значения максимальной и минимальной температуры стенки канала в зависимости от  $\gamma$ , а также было приведено распределение температур по периметру канала для  $\gamma = 0,25, 0,5, 1$ . В работе [20] были построены изотермы в сечении канала с  $\gamma = 0,2$ .

Автором работы [21] было приведено аналитическое решение уравнения энергии в области стабилизированного теплообмена при изменяющейся по периметру канала плотности теплового потока на стенке. Данные о числе Нуссельта на начальном термическом участке при условии  $q_c = \text{const}$  представлены только в работе [10] для  $\gamma = 0,17 \div 1$ . Кроме того, в работе [9] приведены средние по длине стороны числа Нуссельта  $\langle \text{Nu} \rangle (X)$  на короткой и длинной сторонах канала для  $\gamma = 0,25$  и  $0,5$ . Конкретные результаты перечисленных работ будут обсуждаться ниже. Эти результаты хорошо согласуются между собой: их максимальное различие не превышает 10 %.

Следует отметить, что в некоторых из упомянутых выше работ расчеты также проводились при условии, когда тепловой поток на стенке оставался постоянным в продольном направлении, а температура стенки не изменялась по периметру канала. Для этого условия обычно используется обозначение Н1, введенное в работе [22]. Идеализированное условие Н1 может быть реализовано на практике, когда канал окружен толстой стенкой с высокой теплопроводностью. В стенке имеются внутренние источники тепла или же к ней подводится тепловой поток, не изменяющийся в продольном направлении. Канал можно рассматривать как сток тепла, локализованный в малом объеме. Благодаря высокой теплопроводности стенки ее температура выравнивается по периметру.

Нетрудно найти число Нуссельта при условии Н1 в области стабилизированного теплообмена [23]. В работе [24] решение уравнения энергии при условии Н1 сравнивалось с решением сопряженной задачи, полученным методом конечных разностей. Толщина медной стенки в несколько раз превышала длины сторон прямоугольного канала с  $\gamma = 0,22$ . Было установлено, что температура стенки слабо изменяется по периметру канала. Число Нуссельта совпадает с его значением, вычисленным при условии Н1. Рассчитанные значения числа Нуссельта оказались ниже, чем полученные в эксперименте [24]. Из этого следует вывод, что постановка сопряженной задачи в работе [24] недостаточно точно отражает условия проведения эксперимента. Можно предположить, что для ряда конкретных задач решение уравнения энергии при условии Н1 будет отличаться от решения сопряженной задачи. Этот вопрос требует дальнейшего исследования, которое выходит за рамки настоящей работы.

Несмотря на то, что имеется достаточно много работ, в которых рассматривался теплообмен при стационарном развитом течении в прямоугольном канале, некоторые вопросы остались неизученными. Например, до настоящего времени не получена зависимость длины начального термического участка от соотношения сторон канала при разных тепловых граничных условиях на стенке.

Целью настоящей работы является анализ процесса теплообмена при ламинарном течении в прямоугольных каналах с разными тепловыми условиями на стенке ( $T_c = \text{const}$ ,  $q_c = \text{const}$ ) и влияния на тепловые характеристики потока наложенных пульсаций средней по сечению скорости.

## 1. Постановка задачи

Решалось уравнение энергии для нестационарного развитого ламинарного течения жидкости с постоянными физическими свойствами в прямоугольном канале:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{dT}{dx} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \quad (1)$$

здесь  $T$  — температура,  $u$  — продольная скорость,  $x$  — продольная координата,  $y$  и  $z$  — декартовы координаты вдоль ширины и высоты канала, отсчитываемые от его оси,  $a$  — коэффициент температуропроводности. Значения продольной скорости  $u(y, z, t)$  для пульсирующего течения, когда средняя по сечению скорость изменяется во времени по закону  $\langle u \rangle = \langle \bar{u} \rangle [1 + A \sin(\omega t)]$ , где  $\omega$  — круговая частота, а черта сверху означает осреднение по времени, вычислены в работе [25]. В уравнении (1) присутствует член, учитывающий аксиальную теплопроводность. Наличие этого члена может оказать влияние на решение уравнения энергии вблизи входа в обогреваемый участок канала при малых числах Пекле  $Pe = RePr$  ( $Re = \langle \bar{u} \rangle d_r / \nu$  — число Рейнольдса для среднего во времени течения,  $\nu$  — кинематический коэффициент вязкости,  $Pr = \nu / a$  — число Прандтля).

Были выбраны следующие граничные условия, с которыми решалось уравнение энергии (1). Для колебаний с относительно высокими амплитудой и частотой у стенок появляются локальные возвратные течения. Значения параметров, при которых эти течения возникают, приведены в работе [25]. Кроме того, при  $A > 1$  поток в канале меняет направление. Полагается, что для течения с  $A > 1$  перед обогреваемым участком и за ним находятся необогреваемые адиабатические участки длинами  $x_0, x_1$ . Вдали от входа и выхода в обогреваемый участок при  $x = -x_0, x_1$  профиль температуры является равномерным. Для обогреваемого участка канала при  $0 \leq x \leq x_1$  на стенках канала задается либо постоянная температура  $T = T_c$ , либо постоянная плотность теплового потока  $\partial T / \partial n = q_c / \lambda$ , где  $n$  — внешняя нормаль к стенке,  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности. На оси трубы выполняется условие симметрии:  $\partial T / \partial y = \partial T / \partial z = 0$ .

В качестве начального условия по времени задавалось решение стационарного уравнения энергии. Установившееся по периоду колебаний решение вычислялось путем итераций.

С целью нахождения режимных параметров, от которых зависит решение уравнения энергии (1), приведем это уравнение к безразмерному виду:

$$4S_T^2 \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t_\omega} + U \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial X} = \frac{1}{Pe^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial Z^2},$$

здесь  $\mathcal{G}$  и  $t_\omega = \omega t$  — безразмерные температура и время,  $\mathcal{G} = (T - T_0) / (T_c - T_0)$  при  $T_c = \text{const}$ ,  $\mathcal{G} = \lambda(T - T_0) / (d_r q_c)$  при  $q_c = \text{const}$ ,  $U = u / \langle \bar{u} \rangle$  — безразмерная продольная скорость,  $d_r = 2h / (1 + \gamma)$  — гидравлический диаметр канала,  $\gamma = h / b$ ,  $h$  и  $b$  — высота и ширина канала,  $X = x / (d_r Pe)$  — безразмерное расстояние от входа в обогреваемый участок,  $Y = y / d_r$ ,  $Z = z / d_r$ ,  $S_T = \sqrt{PrS}$  — тепловое число Стокса (безразмерная частота колебаний для тепловых величин),  $S = d_r \sqrt{\omega / \nu} / 2$  — число Стокса (безразмерная частота колебаний гидродинамических величин).

Решение уравнения энергии  $\mathcal{G}(X, Y, Z, t_\omega)$  зависит от вида граничных условий, отношений длин сторон  $\gamma$ , параметра  $S_T$  и при  $x \ll h, b$  — от числа Пекле при малых его значениях. Кроме того, на решение уравнения энергии непосредственное влияние оказывает решение уравнения движения  $U(Y, Z, t_\omega)$ , которое зависит от  $\gamma$ , амплитуды колебаний средней по сечению скорости  $A$  и числа Стокса  $S$ .

## 2. Метод численного решения

Решение уравнения (1) находилось методом конечных разностей с помощью неявной безусловно устойчивой двухслойной по времени разностной схемы. Для аппроксимации производных по  $X$  использовалась схема Самарского, а по  $Y, Z$  — центральная

разностная схема. Система из  $K \times M \times N$  линейных семиточечных алгебраических уравнений на каждом слое по времени решалась итерационным методом Гаусса–Зайделя ( $K, M, N$  — число разбиений по  $X, Y, Z$ ). Итерации сходятся, поскольку для матрицы коэффициентов системы алгебраических уравнений выполняется условие диагонального преобладания. Сходимость итераций на каждом слое по времени, а также установление решения по периоду колебаний (с абсолютной погрешностью, ограниченной значением машинного нуля, равного  $1,2 \cdot 10^{-7}$ ) контролировалась по значениям  $\vartheta$  в каждой точке сетки. Подобраны числа разбиений по периоду колебаний — 180, и по пространственным координатам —  $K = 400, M = 40, N = 40$ , при которых погрешность решения уравнения энергии и его небаланс не превышали нескольких процентов. Для стационарной задачи  $K = 400, M = 80, N = 80$ .

Найдены следующие значения  $X_0, X_1$  и  $X_l$ . Для колебаний с амплитудами  $A < 1$   $X_0 = X_1 = 0$ . При  $A > 1$   $X_0 = (A-1)\pi/(4S_T^2)$ ,  $X_1 = (A+1)\pi/(2S_T^2)$ . В квазистационарной области при  $S \ll 1, S_T \ll 1$  принято, что  $X_l = 2(1+A)X_{HTU}$ , где  $X_{HTU}$  — длина начального термического участка для стационарного течения. Для  $S > 1, S_T > 1$  длина  $X_l$  полагалась равной нескольким длинам тепловой волны  $\pi/(2S_T^2)$ , распространяющейся в продольном направлении со скоростью  $\langle \bar{u} \rangle$ .

По результатам решения уравнения энергии в каждый момент времени консервативным способом вычислялись локальное  $Nu(X, t_\omega)$  и среднее по периметру  $\langle Nu \rangle(X, t_\omega)$

значения числа Нуссельта:  $Nu(X, t_\omega) = Q_c / (1 - \vartheta_{ж})$ ,  $\langle Nu(X, t_\omega) \rangle = \frac{1}{(1 - \vartheta_{ж})(Y_0 + Z_0)} \times$

$\times \left( \int_0^{Y_0} Q_c dY + \int_0^{Z_0} Q_c dZ \right)$  при  $T_c = \text{const}$  и безразмерном тепловом потоке на стенке

$Q_c = (\partial \vartheta / \partial (n/d_r))_c$ ;  $Nu(X, t_\omega) = 1/\Delta \vartheta$ ,  $\langle Nu(X, t_\omega) \rangle = (Y_0 + Z_0) / \left( \int_0^{Y_0} \Delta \vartheta dY + \int_0^{Z_0} \Delta \vartheta dZ \right)$

при  $q_c = \text{const}$  и безразмерном температурном напоре  $\Delta \vartheta = \vartheta_c - \vartheta_{ж}$ . Здесь

$\vartheta_{ж} = \frac{1}{Y_0 Z_0} \int_0^{Y_0} \int_0^{Z_0} \vartheta \frac{u}{\langle u \rangle} dY dZ$  — безразмерная средняя массовая температура жидкости;

$Y_0 = 0,25(1+1/\gamma)$ ,  $Z_0 = 0,25(1+\gamma)$ . Средние во времени числа Нуссельта  $\langle \bar{Nu} \rangle(X)$  находились интегрированием по периоду колебаний безразмерных теплового потока на стенке, температуры стенки и средней массовой температуры жидкости.

### 3. Результаты расчета

Остановимся на результатах расчетов, проведенных для стационарного течения. Влиянием аксиальной теплопроводности пренебрегалось; значение единственного режимного параметра  $\gamma$ , от которого зависит решение уравнения энергии, изменялось в диапазоне  $\gamma = 10^{-3} \div 1$ .

Среднее по периметру стабилизированное число Нуссельта как функция отношения длин сторон канала представлено на рис. 1. Видно, что результаты расчета хорошо согласуются с имеющимися расчетными данными других авторов. Получены новые данные для  $\gamma < 0,1$  при  $T_c = \text{const}$ . Для этого теплового граничного условия влияние на теплоотдачу геометрического параметра  $\gamma$  ослабевает при приближении к каналу квадратного сечения. Наблюдается аналогия между теплоотдачей и сопротивлением трения.

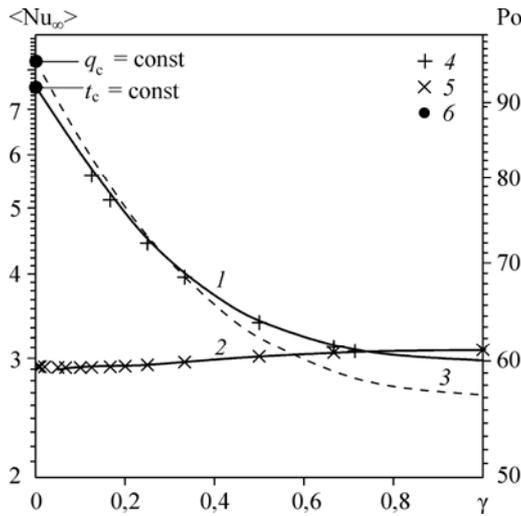


Рис. 1. Зависимость среднего по периметру числа Нуссельта от отношения длин сторон канала.

Результаты расчета при  $T_c = \text{const}$  (1) и при  $q_c = \text{const}$  (2), число Пуазейля (3), данные работ [22] при  $T_c = \text{const}$  (4) и [20] при  $q_c = \text{const}$  (5), значения для плоского канала из работы [23] (6).

Зависимость  $\langle Nu_{\infty} \rangle(\gamma)$  подобна зависимости числа Пуазейля  $Po(\gamma)$ , приведенной в работе [25]. Поясним, что средний по периметру коэффициент сопротивления трения, который для развитого течения равен коэффициенту гидравлического сопротивления, рассчитывается по соотношению  $\xi = Po/Re$ . При  $\gamma \rightarrow 0$

значение числа Нуссельта стремится к его значению для плоского канала.

При  $q_c = \text{const}$  отмеченной аналогии не наблюдается. Число Нуссельта остается практически постоянным во всем диапазоне изменения  $\gamma = 0 \div 1$ . Как было показано в работе [25], продольные скорости вблизи короткой стенки значительно ниже, чем вблизи длинной стенки. Поэтому средняя температура короткой стенки выше средней температуры длинной стенки, а число Нуссельта — ниже. Однако с уменьшением  $\gamma$  уменьшается и длина короткой стенки, поэтому ее относительный вклад в среднюю по периметру теплоотдачу не меняется. Такой же анализ можно провести для длинной стенки. Таким образом, вклады обеих стенок в среднее число Нуссельта и само это число слабо зависят от значения  $\gamma$ . Для плоского канала значение  $Nu_{\infty}$  существенно превышает значение  $\langle Nu_{\infty} \rangle$  для прямоугольного канала при  $\gamma \rightarrow 0$ . Влияние тепловых граничных условий на теплоотдачу при  $\gamma \rightarrow 1$  незначительно.

До настоящего времени длина начального термического участка  $X_{НТУ}$  при течении в прямоугольном канале не изучалась. В настоящей работе она вычислена по результатам расчета среднего по периметру числа Нуссельта и соответствует тому расстоянию от начала обогрева, начиная с которого это число изменяется менее чем на 1 %. На рис. 2 показаны значения  $X_{НТУ}$ , полученные в результате расчета, а также с использованием зависимостей  $\langle Nu \rangle(X)$  из работ других авторов. Поскольку в этих работах числа Нуссельта приведены либо в таблицах с большими интервалами по  $X$ , либо на графиках,

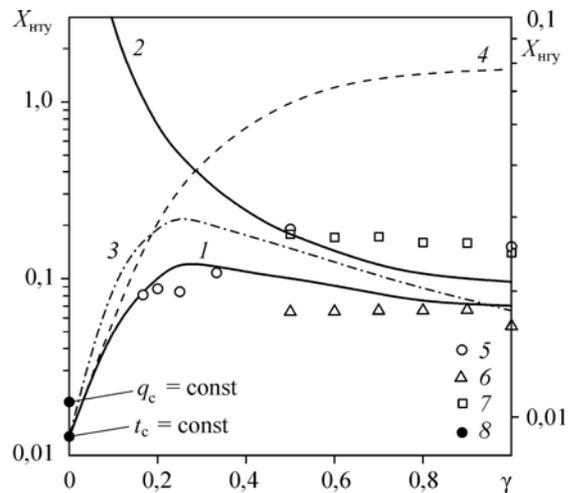


Рис. 2. Зависимость длины начального термического участка от отношения длин сторон канала.

Результаты расчета при  $T_c = \text{const}$  (1) и при  $q_c = \text{const}$  (2),  $X_{НТУ,h}$  (3),  $X_{НТУ}$  (4), данные работы [7] при  $T_c = \text{const}$  (5), данные работы [10] при  $T_c = \text{const}$  (6) и  $q_c = \text{const}$  (7), значения для плоского канала из работы [23] (8).

такой способ вычисления  $X_{НГУ}$  по данным из других работ обладает значительной погрешностью. Тем не менее, наблюдается неплохое качественное, и даже количественное, согласование между указанными данными.

Для условия  $T_c = \text{const}$  существует некоторое подобие зависимостей начального термического участка  $X_{НГУ}(γ)$  и начального гидродинамического участка  $X_{НГУ}(γ) = x_{НГУ} / (d_r \text{Re})$  от соотношения сторон. Однако если  $X_{НГУ}$  монотонно возрастает с увеличением  $γ$ , то на зависимости  $X_{НГУ}(γ)$  имеется небольшой максимум при  $γ \approx 0,25$ . Как показали расчеты, при этом отношении длин сторон канала имеется максимум и на зависимости от  $γ$  стабилизированного числа Нуссельта в середине длинной стороны. Теплоотдача на длинной стенке стабилизируется на меньших расстояниях от входа, чем на короткой стенке. Длина начального термического участка для середины этой стороны канала  $X_{НГУ, h}$  приведена на рис. 2. Расстояние от входа, начиная с которого перестают изменяться локальные числа Нуссельта в каждой точке периметра канала, значительно превышает длину начального термического участка, вычисленную с использованием  $\langle \text{Nu} \rangle$ .

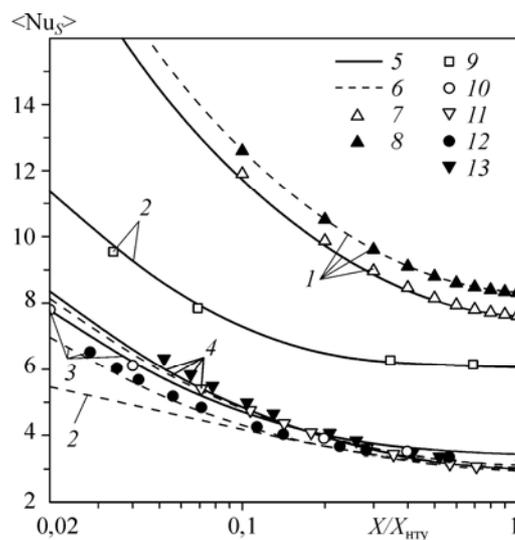
Для граничного условия  $q_c = \text{const}$  при  $γ \rightarrow 0$  в отличие от течения в плоском канале смыкания тепловых пограничных слоев на стенках не происходит. С увеличением  $γ$  длина начального термического участка уменьшается, для квадратного канала она близка к  $X_{НГУ}$  при  $T_c = \text{const}$ .

На рис. 3 показано изменение среднего по периметру числа Нуссельта вдоль канала. Здесь, как и на других рисунках, длина начального термического участка является функцией  $γ$  (см. рис. 2). Наблюдается хорошее совпадение результатов расчета с данными других авторов. На начальном термическом участке влияние граничных условий и геометрического параметра  $γ$  на число Нуссельта наиболее заметно при малых  $γ$ . В целом, влияние геометрии на тепловые характеристики в наибольшей степени проявляется вблизи входа в обогреваемый участок.

Зависимости температуры жидкости, средних по периметру плотности теплового потока на стенке (при  $T_c = \text{const}$ ) и температуры стенки (при  $q_c = \text{const}$ ) от продольной координаты показаны на рис. 4, 5. В последнем случае температура жидкости линейно возрастает вдоль  $X$ , а на больших расстояниях от входа линейной зависимости от  $X$  подчиняется и изменение температуры стенки. Температурный напор, а значит, и число Нуссельта для разных значений  $γ$  остается примерно постоянным. Видно, что при течении в плоском канале температурный напор существенно меньше, чем при течении в прямоугольном канале.

Рис. 3. Изменение среднего по периметру числа Нуссельта вдоль канала.

Плоский канал (1),  $γ = 0,1$  (2), 0,5 (3), 1 (4), результаты расчета при  $T_c = \text{const}$  (5) и при  $q_c = \text{const}$  (6), значения для плоского канала из работы [23] (7, 8), данные работы [13] при  $T_c = \text{const}$  (9, 10), данные работы [10] при  $q_c = \text{const}$  (12, 13).



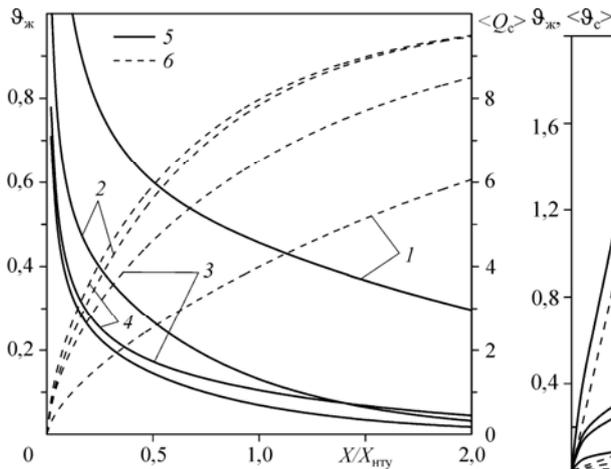


Рис. 4. Изменение средней массовой температуры жидкости и среднего по периметру теплового потока на стенке вдоль канала при  $T_c = \text{const}$ .

Плоский канал (1),  $\gamma = 0,1$  (2),  $0,5$  (3),  $1$  (4),  $\theta_j$  (5),  $\langle Q_c \rangle$  (6).

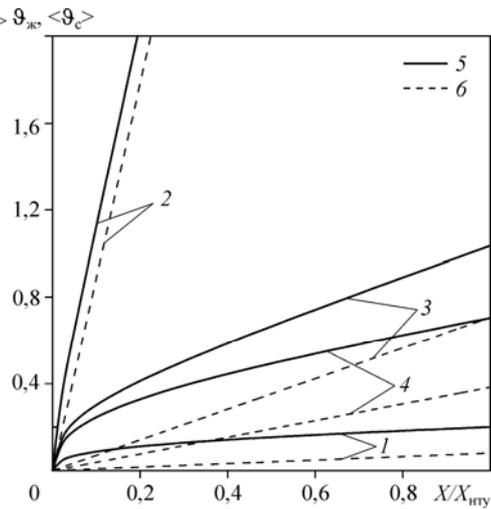


Рис. 5. Изменение средней массовой температуры жидкости и средней по периметру температуры стенки вдоль канала при  $q_c = \text{const}$ .

Плоский канал (1),  $\gamma = 0,1$  (2),  $0,5$  (3),  $1$  (4),  $\theta_j$  (5),  $\langle \theta_c \rangle$  (6).

На рис. 6 представлено изменение температурного напора по периметру канала в области стабилизированного теплообмена для  $q_c = \text{const}$ . В угловой точке температура максимальна, а в середине длинной стороны — минимальна, причем при малых  $\gamma$  она может быть даже ниже средней массовой температуры жидкости. Из-за наличия углов с высокой температурой средняя по периметру температура стенки оказывается выше, а число Нуссельта — ниже, чем в плоском канале, что было отмечено ранее.

На рис. 7 показано изменение числа Нуссельта по периметру канала в области стабилизированного теплообмена для  $T_c = \text{const}$ . Плотность теплового потока и число Нуссельта на длинной стенке выше, чем на короткой. При  $\gamma \rightarrow 0$  значение числа Нуссельта  $Nu_\infty$  на длинной стенке совпадает с его значением для плоского канала. Минимальное значение числа Нуссельта, равное нулю, наблюдается в угловой точке, а его максимальное значение — в середине длинной стороны. Аналогичным образом изменяется по периметру канала локальное число Пуазейля, рассчитанное в работе [25] и представленное на рис. 8. Однако максимальное значение  $Po$  не превышает его значения для плоского канала, а максимальное значение  $Nu_\infty$  для  $0,001 < \gamma < 0,25$  выше, чем при течении в плоском канале.

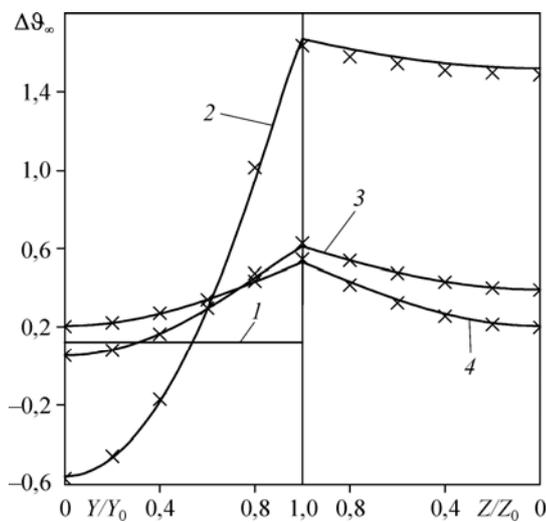


Рис. 6. Изменение температурного напора по периметру канала.

Плоский канал (1),  $\gamma = 0,1$  (2),  $0,5$  (3),  $1$  (4); символы — данные работы [15].

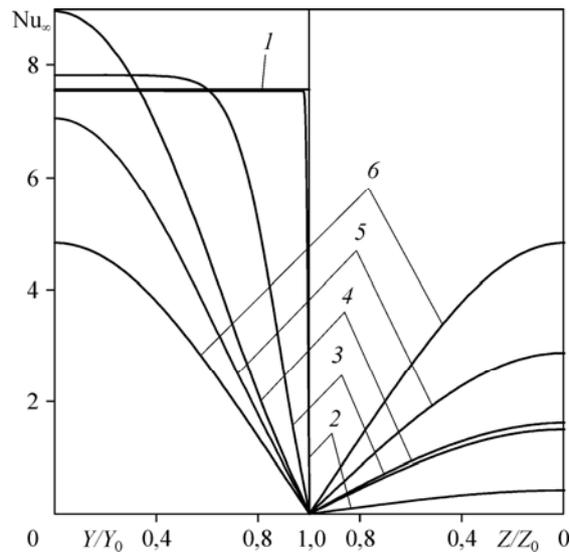


Рис. 7. Изменение числа Нуссельта по периметру канала.  
Плоский канал (1),  $\gamma = 0,001$  (2), 0,1 (3), 0,25 (4), 0,5 (5), 1 (6).

При  $\gamma = 0,25$  достигается максимум  $Nu_{\infty}$  и, как было отмечено ранее, максимум на зависимости  $X_{HTU}(\gamma)$ .

Для пульсирующего течения расчеты проведены в квазистационарной области при  $S \ll 1$  и  $S_T \ll 1$ . Влияние аксиальной теплопроводности не учитывалось. Значение параметра  $\gamma$ , от которого в данной области зависит решение уравнения энергии, изменялось в диапазоне  $\gamma = 0,1 \div 1$ .

Результаты расчета изменения в продольном направлении среднего по периметру и периоду колебаний числа Нуссельта  $\langle \overline{Nu} \rangle(X)$  представлены на рис. 9. Длина начального термического участка на рисунке была выбрана равной его длине при стационарном течении,

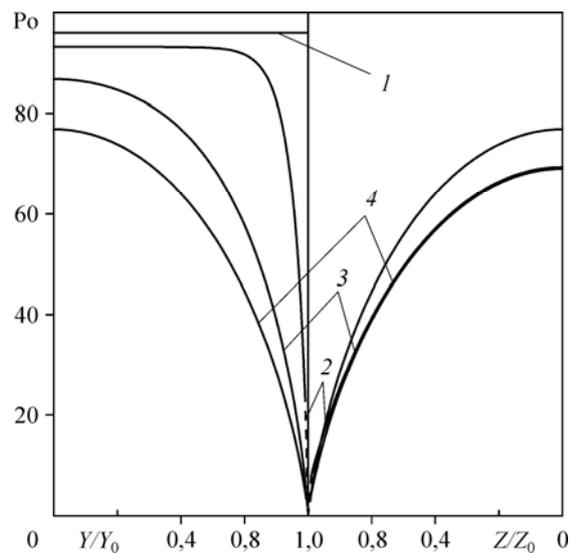


Рис. 8. Изменение числа Пуазейля по периметру канала.  
Плоский канал (1),  $\gamma = 0,1$  (2), 0,5 (3), 1 (4).

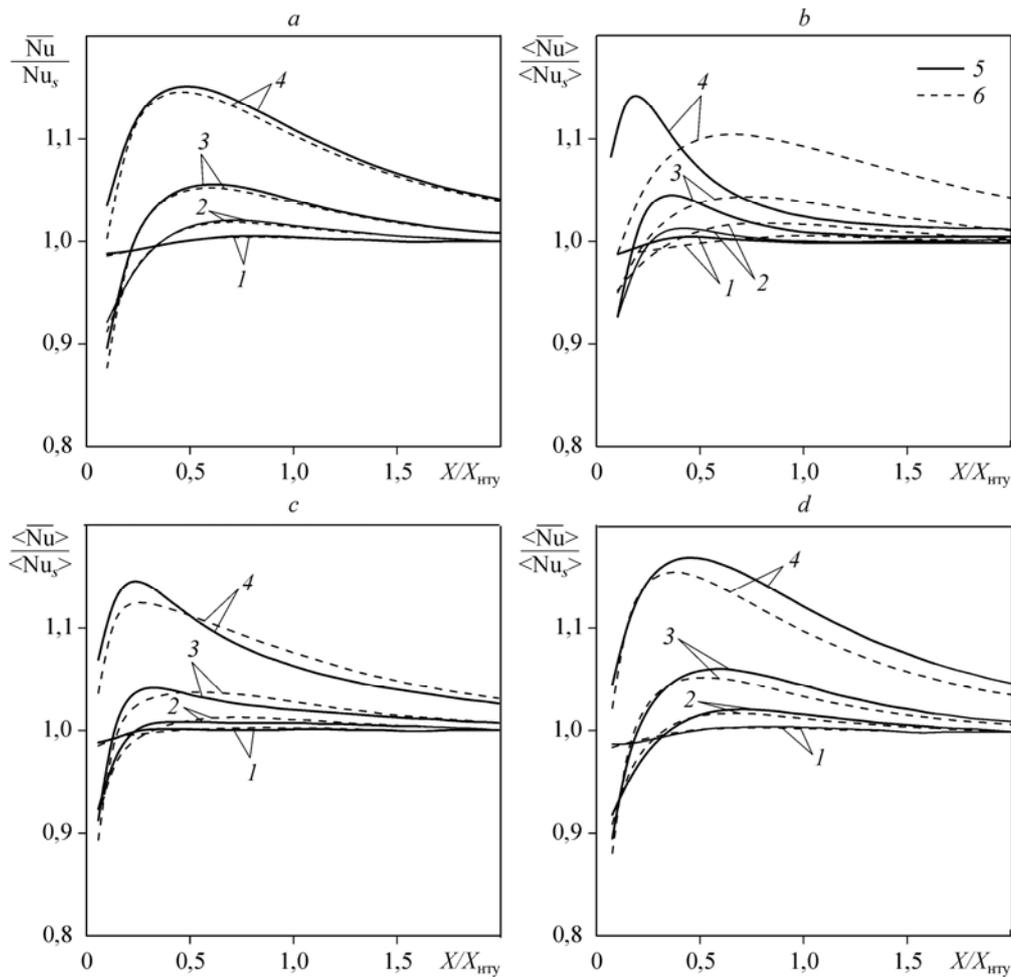


Рис. 9. Изменение среднего по периметру числа Нуссельта вдоль канала.  
 $A = 0,5$  (1), 1 (2), 2 (3), 5 (4),  $T_c = \text{const}$  (5),  $q_c = \text{const}$  (6); плоский канал (a),  $\gamma = 0,1$  (b), 0,5 (c), 1 (d).

зависящей от  $\gamma$  (см. рис. 2). Числа Нуссельта при стационарном течении  $\langle Nu_s \rangle (X)$ , к которым отнесены показанные на рис. 9 данные, также зависят от параметра  $\gamma$  (см. рис. 3). Все кривые, изображенные на рис. 9, имеют один характер с максимумом при  $X = (0,25 \div 0,5) X_{HTU}$ . Величина максимума возрастает с увеличением амплитуды колебаний, эта величина наиболее значительна для плоского и квадратного каналов при тепловом граничном условии  $T_c = \text{const}$ . Заметим, что влияние граничных условий существенно лишь для канала с  $\gamma = 0,1$ . Указанный характер кривых объясняется тем, что в фазе возрастания средней по сечению скорости увеличивается длина начального термического участка  $(x/d)_{HTU}$ , пропорциональная числу Рейнольдса в каждый момент времени. Как известно, значение числа Нуссельта на начальном термическом участке выше, чем его стабилизированное значение. В фазе уменьшения средней по сечению скорости  $\langle Nu \rangle$  меньше, чем  $\langle Nu_s \rangle$ , но вклад этой фазы в среднее по периоду колебаний число Нуссельта относительно невелик.

### Заключение

Проведены систематические расчеты теплоотдачи для условий  $T_c = \text{const}$  и  $q_c = \text{const}$  при стационарном течении в прямоугольном канале с разными отношениями длин его сторон  $\gamma$  вплоть до малых значений  $\gamma = 10^{-3}$ . Результаты расчетов среднего по периметру числа Нуссельта, выполненных в настоящей работе и в работах других авторов, хорошо согласуются между собой.

Получены ранее отсутствующие сведения о длине начального термического участка для  $T_c = \text{const}$  и  $q_c = \text{const}$  во всем диапазоне  $\gamma = 10^{-3} \div 1$ . Установлены физические причины разного характера зависимости среднего по периметру стабилизированного числа Нуссельта и длины начального термического участка от  $\gamma$  для  $T_c = \text{const}$  и  $q_c = \text{const}$ .

При квазистационарном пульсирующем течении среднее по периметру и по периоду число Нуссельта увеличивается при больших амплитудах колебаний благодаря расширению для этого вида течений области термической стабилизации. В дальнейшем предполагается применить разработанную методику численного моделирования для исследования процессов теплообмена при пульсирующем с высокой частотой течения в прямоугольных каналах.

### Список литературы

1. **Минаков А.В., Лобасов А.С., Дектерев А.А.** Моделирование гидродинамики и конвективного теплообмена в микроканалах // Вычислительная механика сплошных сред. 2012. Т. 5, № 4. С. 481–488.
2. **Persoons T., Saenen T., Van Oevelen T., Baelmans M.** Effect of flow pulsation on the heat transfer performance of a minichannel heat sink // J. Heat Transfer. 2012. Vol. 134, Iss. 9. P. 91702-1–91702-7.
3. **Nishimura T., Oka N., Yoshinaka Y., Kunitsugu K.** Influence of imposed oscillatory frequency on mass transfer enhancement of grooved channels for pulsatile flow // Int. J. Heat Mass Transfer. 2000. Vol. 43. P. 2365–5374.
4. **Nandi T.K., Chattopadhyay H.** Numerical investigations of simultaneously developing flow in wavy microchannels under pulsating inlet flow condition // Int. Com. Heat Mass Transfer. 2013. Vol. 47. P. 27–31.
5. **Clark S.H., Kays W.M.** Laminar-flow forced convection in rectangular tubes // Trans. ASME. 1953. Vol. 75. P. 859–866.
6. **Dennis S.C.R., Mercer A. McD., Poots G.** Forced heat convection in laminar flow through rectangular ducts // Quart. J. Appl. Math. 1959. Vol. 17. P. 157–167.
7. **Montgomery S.R., Wibulswas P.** Laminar flow heat-transfer in ducts of rectangular cross-section // Proc. Int. Heat Transfer Conf., 3rd, AIChE, New York. 1966. Vol. 1. P. 104–112.
8. **Schmidt F.W., Newell M.E.** Heat transfer in fully developed laminar flow through rectangular and isosceles triangular ducts // Int. J. Heat Mass Transfer. 1967. Vol. 10. P. 1121–1123.
9. **Lyczkowski R.W., Solbrig C.W., Gidaspow D.** Forced convective heat transfer in rectangular ducts-general case of wall resistances and peripheral conduction // Nuclear Eng. Design. 1981. Vol. 67. P. 357–378.
10. **Chandrupatla A.R., Sastri V.M.K.** Laminar forced convection heat transfer of a non-Newtonian fluid in a square duct // Int. J. Heat Mass Transfer. 1977. Vol. 20. P. 1315–1324.
11. **Shah R.K.** Laminar flow friction and forced convection heat transfer in ducts of arbitrary geometry // Int. J. Heat Mass Transfer. 1975. Vol. 18. P. 849–862.
12. **Javeri V.** Laminar heat transfer in a rectangular channel for the temperature boundary condition of the third kind // Int. J. Heat Mass Transfer. 1978. Vol. 21. P. 1029–1034.
13. **Aperecido J.B., Cotta R.M.** Thermally developing laminar flow inside rectangular ducts // Int. J. Heat Mass Transfer. 1990. Vol. 33, No. 2. P. 341–347.
14. **Marco S. M., Han L.S., Columbus O.** A note on limiting laminar Nusselt number in ducts with constant temperature gradient by analogy to thin-plate theory // Trans. ASME. 1955. Vol. 77. P. 625–630.
15. **Savino J.M., Siegel R.** Laminar forced convection in rectangular channels with unequal heat addition on adjacent sides // Int. J. Heat Mass Transfer. 1964. Vol. 7. P. 733–741.
16. **Sparrow E.M., Siegel R.** A variational method for fully developed laminar heat transfer in ducts // Trans. ASME, Series C, J. Heat Transfer. 1959. Vol. 81. P. 157–167.
17. **Cheng K.C.** Laminar forced convection in regular polygonal ducts with uniform peripheral heat flux // Trans. ASME, Series C, J. Heat Transfer. 1969. Vol. 91. P. 156–157.
18. **Iqbal M., Khatri A.K., Aggarwala B.D.** On the second fundamental problem of combined free and forced convection through vertical non-circular ducts // Appl. Sci. Res. 1972. Vol. 26. P. 183–208.

19. **Spiga M., Morini G.L.** Nusselt numbers in laminar flow for H2 boundary conditions // Int. J. Heat Mass Transfer. 1996. Vol. 39, No. 6. P. 1165–1174.
20. **Wang C.Y.** On the Nusselt number for H2 heat transfer in rectangular ducts of large aspect ratios // J. Heat Transfer. 2014. Vol. 136, Iss. 7. P. 074501-1–074501-4.
21. **Икряников Н.П.** Распределение температур в ламинарном потоке несжимаемой жидкости при течении в прямоугольном канале и граничных условиях второго рода // Инженерно-физический журнал. 1969. Т. 16, № 1. С. 30–37.
22. **Shah R.K., London A.L.** Laminar flow forced convection in ducts. N.Y.: Academic Press, 1978. 477 p.
23. **Петухов Б.С.** Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. М.: Энергия, 1967. 411 с.
24. **Lee P.S., Garimella S.V., Liu D.** Investigation of heat transfer in rectangular microchannels // Int. J. Heat Mass Transfer. 2005. Vol. 48. P. 1688–1704.
25. **Валуева Е.П., Пурдин М.С.** Пульсирующее ламинарное течение в прямоугольном канале // Теплофизика и аэромеханика. 2015. Т. 22, № 6. С. 761–773.

*Статья поступила в редакцию 22 декабря 2015 г.,  
после доработки — 15 апреля 2016 г.*