О ЛИНЕАРИЗИРОВАННЫХ КОНИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЯХ ИДЕАЛЬНО ПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

Ю. П. Листрова

(*Воронеж*)

Известно, что линеаризированные задачи теории идеальной пластичности приводят к задаче определения решений линейных волновых уравнений [1,2]. Это обстоятельство позволяет в ряде случаев использовать результаты, полученные в газовой динамике идеального сжимаемого газа, для определения поля скоростей перемещений при вдавливании тонких жестких тел в идеально пластическую среду.

Ниже, используя результаты М. И. Гуревича [3], рассматривается приложение теории линеаризированных конических течений к теории идеальной пластичности.

Исходное уравнение для определения возмущенных движений идеального пластического материала имеет вид [2]

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \qquad (1)$$

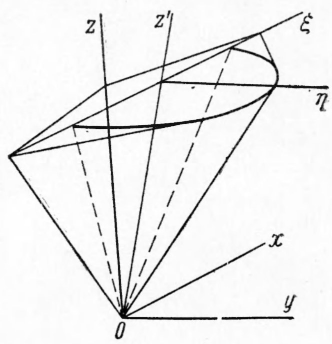
причем компоненты возмущений скорости перемещения находились по формулам

$$u' = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad v' = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad w' = -\frac{\partial U}{\partial z} \qquad (2)$$

Здесь u, v, w — компоненты скорости вдоль ссей x, y, z.

Невозмущенное движение соответствует обтеканию пластины нулевой толщины, расположенной воль оси z

$$w^\circ = \text{const}, \qquad u^\circ = v^\circ = 0 \qquad (3)$$



Фиг. 1

Конические течения будут иметь место в случае, когда все исходные компоненты зависят от переменных $\xi = x/z$, $\eta = y/z$. Исходное уравнение (1) сводится при этом, как известно [4], к уравнению Лапласа в плоскости $\xi\eta$.

В работе [3] получено решение задачи об обтекании плоского треугольного крыла, наклоненного к основному потоку под некоторым малым углом. Задача имеет различ ные решения в зависимости от того, как расположено крыло по отношению к характеристическому конусу (целиком внутри или частью вне его).

Решение этой задачи может быть использовано в теории идеальной пластичности лишь при определенных условиях. В рассматриваемом случае материал является пластическим только при нагружении, при разгрузке он затвердевает и поэтому в области разгрузки уравнение (1) неприменимо.

Решение работы [3] нечетно относительно плоскости крыла, поэтому, если с одной стороны идет процесс нагружения, с другой — имеет место разгрузка. Исходя из этого можно использовать решение [3] лишь в том случае, когда взаимовлияния пластической массы, лежащей по обеим сторонам лезвия, нет. Этот случай соответствует обтеканию треугольного крыла, выходящего за пределы характеристического конуса (фиг. 1, 2). На фиг. 2 изображен вид сверху (AF, BE — касательные к окружности $GFCEH$). В противном случае следует определить неизвестную границу, отделяющую область нагрузки пластического материала от области разгрузки.

В нашем случае треугольное лезвие должно иметь угол раствора $AOB = 2\delta$, больший $\pi/2$. Сзади за плоским лезвием образуется полость $ABDO$.

Определим поверхность выпучившегося пластического материала при вдавливании лезвия в пластическое полупространство. Поле скоростей в области $ABCO$ (фиг. 1) можно определить, исходя из работы [3].

Существенным для дальнейшего будет выражение скорости w'. Вне характеристического конуса (фиг. 1) в областях $AGFO$ и $BEHO$ скорость w' постоянна и равна

$$w_0' = \frac{\beta w^\circ}{\sin\sigma_0} \qquad (4)$$

Внутри конуса характеристик в области $GFCEHO$ (фиг. 1) w' имеет вид

$$w' = w_0'\left(1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\cos\sigma_0}{\sin\sigma_0}\,\frac{1-\tau^2}{1+\tau^2}\right) \qquad (5)$$

Здесь β — угол наклона плоскости лезвия к оси z

$$\tau = \varepsilon e^{i\sigma}, \qquad \sigma = \operatorname{arctg}\frac{\eta}{\xi}, \qquad \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon^2} = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$$

а величина σ_0 показана на фиг. 2.

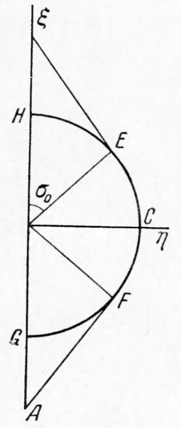
Объем выпучившейся части пластического материала в силу условий несжимаемости равен объему $ABDO$ (фиг. 1). Если глубина вдавливания $OD = h$, то искомый объем равен

$$v_{ABDO} = \frac{1}{3} h^3 \beta \operatorname{tg} \delta \qquad (6)$$

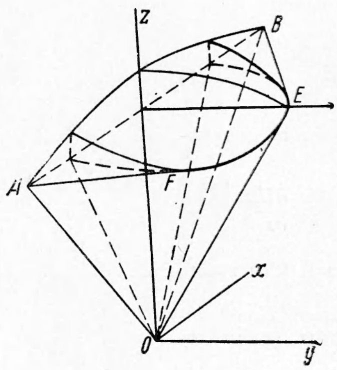
Уравнение границы выдавленного материала определим следующим образом. Прежде всего отметим, что скорость w' перпендикулярна к плоскости $\xi\eta$, откуда, учитывая малость угла β и линеаризируя, можно считать, что скорость w' направлена по оси z.

Далее следует иметь в виду, что в теории идеальной пластичности скорости определяются лишь до некоторого множителя пропорциональности, который обозначен через λ, следовательно, скорость возмущений—$\lambda w'$, и так как движение установившееся, то λ не зависит от координат. При глубине вдавливания h скорости на поверхности будут равны

$$\lambda w' = \lambda w'(x, y, h), \qquad h = h(t) \qquad (7)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Путь, который будет пройден каждой точкой поверхности, найдется из интеграла

$$S = \lambda \int_0^h w'(x, y, h)\, dt \qquad (8)$$

Так как инерционные силы в теории идеальной пластичности при выводе уравнения (1) не учитывались, следовательно, для простоты, можно положить $h = t$.

Выдавленный пластический материал, таким образом, займет объем (фиг. 1)

$$v_1 = \int_Q S\, dx\, dy \quad (Q \text{ — площадь}) \qquad (9)$$

Из равенства объемов (6) и (9) с точностью до бесконечно малых второго порядка найдем

$$\lambda = \frac{1}{3} h^3 \beta \operatorname{tg} \delta \quad \left(\int_Q \int_0^h w'\, dx\, dy\, dt \right)^{-1} \qquad (10)$$

На фиг. 3 качественно изображена поверхность выпучившегося материала, построенная по результатам работы [3].

Отметим, что над областями AFG и BEH (фиг. 1) искомая поверхность ограничена плоскостями, проходящими через прямые AF и BE. Очевидно, что максимум выдавливания расположен по оси z.

Поступила 30 XII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Онат Е., Прагер В. Образование шейки при пластическом течении растягиваемого плоского образца. Сб. пер., Механика, 1955, № 4.
2. Ивлев Д. Д. Об уравнениях линеаризированных пространственных задач теории идеальной пластичности. ДАН СССР, 1960, т. 130, № 6.
3. Гуревич М. И. О подъемной силе стреловидного крыла в сверхзвуковом потоке. ПММ, 1946, т. X, вып. 4.
4. Кочин Н. Е., Кибель И. А. и Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. II, Гостехтеоретиздат, 1948.