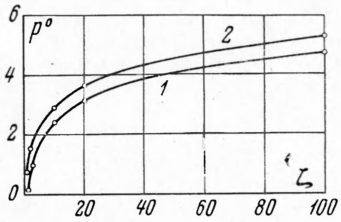
Сравним понижение давления на стенках двух скважин, одна из которых пущена в эксплуатацию с постоянным дебитом в пласте мощностью $2h$, а другая, имея фильтр конечной длины $2h$, эксплуатирует с тем же дебитом пласт неограниченной мощности. В первом случае имеем плоско-радиальное движение, во втором — пространственное осесимметричное движение.

Понижение давления на стенках скважины $\Delta p_c$ в первом случае, как известно, будет пропорционально интегральной показательной функции $-\mathrm{Ei}\,(-r_c^2/4\varkappa t)$; во втором случае — пропорционально функции $f\,(r_c/h,\ r_c^2/4\varkappa t)$ (см. (3.18)). Чтобы провести нужное сравнение, достаточно найти соответствующие значения этих функций.




Графики функций $-\mathrm{Ei}\,(-r_c^2/4\varkappa t)$ и $f\,(r_c/h,\ r_c^2/2\varkappa t)$ представлены на фигуре. По оси абсцисс отложены значения безразмерного параметра $\zeta = 2\varkappa t/r_c^2$; по оси ординат—безразмерная величина $p^0 = (8\pi kh/Q\mu)\,\Delta p_c$, равная в случае кривой *1* функции $-\mathrm{Ei}\,(-r_c^2/4\varkappa t)$, в случае кривой *2* функции $f\,(r_c/h,\ r_c^2/2\varkappa t)$. Величина $r_c/h$ принимается равной 0,1, что определяет, согласно (2.14), $j \approx 1.1$.

Кривые показывают, насколько интенсивнее протекает процесс понижения давления в скважине, если пласт имеет неограниченную мощность, сравнительно с процессом понижения давления в совершенной скважине, пущенной в пласте ограниченной мощности. Как видно из фигуры, различие в интенсивности процессов невелико.

Поступила 14 VI 1965

## ЛИТЕРАТУРА


1. Полубаринова-Кочина П. Я. О наклонных и горизонтальных скважинах конечной длины. ПММ, 1956, т. 20, вып. 1.
2. Вебстер А., Сеге Г. Дифференциальные уравнения в частных производных математической физики, ч. 1. Гостехиздат, 1933.
3. Лойцянский Л. Г. Некоторые основные закономерности изотропного турбулентного потока. Тр. ЦАГИ, 1939, вып. 440.
4. Миллионщиков М. Д. Вырождение однородной изотропной турбулентности вязкой несжимаемой жидкости. Докл. АН СССР, 1939, 22, № 5.
5. Седов Л. И. Методы теории размерностей и теории подобия в механике. Гостехиздат, 1944.
6. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматиздат, 1962.
7. Слуцкий Е. Е. Таблицы для вычисления неполной Г-функции и функции вероятности $\chi^2$. Изд-во АН СССР, 1950.


# О КОЭФФИЦИЕНТЕ ТУРБУЛЕНТНОЙ ДИФФУЗИИ ЧАСТИЦ ВЗВЕСИ

***В. С. Синельщиков*** *(Новосибирск)*

В [1] предложено одно выражение коэффициента турбулентной диффузии достаточно крупных частиц взвеси, когда известное ([2], стр. 420) соотношение $D = N$ не выполняется. Ниже устанавливаются некоторые практически проверяющиеся условия, ограничивающие область применимости предложенного выражения.

*Обозначения*

$\rho_0$, $\rho_*$ — плотности и жидкости частиц взвеси,
$s$ — объемная концентрация частиц взвеси,
$N$, $D$ — коэффициенты турбулентной вязкости и диффузии,
$\mathbf{q}$ — диффузионный поток взвеси, $|\mathbf{q}| = q$,
$g$ — ускорение силы тяжести,
$v$ — поперечная скорость взвесенесущей жидкости,
$\mathbf{a}$ — относительная скорость частиц взвеси, $|\mathbf{a}| = a$,
$p$ — давление,
угловые скобки — знак осреднения,
штрих — знак пульсации.

Покажем сначала, что при некоторых условиях следует ожидать изменения соотношения $D = N$. Воспользуемся уравнениями поведения частиц малой концентрации, не влияющими на скоростное поле $u$ $(x, t)$ «чистой» жидкости

$$\frac{d}{dt}s = \mathbf{a}\cdot\nabla s, \qquad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \qquad \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho_0}\nabla p \tag{1}$$

Здесь опущены члены, выражающие эффект молекулярной структуры жидкости. Пользуясь известным методом осреднения Рейнольдса, представим функции в виде сумм средних величин и пульсаций. Умножим первое уравнение (1) на пульсацию скорости, а последнее на пульсацию концентрации. Произведя осреднение таких уравнений и сложив их друг с другом получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \langle \mathbf{u}\rangle\cdot\nabla\right)\mathbf{q} = -\Pi\cdot\nabla\langle s\rangle - \mathbf{q}\cdot\nabla\langle \mathbf{u}\rangle + \langle \mathbf{u}'\mathbf{a}\cdot\nabla s'\rangle - \frac{1}{\rho_0}\langle s'\nabla p'\rangle - \operatorname{div}\langle \mathbf{u}'\mathbf{u}'s'\rangle \tag{2}$$

где обозначено $q = \langle u's'\rangle$, $\Pi = \langle \mathrm{u}'\mathrm{u}'\rangle$. Это уравнение, представляющее баланс величины $\mathbf{q}$ и определяющее эту величину, аналогично известному ([2], стр. 296) уравнению баланса величины $\Pi$. Из (2) следует, что выражение $\mathbf{q}$, не зависящее от $\mathbf{a}$, может иметь место лишь в том случае, когда пропорциональный $\mathbf{a}$ член (2) пренебрежимо мал. Это может быть, если модуль отношения указанного члена к первому члену правой части (2) гораздо меньше единицы, что, в свою очередь, может быть при

$$\left|\frac{\mathbf{a}\cdot\nabla\mathbf{q}}{\Pi\cdot\nabla\langle s\rangle}\right| \ll 1$$

Последнее неравенство в случае установившейся поперечной диффузии, когда

$$q = a_y\langle s\rangle \tag{3}$$

принимает искомый вид

$$\frac{a_y^2}{\Pi_{yy}} \ll 1 \tag{4}$$

При нарушении (4), например благодаря достаточно большим значениям $\mathbf{a}$, должно быть $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{a})$. Поскольку же $\mathbf{q} = -D\cdot\nabla\langle s\rangle$, то должно быть $D = D(a)$ и, следовательно, $D \neq N$, так как $N \neq N(a)$. Таким образом, последнее неравенство показывает что при нарушении соотношения (4) $D \neq N$. Однако, очевидно, это неравенство не есть достаточное условие справедливости соотношения $D = N$ (справедливость последнего подтверждает эксперимент [1]).

В [1] предложено пользоваться линейным по $a$ выражением

$$D = N + \frac{a}{g}\Pi \tag{5}$$

Выясним область применимости этого выражения. Для этого рассмотрим известное [3] уравнение установившегося поперечного баланса поперечной интенсивности турбулентности плоского и равномерного взвесенесущего течения, опуская по-прежнему эффект молекулярной структуры

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dy}\langle\rho v'^2 v\rangle + (\langle\rho\rangle\langle v'^2\rangle + \langle\rho' v'\rangle\langle v\rangle + \langle\rho' v'^2\rangle)\frac{d}{dy}v = (\rho_* - \rho_0)\,q g_y - \left\langle v'\frac{\partial p'}{\partial y}\right\rangle -$$
$$- \rho_0\rho_*\left\langle v'\operatorname{div}\frac{s(1-s)}{\rho}\mathbf{a}a_y\right\rangle \tag{6}$$

В [1,3] показано, что из (6) в предположении о малости некоторых членов вытекает выражение $D$ $(a)$, однако условия малости количественным образом не сформулированы. Сформулируем такие условия. Из (6) следует, что выражение $q$, линейное по $a$, будет иметь место, если пренебречь квадратичными по $a$ членами. Учитывая известный результат [4]

$$\langle v\rangle = -\frac{\rho_* - \rho_0}{\rho_0}a_y\langle s\rangle$$

при $\langle s\rangle \ll 1$, когда $a = \text{const}$, полагая $\langle s\rangle \ll 1$ в (6) и обозначая $\langle v'^2\rangle$ через $\Pi_{yy}$, запишем следующие условия малости квадратичных членов

$$\left|\frac{\langle\rho' v'\rangle\langle v\rangle}{\rho_0\Pi_{yy}}\right| = \left|\frac{\rho_0\langle v\rangle^2}{\rho_0\Pi_{yy}}\right| = \left|\langle s\rangle\frac{\rho_0 - \rho_*}{\rho_0}\right|^2\frac{a_y^2}{\Pi_{yy}} \ll 1 \tag{7}$$

$$\frac{\rho_* a_y^2 dq/dy}{\rho_0\Pi_{yy}d\langle v\rangle/dy} = \left|\frac{\rho_*}{\rho_* - \rho_0}\right|\frac{a_y^2}{\Pi_{yy}} \ll 1 \tag{8}$$

Условие (7) соответствует малости второго члена в круглых скобках левой части (6). Условие (8) соответствует малости части последнего члена (6). В обоих условиях учтено (3).

Неравенства (7) и (8) дают возможность установить, когда не следует пользоваться линейным выражением $q(a)$. Поскольку же $q$ и $D$ пропорциональны друг другу, то эти же неравенства показывают, когда не следует пользоваться выражением (5). Однако эти неравенства не есть достаточные условия справедливости (5) (справедливость (5) подтверждена экспериментом [1]).

Итак, выше удалось получить условия (4), (7), (8), указывающие область, в которой нельзя пользоваться соответствующими выражениями коэффициента диффузии. Важно отметить, что в случае диффузии пузырьков воздуха в жидкости, когда $\rho_* \ll \rho_0$, опыты, приведенные в [1], подтверждают (5), причем условия (7) и (8) выполняются. В то же время для других частиц, имеющих $\rho_* \approx \rho_0$, условие (8) не будет выполняться, так что здесь нельзя будет пользоваться выражением (5). Условие (8) оказывается весьма жестким также для твердых частиц в газе, когда $\rho_* \gg \rho_0$. В этом случае условия (4) и (8) практически совпадают, так что если нельзя пользоваться выражением $D = N$, то нельзя пользоваться и выражением (5). Условие (7) представляет важное на практике ограничение применимости (5) в случае достаточно больших концентраций частиц взвеси.

Заметим, что выше получены неравенства, ограничивающие область применимости (5) условиями, накладываемыми на величину $a$. Существует также ряд ограничительных условий, зависящих от степени нестационарности и неравномерности процесса. С целью выявить их, вернемся к уравнению (2), в котором для простоты опустим член, пропорциональный $a$, полагая тем самым эту величину малой. Выразим два последних члена этого уравнения линейным по $\mathbf{q}$ образом, интерпретируя первый как локальную диссипацию $\mathbf{q}$ в поле сил давления, а второй как перенос $\mathbf{q}$ благодаря диффузии, и получим

$$\frac{d}{dt}\mathbf{q} = -\Pi \cdot \nabla \langle s \rangle - \mathbf{q} \cdot \nabla \langle \mathbf{u} \rangle + \frac{\mathbf{q}}{\tau} + c \operatorname{div}(N \cdot \nabla \mathbf{q}) \tag{9}$$

где $\tau$ — временной масштаб турбулентности, $c$ — константа порядка единицы. Принятые гипотезы делают это уравнение аналогичным известному уравнению [5] для линейного инварианта $\Pi$.

Отсюда следует, что линейный закон диффузии $\mathbf{q} \sim \nabla \langle s \rangle$ будет иметь место лишь при малом в сравнении с единицей модуле отношения первого, третьего и последнего членов (9) ко второму или четвертому. Из (9) в этом случае следует $\mathbf{q} = -\tau\Pi \cdot \nabla \langle s \rangle$, причем $\tau\Pi = N$, поскольку для мелких частиц $D = N$. Практически обычно имеют место медленно изменяющиеся течения с поперечной диффузией, для которых указанные три условия имеют вид

$$\left| \left( \frac{\partial}{\partial t} q + u_x \frac{\partial}{\partial x} q \right) \left( \Pi_{yy} \frac{\partial \langle s \rangle}{\partial y} \right)^{-1} \right| \ll 1 \tag{10}$$

$$\left| \left( q \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) (q / \tau)^{-1} \right| = \tau \left| \frac{\partial u_y}{\partial y} \right| \ll 1 \tag{11}$$

$$\left| \left( c N_{yy} \frac{\partial^2}{\partial y^2} q \right) \left( \Pi_{yy} \frac{\partial}{\partial y} \langle s \rangle \right)^{-1} \right| \ll 1 \tag{12}$$

Последнее условие для стационарной одномерной диффузии при помощи (3) и соотношения $D = N$ приводится к виду

$$c a_y^2 / \Pi_{yy} \ll 1 \tag{13}$$

Таким образом, соотношение $D = N$ справедливо лишь при выполнении условий (4) и (10) — (12). Сформулировать подобным образом условия справедливости (5) более трудно, так как для этого необходимы сведения о ряде моментов, отсутствующие в настоящее время.

Поступила 26 III 1966

## ЛИТЕРАТУРА

1. Синельщиков В. С. О коэффициенте диффузии частиц взвеси в турбулентном течении. Ж. техн. физ., 1966, т. 36, № 12.
2. Хинце И. О. Турбулентность. Изд. иностр. лит., 1963.
3. Синельщиков В. С. Распределение концентраций взвеси в турбулентных двухфазных потоках. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1963, № 1.
4. Баренблатт Г. И. О движении взвешенных частиц в турбулентном потоке, занимающем полупространство или открытый канал конечной глубины. ПММ, 1955, т. 19, вып. 1.
5. Колмогоров А. Н. Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, сер. физ., 1942, № 1—2.