О ДВИЖЕНИИ КАПЛИ В ПОТОКЕ ПЕРЕМЕННОЙ СКОРОСТИ

С. В. Анаников, А. В. Талантов, О. А. Перелыгин

В настоящее время методика расчета большого числа технических устройств (котельно-топочные устройства, камеры сгорания двигателей и т. п.) базируется на уравнениях движения одиночной капли. Эти уравнения входят в состав ряда технологических расчетов, представляющих несомненную практическую ценность [1—3]. В ряде случаев, например, при распылении тяжелых топлив, можно пренебречь изменением массы частицы за счет испарения и рассматривать движущуюся каплю постоянного диаметра [4]. Однако, многочисленные работы, посвященные движению одиночной капли или частицы решаются в условиях постоянной скорости газа [5, 6].

Цель настоящей работы — рассмотрение задачи о движении капли в условиях переменной (возрастающей) скорости газа, что довольно часто встречается на практике. Известны различные виды аппроксимирующих функций для скоростного профиля газа, определяемого обычно экспериментально, однако практически любой нелинейный профиль скорости можно заменить кусочно-линейным. В связи с этим представляет интерес решение задачи движения капли в потоке переменной скорости газа, возрастающей по линейному закону. Рассмотрим случай увлекаемости капли потоком газа.

Для решения поставленной задачи примем следующую зависимость скорости газа от расстояния S [7]:

$$w = w_0 + (w_L - w_0) \cdot S/L, \tag{1}$$

где w_0 и w_L — соответственно скорости газа в месте ввода капли и на расстоянии L от него. Уравнение движения сферической недеформируемой капли в одномерном потоке, согласно работе [5], может быть представлено в виде

$$m_к \cdot dv_к/d\tau = \psi f_к \rho_г v^2/2 \pm m_к g\,(1 - \rho_г/\rho_к), \tag{2}$$

где $m_к$, $f_к$ — масса и площадь миделева сечения капли, соответственно; $\rho_г$, $\rho_к$ — плотности газа и капли; ψ — коэффициент гидродинамического сопротивления капли; g — ускорение свободного падения. Относительная скорость капли равна:

$$v = w - v_к. \tag{3}$$

Рассмотрим три возможных гидродинамических режима обтекания капли.

Ламинарный режим. Как отмечается в работе [8], коэффициент сопротивления ψ капли в этом случае может быть рассчитан по формуле Стокса

$$\psi = 24/\mathrm{Re}, \tag{4}$$

где $\mathrm{Re} = vD/\nu_г$; $\nu_г$ — кинематическая вязкость; D — диаметр капли.

Преобразование (2) с учетом соотношений (1), (3) и (4) приводит к

$$S'' + BS' - CS = F, \tag{5}$$

где $B = 18\,\mu_г/\rho_к D^2$; $C = 18\,\mu_г (w_L - w_0)/\rho_к D^2 L$; $F = 18\,\mu_г w_0/\rho_к D^2 \pm g\,(1 - \rho_г/\rho_к)$; $\mu_г$ — динамическая вязкость газа. Общее решение уравнения (5), при условиях

$$S|_{\tau=0}=0;\; S'|_{\tau=0}=v_{\text{к}\,0},$$

имеет вид

$$S=C_1\exp[(-B+\lambda)/2]\cdot\tau+C_2\exp[(-B-\lambda)/2]\cdot\tau-F/C. \tag{6}$$

Здесь $C_1=F(B+\lambda)/2C\lambda+v_{\text{к}\,0}/\lambda$; $C_2=F(-B+\lambda)/2C\lambda-v_{\text{к}\,0}/\lambda$; $\lambda^2=B^2+4C$; $v_{\text{к}\,0}$ — начальная скорость капли. Дифференцируя соотношение (6), получим выражение для скорости капли

$$v_{\text{к}}=(-B+\lambda)/2\cdot C_1\exp[(-B+\lambda)/2]\cdot\tau-(B+\lambda)/2\cdot C_2\exp[(-B-\lambda)/2]\cdot\tau. \tag{7}$$

Легко видеть, что с помощью уравнений (1), (3) и (7) определяется относительная скорость капли v в момент времени τ.

Для переходного режима обтекания, согласно работе [5],

$$\psi=a+B/\mathrm{Re}. \tag{8}$$

Формула (8) учитывает инерционные члены при замедленном изменении относительной скорости. При этом коэффициенты a и b были приняты следующими: $a=0{,}12$; $b=37$.

Подставляя в (2) соотношения (1), (3) и (8), получим

$$S''-AS'^2+(C+ES)S'-FS^2-QS-H=0, \tag{9}$$

где $A=3a\rho_{\text{г}}/4\rho_{\text{к}}D$; $C=2Ac+B$; $c=w_0$; $B=3b\mu_{\text{г}}/4\rho_{\text{к}}D^2$; $E=2Ah$; $h=(w_L-w_0)/L$; $F=Ah^2$; $Q=Ch$; $H=(Ac+B)c\pm q$; $q=g(1-\rho_{\text{г}}/\rho_{\text{к}})$. Подстановка $p=S'$ приводит (9) к уравнению

$$p\cdot p'=Ap^2-(C+ES)p+FS^2+QS+H, \tag{10}$$

которое является уравнением Абеля второго рода.

Отдельные уравнения этого вида при определенных соотношениях между коэффициентами допускают решение в квадратурах [9]. Однако, для уравнения (10) эти условия не выполняются, поэтому применим иной подход к решению поставленной задачи. Для этого заменим выражение (1) соотношением

$$w=c\exp h\tau, \tag{11}$$

полученным в результате интегрирования (1) при условии $S|_{\tau=0}=0$. Тогда после подстановки (11) в (3) и дифференцирования, получим

$$dv_{\text{к}}/d\tau=hc\exp h\tau-dv/d\tau. \tag{12}$$

Подстановка в (2) зависимостей (8) и (12) приводит к уравнению Риккати

$$dv/d\tau+Av^2+Bv=hc\exp h\tau\mp q, \tag{13}$$

которое решается при следующих граничных условиях:

$$v|_{\tau=0}=v_0.$$

В соотношениях (11)—(13) коэффициенты A, B, c, h и q определены так же, как в (9).

Для нахождения общего решения уравнения (13) введем новую переменную

$$v=t/G\cdot u'/u;\; t=\exp h\tau,$$

где $G=A/h$. В результате получим линейное уравнение второго порядка

$$t^2u''+(1+E)tu'-(Ft\pm M)u=0, \tag{14}$$

где $E=B/h$; $F=CA/h$; $M=qA/h^2$.

Замена

$$u = x^{-E} Z(x);\; x = 2\sqrt{Ft},$$

приводит уравнение (14) в модифицированное уравнение Бесселя

$$x^2 Z'' + xZ' - (x^2 + N^2) Z = 0,$$

где $N^2 = E^2 \mp 4M$. Его решение, как известно, имеет вид

$$Z = C_1 I_N(x) + C_2 K_N(x).$$

Здесь $I_N(x)$ и $K_N(x)$ — функции Бесселя мнимого аргумента порядка N соответственно первого и второго рода.

Таким образом, общее решение уравнения (13) имеет вид:

$$v = \frac{h\sqrt{Et}}{2A} \times$$

$$\times \frac{n\left[C_1 I_{N+1}(2\sqrt{Ft}) - C_2 K_{N+1}(2\sqrt{Ft})\right] + k\left[C_1 I_{N-1}(2\sqrt{Ft}) - C_2 K_{N-1}(2\sqrt{Ft})\right]}{C_1 I_N(2\sqrt{Ft}) + C_2 K_N(2\sqrt{Ft})},$$

где $n = 1 + E/N$; $k = 1 - E/N$; I_{N+1}, K_{N+1} — функции Бесселя порядка $N+1$ и I_{N-1}, K_{N-1} — функции Бесселя порядка $N-1$ соответственно первого и второго рода.

Произвольные постоянные C_1 и C_2 определяются в этом решении при помощи следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} (2\sqrt{Ft_0})^{-E}\left[C_1 I_N(2\sqrt{Ft_0}) + C_2 K_N(2\sqrt{Ft_0})\right] = v_0, \\ F(2\sqrt{Ft_0})^{-(E+1)}\{n\left[C_1 I_{N+1}(2\sqrt{Ft_0}) - \right. \\ \left. - C_2 K_{N+1}(2\sqrt{Ft_0})\right] + k\left[C_1 I_{N-1}(2\sqrt{Ft_0}) - \right. \\ \left. - C_2 K_{N-1}(2\sqrt{Ft_0})\right]\} = \dfrac{Av_0^2}{h}. \end{cases}$$

Коэффициент сопротивления для **турбулентного режима обтекания** капли обычно принимают постоянным [10]

$$\psi = \text{const}.$$

Тогда преобразование уравнения (2) с учетом (12) приводит к уравнению Риккати

$$dv/d\tau + Av^2 = hc \exp h\tau + q, \qquad (15)$$

где $A = 3\psi\rho_г/4\rho_к D$, а q — то же, что и в уравнении (9). При этом граничные условия имеют вид: $v|_{\tau=0} = v_0$.

С помощью замены $v = ht/A \cdot u'/u$; $t = ch \exp h\tau$ переведем (15) в уравнение второго порядка:

$$t^2 u'' + tu' - (Et + M) u = 0,$$

где $E = A/h^2$; $M = qA/h^2$. Подстановка $x = 2\sqrt{Et}$ приводит это уравнение к виду

$$x^2 u'' + xu' - (x^2 \mp N^2) u = 0.$$

$(N^2 = 4M)$. Полученное уравнение — это модифицированное уравнение Бесселя, оно решается:

$$u = C_1 I_\nu(x) + C_2 K_\nu(x).$$

Когда направление движения капли совпадает с гравитационной составляющей $\nu = iN$, в противном —$\nu = N$. Здесь i — мнимая единица.

Таким образом, общее решение уравнения (15) имеет вид

$$v = \frac{\sqrt{Et}}{2A} \cdot \frac{C_1\left[I_{\nu-1}(2\sqrt{Et}) + I_{\nu+1}(2\sqrt{Et})\right] - C_2\left[K_{\nu-1}(2\sqrt{Et} + K_{\nu+1}(2\sqrt{Et})\right]}{C_1 I_\nu(2\sqrt{Et}) + C_2 K_\nu(2\sqrt{Et})}.$$

Результаты расчета параметров движения капли для случая переходного режима

$D\cdot10^{-6}$, м	τ, с	v, м/с	$D\cdot10^{-6}$, м	τ, с	v, м/с	$D\cdot10^{-6}$, м	τ, с	v, м/с
	0,00003	59,0		0,0002	56,7		0,001	51,5
	0,00006	49,9		0,0004	46,4		0,002	39,4
	0,00009	42,3		0,0006	38,4		0,003	31,2
	0,00012	36,0		0,0008	32,0		0,004	25,3
10	0,00015	30,7	25	0,1010	26,8	50	0,005	21,1
	0,00018	26,2		0,0012	22,6		0,006	17,9
	0,00021	22,4		0,0014	19,2		0,007	15,6
	0,00024	19,2		0,0016	16,3		0,008	13,8
	0,00027	16,4		0,0018	14,0		0,009	12,4
	0,00030	14,1		0,0020	12,0		0,010	11,4

Произвольные постоянные C_1 и C_2 определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} C_1 I_\nu(2\sqrt{Et_0}) + C_2 K_\nu(2\sqrt{Et_0}) = v_0, \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{E}{t_0}}\,\{C_1[I_{\nu-1}(2\sqrt{Et_0}) + I_{\nu+1}(2\sqrt{Et_0})] - \\ - C_2[K_{\nu-1}(2\sqrt{Et_0}) + K_{\nu+1}(2\sqrt{Et_0})]\} = \frac{Av_0^2}{ht_0}. \end{cases}$$

Используя полученные решения, авторы в качестве примера провели расчет параметров движения капель для случая переходного режима (см. таблицу).

Казанский авиационный институт им. А. Н. Туполева

Поступила в редакцию 24/XI 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. В. Раушенбах и др. Физические основы рабочего процесса в камерах сгорания воздушно-реактивных двигателей. М., Машиностроение, 1964.
2. Основы горения углеводородных топлив. Пер. с англ. Под ред. Л. Н. Хитрина, В. А. Попова, М., ИЛ, 1960.
3. Л. П. Дьячевский. Канд. дис., МЭИ, 1969.
4. С. В. Ильяшенко, А. В. Талантов. Теория и расчет прямоточных камер сгорания. М., Машиностроение, 1964.
5. А. Т. Литвинов. ИФЖ, 1966, **10**, 6.
6. А. С. Зелепуга и др. Весцi Акадэмii навук БССР, 1973, 4.
7. Миссе. 1955, 2 (26).
8. А. С. Лышевский. Изв. вузов СССР, Машиностроение, 1964, 5.
9. Э. Камке. Справочник по обычновенным дифференциальным уравнениям. М., «Наука», 1965.
10. C. E. Lapple, C. B. Shepherd. Ind. Eng. Che., 1940, **32**, 5.