

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПЛОСКИХ СТРУЙ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ

К. Е. Джаугаштин

(Ленинград)

На основе уравнений пограничного слоя рассмотрены задачи о распространении плоских струй проводящей жидкости в поперечном магнитном поле в безындукционном приближении.

Задачи о распространении плоских струй проводящей жидкости были предметом исследования ряда работ [1-12]. В первых из них рассматривались струйные течения в неоднородном магнитном поле, распределение напряженности которого вдоль оси струи подбиралось с целью получения автомодельных решений. Решение такой задачи при постоянной проводимости среды для свободной струи дано в работах [1-3], для полуограниченной струи — в работе [4]; в работе [5] дано решение задачи о свободной струе с учетом зависимости проводимости от температуры. Что касается задачи о распространении струи в произвольном магнитном поле, то попытка точного решения ее содержится в работах [6-8]. Приближенное решение задач этого типа можно получить, используя интегральный метод. Полученное этим способом решение для свободной струи, распространяющейся в однородном магнитном поле, содержится в работах [9-10].

В последней работе [10], кроме того, произведено сравнение точного решения [3] и решения, полученного интегральным методом, на примере распространения струи в неоднородном магнитном поле. Показано, что интегральный метод для масштабных величин скорости и толщины струи дает значения, близкие к точным. В этой же работе [10] рассмотрено распространение свободной струи с учетом анизотропии проводимости. Решение задачи о свободной струе в рамках асимптотического пограничного слоя методом разложения по малому параметру магнитного взаимодействия приведено в статье [11]. Этим же методом рассматривается задача о турбулентной струе по схеме Прандтля. Формула Буссинеска для коэффициента турбулентной вязкости используется в работе [12].

В настоящей статье в рамках асимптотического пограничного слоя рассмотрены динамическая и тепловая задачи для ламинарной свободной и полуограниченной струй, распространяющихся в магнитном поле произвольного распределения. Из исходных уравнений в частных производных получены система обыкновенных дифференциальных уравнений и интегральное условие. Решение приведенных уравнений проиллюстрировано на примере распространения струй в однородном магнитном поле. Аналогичное решение получено для свободной турбулентной струи с коэффициентом турбулентного обмена, определяемым схемой Прандтля. *

1. Динамическая задача о свободной ламинарной струе. Исходная система уравнений ламинарного пограничного слоя для несжимаемой проводящей жидкости в безындукционном приближении имеет вид

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\sigma B^2}{\rho} u \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.2)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\sigma B^2}{\rho} u^2 \quad (1.3)$$

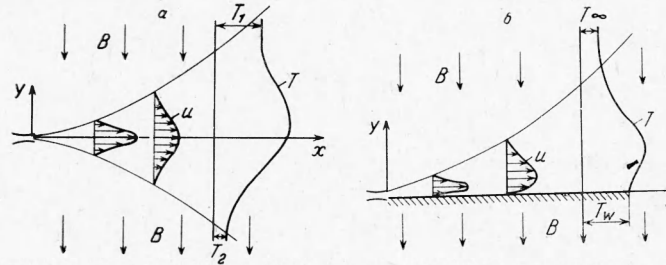
В качестве первого случая рассмотрим динамическую задачу о плоской свободной струе, распространяющейся в поперечном магнитном поле (фиг. 1, а). При этом решение уравнений (1.1) и (1.2) следует подчинить граничным условиям]

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad v = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad u = 0 \quad \text{при } y = \pm \infty$$

Будем искать автомодельное решение поставленной задачи. Для этой цели примем следующий вид решения:

$$u = u_m F(\varphi), \quad y = \delta(x) \varphi \quad (1.4)$$

Здесь $u_m = u_m(x)$ — максимальное значение скорости, $\delta = \delta(x)$ — величина, пропорциональная условной ширине струи.



Фиг. 1

Подставляя выражения для компонент скорости u и v и их производных в уравнение движения (1.1), после преобразований получим уравнение

$$-FF'' + \frac{u_m' \delta}{u_m \delta'} (F'^2 - FF'') = \frac{1}{u_m \delta \delta'} F''' - \frac{\sigma B^2}{\eta} \frac{\delta}{u_m \delta'} F' \quad (1.5)$$

с граничными условиями

$$F = 0, \quad F' = 1, \quad F'' = 0 \quad \text{при } \varphi = 0, \quad F' = 0 \quad \text{при } \varphi = \pm \infty$$

(штрих обозначает дифференцирование для функций $F(\varphi)$ по φ , а для функции $u_m(x)$ и $\delta(x)$ — по x).

Для решения уравнения (1.5) нужно предварительно определить функции $u_m(x)$ и $\delta(x)$. В качестве одного из уравнений для определения искомых величин в работе [8] принято соотношение $u_m \sim x \delta^{-2}$. В статьях [6, 7] все три величины в уравнении (1.5), являющиеся функциями x (условно $q_i(x)$, $i = 1, 2, 3$), отыскиваются в виде

$$q_i = \text{const} + p_i(x)$$

где функции $p_i(x)$ предполагаются пропорциональными между собой. Далее уравнение (1.5) делится на два независимых уравнения, которые интегрируются. На наш взгляд, подобный метод представляется искусственным.

Между тем, для определения функций $u_m(x)$ и $\delta(x)$ можно получить уравнения, которые непосредственно следуют из исходной системы. Для этой цели проинтегрируем уравнение (1.5) в поперечном сечении струи (от $-\infty$ до $+\infty$). При этом получим

$$1 + 2 \frac{u_m' \delta}{u_m \delta'} + \lambda N \frac{\delta}{u_m \delta'} = 0 \quad (1.6)$$

$$N = \frac{\sigma B^2}{\eta}, \quad \lambda = \frac{F(\infty)}{\alpha}, \quad \alpha = \int_0^\infty F'^2(\varphi) d\varphi$$

С учетом соотношения (1.6) уравнение (1.5) перепишется в виде

$$\frac{1}{u_m \delta \delta'} F''' + \frac{1}{2} (FF'' + F'^2) = N \frac{\delta}{u_m \delta'} \left[F' - \frac{\lambda}{2} (F'^2 - FF'') \right] \quad (1.7)$$

Разделение переменных в этом уравнении можно произвести при $N\delta/u_m\delta' = \text{const}$. Это условие можно обеспечить профилированием внешнего магнитного поля [1-3]. При произвольном распределении магнитного поля для получения автомодельного решения множитель при F''' следует принять постоянным. В частности, можно положить

$$u_m \delta \delta' = 4 \quad (1.8)$$

При этом уравнение (1.7) перепишется в виде

$$F''' + 2(FF')' = 4N \frac{\delta}{u_m \delta'} \left[F' - \frac{\lambda}{2} (F'^2 - FF'') \right] \quad (1.9)$$

В случае, когда множитель, стоящий перед скобкой, является постоянным, как было замечено в работе [2], этому уравнению удовлетворяет выражение для F' при чисто гидродинамическом истечении

$$F' = \text{sch}^2 \varphi \quad (1.10)$$

Можно убедиться, что это выражение является решением уравнения (1.9) и при произвольном распределении магнитного поля.

Максимальное значение скорости и ширины струи определяется уравнениями (1.6) и (1.8), которые запишем в виде

$$2\delta\delta'' + \delta'^2 - \frac{3}{16} N\delta\delta' = 0, \quad u_m = 4/\delta\delta' \quad (1.11)$$

В общем случае произвольного распределения магнитного поля ($N = N(x)$) приведенная система уравнений не поддается интегрированию в квадратурах. Последнее можно выполнить для однородного магнитного поля. Ограничимся поэтому ниже решением рассматриваемой задачи при постоянном значении параметра N ($N = \text{const}$).

Интегрируя уравнение (1.11) при граничном условии $\delta(0) = 0$, получим следующие выражения для искомых величин:

$$\sqrt{C}xv = \int_0^{\delta} \sqrt{\delta} \exp\left(-\frac{3N}{32}\delta^2\right) d\delta, \quad u_m = \frac{4}{\sqrt{C}} \frac{1}{\sqrt{\delta}} \exp\left(-\frac{3N}{32}\delta^2\right) \quad (1.12)$$

Для определения постоянной интегрирования C получим интегральное условие. Для этого проинтегрируем исходное уравнение (1.1) вначале в поперечном сечении струи, а затем в продольном направлении. После этого получим искомое условие сохранения

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^2 dy + \int_0^x \left(N \int_{-\infty}^{\infty} u dy \right) dx = I_0 \quad \left(I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dy \text{ при } x = 0 \right) \quad (1.13)$$

где I_0 — значение импульса в источнике струи. Как и обычно в теории струй-источников, начальное значение импульса предполагается известным.

Используя приведенное выше решение, из интегрального условия сохранения (1.13) получим соотношение

$$\frac{64}{3C} \exp\left(-\frac{3N}{32}\delta^2\right) + 8N \int_0^{\delta} \frac{d\delta}{\delta'^2} = I_0 \quad (1.14)$$

Вычислив здесь интеграл, определим постоянную $C = 64/3I_0$.

Таким образом, соотношение (1.13) при распространении струи проводящей жидкости в магнитном поле будет интегральным условием, аналогичным условию сохранения импульса при чисто гидродинамическом

истечении струи. В предельном случае при $x \rightarrow 0$ выражение (2.13) определяет начальный импульс струи, а при $N \rightarrow 0$ переходит в условие сохранения импульса

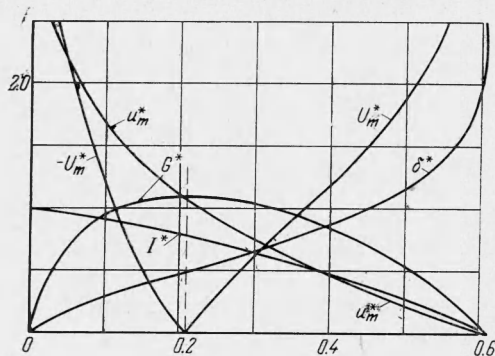
$$\int_{-\infty}^{\infty} u^2 dy = I_0 = \text{const}$$

В работах [7,8] для определения постоянной интегрирования в задаче о распространении струи проводящей жидкости использовалось именно это предельное соотношение, справедливое только при обычном гидродинамическом истечении струи. В работе [6] константа интегрирования вообще осталась неопределенной.

Условие сохранения (1.13) существует, если напряженность магнитного поля в точке истечения струи (при $x = 0$) имеет конечное значение. В случае, когда внешнее магнитное поле не удовлетворяет этому условию, можно найти другие интегральные условия, позволяющие довести решение задачи до конца. Например, при отыскании решений в виде степенных комплексов в магнитном поле вида $B \sim x^{-\alpha} (\alpha > 0)$ можно воспользоваться интегральным условием вида [1]

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^{\varepsilon} dy = \text{const}$$

где постоянная величина ε подбирается такой, чтобы значение интеграла оставалось постоянным во всей области распространения струи. Приведенное интегральное условие не вытекает из дифференциальных уравнений движения, а является следствием степенных преобразований автомодельности. В отличие от этого, обобщенное интегральное условие



Фиг. 2

(1.13) следует из исходных дифференциальных уравнений и, следовательно, является условием существования нетривиального решения, пригодным при любых видах решений, если только напряженность магнитного поля всюду имеет конечное значение.

Проанализируем полученное решение. Перепишем с этой целью выражения для компонент скоростей, толщины струи и выражения для интегральных величин в виде, не зависящем от параметра N

$$x^* = \int_0^{\delta^*} \sqrt{\delta^*} \exp(-\delta^{*2}) d\delta^*, \quad u_m^* = \frac{1}{\sqrt{\delta^*}} \exp(-\delta^{*2})$$

$$I^* = \frac{4}{3} \frac{I}{I_0}, \quad v^*(\infty) = \frac{(2\delta^*)^2 - 1}{2\delta^*}, \quad G^* = mnG, \quad (1.15)$$

$$u_m^* = m u_m, \quad \delta^* = n \delta, \quad x^* = p x$$

$$m = \frac{4}{\sqrt{3I_0}} \left(\frac{2}{3N} \right)^{1/4}, \quad n = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3N}{2}}, \quad p = \left(\frac{3N}{2} \right)^{1/4} \sqrt{\frac{v^2}{3I_0}}$$

$$\psi^* = mn\psi, \quad u = \partial\psi / \partial y$$

Изменение этих величин вдоль струи представлено на фиг. 2. Действие объемной силы приводит к увеличению условной ширины струи δ , к более быстрому затуханию скорости u_m по сравнению с обычным истечением. Импульс струи I падает вдоль оси x . Расход струи

$$G = \int_{-\infty}^{\infty} u dy$$

с удалением от истока струи проходит через экстремум при значении $x \approx 0,21r$, соответствующем $\delta = 1/2$. В этой же точке меняет знак и поперечная составляющая скорости v . Таким образом, уменьшение расхода связано с вытеснением жидкости из струи в окружающую среду. Картина линий тока ψ^* представлена на фиг. 3. Развитие струи при $N \neq 0$ заканчивается на некотором конечном расстоянии от источника струи $x \approx 0,603r$. Этот, на наш взгляд, физически нереальный результат связан с распространением полученных решений в область, в которой течение не может описываться уравнениями пограничного слоя. Действительно, в области малых расходов и больших значений толщины струи поперечная скорость становится соизмеримой с продольной скоростью. Поэтому исходные уравнения пограничного слоя, построенные на малости отношения v/u , становятся неприемлемыми.

Таким образом, полученное решение задачи о свободной струе, распространяющейся в магнитном поле, пригодно всюду, за исключением устья струи ($x \approx 0$) и области, удаленной от нее. Последнее связано с действием магнитного поля на течение. Эти особенности полученных решений аналогичны свойствам решения Блязуса для обтекания конечной пластины однородным потоком, пригодным всюду, за исключением передней и задней кромок пластины.

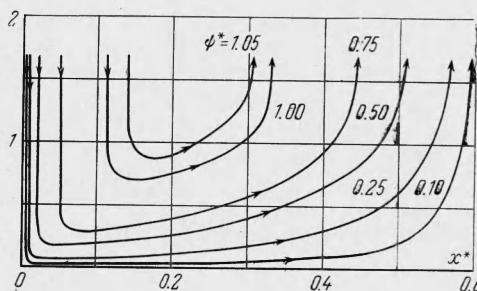
2. Тепловая задача о свободной ламинарной струе. Рассмотрим тепловую задачу при двух вариантах граничных условий: а) симметричном и б) асимметричном.

а) В случае симметричных граничных условий

$$\begin{aligned} \partial T / \partial y &= 0 \quad \text{при } y = 0 \\ T &= T_{\infty} \quad \text{при } y = +\infty \end{aligned} \quad (2.1)$$

полагая для решения задачи

$$\frac{\Delta T}{\Delta T_m} = \frac{T - T_{\infty}}{T_m - T_{\infty}} = \theta(\varphi) \quad (2.2)$$



Фиг. 3

преобразуем уравнение распространения тепла (1.3) в обыкновенное дифференциальное уравнение для отыскания функции $\theta(\varphi)$

$$\frac{1}{4P} \theta'' + \left(1 + \frac{u_m' \delta}{u_m \delta'}\right) F \theta' - \frac{\Delta T_m' \delta}{\Delta T_m \delta'} F' \theta + \frac{N u_m}{\Delta T_m \delta'} F'^2 = 0 \quad (2.3)$$

с граничными условиями

$$\theta = 1, \quad \theta' = 0 \quad \text{при } \varphi = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{при } \varphi = \pm \infty$$

Из уравнений (2.1) видно, что автомодельного распределения температуры в рассматриваемом случае не существует. Распределение температуры в каждом сечении можно получить, лишь интегрируя численно каждый раз уравнение (2.3) при значениях u_m , δ и ΔT , соответствующих этому сечению.

Для определения ΔT_m , полагая, что вытекающая струя обладает избыточным теплосодержанием относительно окружающей среды, равным

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} c_p u \Delta T dy \quad \text{при } x=0$$

из уравнения для температуры (1.3) с учетом граничных условий получим следующее интегральное условие:

$$u_m \delta \Delta T_m = \frac{\alpha}{\beta} \int_0^{\infty} N u_m^2 \delta dx + \frac{Q}{\beta}, \quad \beta = \int_0^{\infty} F' \theta d\varphi$$

Из выражения для избыточной температуры на оси струи ΔT_m , полученного из (2.4)

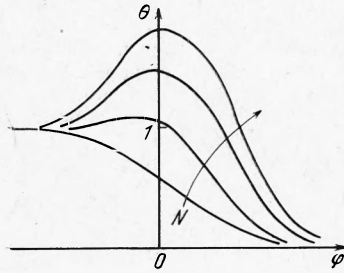
$$\Delta T_m = \frac{Q}{\beta u_m \delta} + \frac{\alpha}{\beta} \left(\int_0^x N u_m^2 \delta dx \right) u_m^{-1} \delta^{-1} \quad (2.5)$$

видно, что джоулева диссипация приводит к разогреву струи, увеличивающемуся с ростом параметра магнитного взаимодействия.

б) В случае асимметричных условий

$$T = T_2 \quad \text{при } y = -\infty$$

$$T = T_1 \quad \text{при } y = +\infty \quad (2.6)$$



Фиг. 4

для определения безразмерного избыточного профиля температуры

$$\frac{\Delta T}{\Delta T_1} = \frac{T - T_2}{T_1 - T_2} = \theta(\varphi) \quad (2.7)$$

получим уравнение

$$\frac{1}{4P} \theta'' + \left(1 + \frac{u_m' \delta}{u_m \delta'} \right) F \theta' + N \frac{u_m \delta}{\Delta T_1 \delta'} F'^2 = 0 \quad (2.8)$$

с граничными условиями

$$\theta = 1 \quad \text{при } \varphi = +\infty, \quad \theta = 0 \quad \text{при } \varphi = -\infty \quad (2.9)$$

решение которого имеет вид

$$\begin{aligned} \theta(\varphi) &= [1 + N\theta_2(+\infty)] \frac{\theta_1(\varphi)}{\theta_1(+\infty)} - N\theta_2(\varphi) \\ \theta_1(\varphi) &= \int_0^\varphi \exp \left(-\omega P \int_0^\varphi F d\varphi \right) d\varphi, \quad \omega = 4 \left(1 + \frac{u_m' \delta}{u_m \delta'} \right) \\ \theta_2(\varphi) &= 4P \frac{u_m \delta}{\Delta T_1 \delta'} \int_0^\varphi \left(\int_0^\varphi F'^2 \exp \left(\omega P \int_0^\varphi F d\varphi \right) d\varphi \right) \exp \left(-\omega P \int_0^\varphi F d\varphi \right) d\varphi \end{aligned} \quad (2.10)$$

И в этом случае граничных условий распределение температуры не будет автомодельным, так как интегрирование проводилось при параметрическом задании множителей, зависящих от x . Вместо характерного при чисто гидродинамическом истечении монотонного распределения температуры в рассматриваемом случае джоулева диссипация приводит к появлению в профиле температуры экстремума, расположенного вблизи оси струи. Качественно зависимость распределения температуры от параметра магнитного взаимодействия приведена на фиг. 4.

3. Динамическая задача о турбулентной свободной струе. Приведем аналогичное решение динамической задачи для турбулентной свободной струи. Коэффициент турбулентной вязкости определим по так называемой новой схеме Прандтля

$$\nu_\tau = \kappa \delta u_m \quad (3.1)$$

Из исходной системы уравнений

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu_\tau \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\sigma B^2}{\rho} u, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.2)$$

получим следующие уравнения для определения $u_m(x)$ и $\delta(x)$:

$$1 + 2xu_m'/u_m + \lambda Nx/u_m = 0, \quad \delta' = 4\kappa \quad (3.3)$$

Безразмерный профиль скорости в турбулентной струе, как и при чисто гидродинамическом истечении, совпадает с профилем скорости ламинарной струи (1.10).

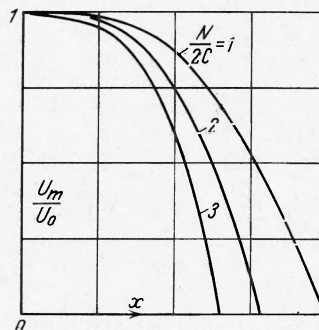
Интегрируя уравнения (3.3) при граничном условии $\delta(0) = 0$ и используя интегральное условие (1.13), получим

$$u_m = C/\sqrt{x} - 1/3 \lambda N x, \quad \delta = 4\lambda x$$

$$C = 1/4 \sqrt{3I_0/\lambda} \quad (3.4)$$

На фиг. 5 показано изменение максимальной скорости u_m/u_0 вдоль оси струи, где $u_0 = c/\sqrt{x}$ — значение той же скорости при $N = 0$.

Приведенное решение обладает существенным недостатком. При любом конечном значении параметра N , начиная с некоторой точки, скорость, обращаясь в нуль, далее становится отрицательной. Этот физически неприемлемый результат, видимо, свидетельствует о пригодности решений в ламинарной струе, на конечных расстояниях от устья. Естественно, что возможность применения схемы Прандтля для турбулентного струйного движения в магнитном поле требует экспериментальной проверки.



Фиг. 5

4. Динамическая задача о полуограниченной ламинарной струе. При распространении струи у стенки (фиг. 1, б) граничные условия имеют вид

$$u = 0, \quad v = 0 \quad \text{при } y = 0; \quad u = 0 \quad \text{при } y = +\infty$$

Преобразование автомодельности

$$u = u_m F(\varphi), \quad y = \delta(x) \varphi$$

использованное выше, сводит уравнения (1.1) и (1.2) к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$F''' + FF'' + 2F'^2 = \frac{3N\delta}{u_m\delta'} \left[F' - \frac{\xi}{2} (F'^2 - FF'') \right] \quad (4.1)$$

$$2 + 3 \frac{u_m'\delta}{u_m\delta'} + N\xi \frac{\delta}{u_m\delta'} = 0, \quad u_m\delta\delta' = 3 \quad (4.2)$$

$$\xi = \frac{F^2}{\gamma}, \quad \gamma = \int_0^\infty FF'^2 d\varphi \quad (4.3)$$

Для однородного магнитного поля ($N = \text{const}$) решение уравнений (4.2) и (4.3) при граничном условии $\delta(0) = 0$ имеет вид

$$C^{1/3} x v = \int_0^\delta \sqrt{\delta} \exp\left(-\frac{N\xi}{18} \delta^2\right) d\delta, \quad u_m = \frac{3}{\sqrt{C^{2/3}}} \frac{1}{\delta^{2/3}} \exp\left(-\frac{N\xi}{18} \delta^2\right) \quad (4.4)$$

Константа интегрирования C , определенная из интегрального условия

$$\int_0^\infty u^2 \left(\int_0^y u dy \right) dy + \int_0^\infty N \left[\int_0^\infty u \left(\int_0^y u dy \right) dy \right] dx = E_0 \quad (4.5)$$

равна

$$C = \frac{27\gamma}{E_0} \quad \left(E_0 = \int_0^\infty u^2 \left(\int_0^y u dy \right) dy \quad \text{при } x = 0 \right)$$

Таким образом, как и в задаче о свободной струе, уравнения для определения u_m и δ интегрируются лишь для однородного магнитного поля. При этом полученные решения для полуограниченной струи обладают особенностями, аналогичными решению задачи о свободной струе. Что касается уравнения для определения профиля скорости (4.1), то его интегрирование может быть выполнено лишь методом локального подбора, т. е. при совместном решении уравнений (4.1)–(4.3). Следовательно, в этом случае профили скоростей не будут автомодельными. Автомодельные же профили скорости можно получить лишь при специальном выборе внешнего магнитного поля, вид которого определяется из условия $3N\delta/u_m\delta' = \text{const}$. Для этого индукция поля должна спадать обратно пропорционально условной ширине струи $B = LB_0/\delta$. При этом уравнения (4.1)–(4.3) расщепляются. Численное интегрирование уравнения (4.1)

$$F''' + FF'' + 2F'^2 = \bar{N}^2 \left[F' - \frac{\xi}{2} (F'^2 - FF'') \right], \quad \bar{N}^2 = \frac{\sigma(B_0L)^2}{\eta} \quad (4.6)$$

содержится в работе [4]. Уравнения (4.2) и (4.5) имеют следующее решение:

$$u_m = \frac{1}{C_1^2} \frac{12-N}{3} x^{-(6+N)/(12-N)}, \quad \delta = C_1 x^{9/(12-N)} \quad (4.7)$$

В рассматриваемом случае интегрального условия (4.5) не существует. Это связано с особенностью, вносимой распределением внешнего магнитного поля в источник струи: объемная сила принимает при $x = 0$ бесконечно большое значение. Поэтому постоянная интегрирования C_1 определяется из интегрального условия, примененного в работах [3,4]

$$C_1 = \left(\frac{3}{12-N} \right)^{9/(N-12)} \left[D \left(\int_0^\infty F'^{9/(6+N)} d\varphi \right)^{-1} \right]^{(N+6)/(N-12)}, \quad D = \int_0^\infty u^{9/(6+N)} dy = \text{const} \quad (4.8)$$

Приведенные соотношения (4.7) отличаются от решения, полученного в работе [4], поскольку в последней решение отыскивается в виде степенных комплексов. Однако особенности решения задачи, указанные в работе [4], остаются справедливыми и для рассмотренного случая. В частности, это относится к ограничению значений параметра N , для которых существуют автомодельные решения, пределами $0 \leq N < 12$, полученными из условия возрастания расхода вдоль струи.

Из выражения (4.7) для условной ширины струи и максимальной скорости видно, что увеличение объемной силы приводит к росту первой из них и уменьшению второй.

5. Тепловая задача о полуограниченной струе. Ограничимся решением задачи о струе, распространяющейся вдоль стенки с фиксированной температурой

$$T = T_w \quad \text{при } y = 0, \quad T = T_\infty \quad \text{при } y = \infty \quad (5.1)$$

Полагая для этого

$$\frac{\Delta T}{\Delta T_w} = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} = \theta(\varphi) \quad (5.2)$$

взамен (2.3) получим уравнение

$$\frac{1}{3P} \theta'' + \left(1 + \frac{u_m \delta}{u_m \delta'} \right) F \theta' + N \frac{u_m \delta}{\Delta T_w \delta'} F'^2 = 0 \quad (5.3)$$

с граничными условиями

$$\theta = 1 \quad \text{при } \varphi = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{при } \varphi = \infty$$

решение которого имеет вид

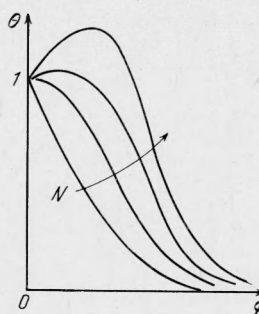
$$\theta(\varphi) = 1 - [1 - N\theta_2(\infty)] \frac{\theta_1(\varphi)}{\theta_2(\infty)} - N\theta_2(\varphi) \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} \theta_1(\varphi) &= \int_0^\varphi \exp\left(-\omega P \int_0^\varphi F d\varphi\right) d\varphi, \quad \omega(x) = 3\left(1 + \frac{u_m' \delta}{u_m \delta'}\right) \\ \theta_2(\varphi) &= 3P \frac{u_m \delta}{\Delta T_w \delta'} \int_0^\varphi \left(\int_0^\varphi F'^2 \exp\left(\omega P \int_0^\varphi F d\varphi\right) d\varphi\right) \exp\left(-\omega P \int_0^\varphi F d\varphi\right) d\varphi \end{aligned}$$

Из выражения для локального значения числа Нуссельта

$$N_x = -\frac{x}{\delta} \frac{1 - N\theta_2(\infty)}{\theta_1(\infty)}, \quad N_x = \frac{q_x}{\lambda \Delta T_w}, \quad q = -\lambda \frac{dT}{dy} \quad (5.5)$$

можно оценить тепловые потоки, возникающие в струе вследствие джоулевой диссипации. Из формулы (5.5) видно, что тепловой поток, возникающий вследствие джоулевой диссипации, с ростом параметра N увеличивается. Подтормаживающее действие магнитного поля на движение струи при этом приводит к более равномерному распределению температуры вблизи стенки.



Фиг. 6

С качественной стороны профили температуры имеют вид кривых, приведенных на фиг. 6.

Заметим в заключение, что все приведенные выше результаты при отсутствии магнитного поля ($N = 0$) переходят в соответствующие решения для чисто гидродинамического истечения.

Поступила 7 VI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. В у л и с Л. А., К а ш к а р о в В. П. Теория струй вязкой жидкости. Физматгиз, 1965.
2. J u n g l a u s G. Two-dimensional Boundary Layers and Jets in Magneto-Fluid Dynamics. Rev. Modern Phys., 1960, vol. 32, No. 4.
3. Д ж а у г а ш т и н К. Е. Распространение плоской струи проводящей жидкости. Инж.-физ. ж., 1965, т. 8, № 5.
4. В у л и с Л. А., Д ж а у г а ш т и н К. Е. Полуограниченная струя проводящей жидкости. Магнитная гидродинамика, 1965, № 4 (см. также Electricity from MHD, vol. 1, Proc. Symp., Salzburg; Vienna, 1966, p. 447).
5. Д ж а у г а ш т и н К. Е. К задаче о распространении плоской струи проводящей жидкости в магнитном поле. Инж.-физ. ж., 1966, т. 10, № 4.
6. M o r e a u M. R. Jet libre, laminaire, d'un fluide incompressible, en presence d'un champ magnetique transversal. C. r. Acad. sci., 1963, vol. 256, No. 11, 23.
7. M o r e a u M. R. Jet laminaire rasant une paroi en presence d'un champ magnetique transversal. C. r. Acad. sci., 1964, vol. 259, No. 14.
8. Ц и н о б е р А. Б., Щ е р б и н и н Э. В. Плоские магнитогидродинамические струи. Магнитная гидродинамика, 1965, № 3.
9. Щ е р б и н и н Э. В. Интегральные методы в теории струи электропроводящей жидкости. Магнитная гидродинамика, 1965, № 3.
10. Д ж а у г а ш т и н К. Е. Распространение ламинарной струи электропроводящей жидкости в магнитном поле. ПМТФ, 1966, № 3.
11. P e s k i n M. R., Hydromagnetic Free Jet. Phys. Fluids, 1963, vol. 6, No. 5.
12. M o r e a u M. R. Sur le jet libre, turbulent, en presence d'un champ magnetique transversal. C. r. Acad. sci., 1964, vol. 259, No. 15.