УДК 531/534

ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ УСЛОВИЕ ПЛАСТИЧНОСТИ

А. С. Гулгазли

Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности,
AZ1010 Баку, Азербайджан
E-mail: alesker.gulgezli@mail.ru

Получено условие прочности, учитывающее деформационную анизотропию и влияние всестороннего давления на механические свойства материалов.

Ключевые слова: пространство напряжений, деформационная анизотропия, повторное нагружение, потенциальная энергия, девиатор напряжений, инварианты тензора.

DOI: 10.15372/PMTF20180214

1. Энергетическое условие прочности. Как известно, твердые тела являются упругими лишь при малых нагрузках. При воздействии значительных сил тела испытывают пластические деформации [1]. Теория пластичности используется при исследовании технологических процессов изготовления металлических деталей машин, а также при расчетах элементов конструкций на прочность. В последнее время актуальной является также проблема оценки прочности конструкций, испытывающих повторные воздействия механических нагрузок и тепловых потоков.

Существующие теории пластичности применимы лишь для определенных материалов и типов нагружения. Например, деформационная теория пластичности справедлива только при простом нагружении [2], а модель идеальной пластичности — в случае, когда объемная деформация равна нулю [3]. Таким образом, разработка универсального условия прочности имеет большое значение не только в случае повторного нагружения, но и в случае первого нагружения.

Упругопластические материалы, в частности металлы и сплавы, обладают рядом свойств, общее представление о которых позволяют получить результаты эксперимента на растяжение-сжатие. На рисунке представлена диаграмма одноосного растяжения-сжатия для упругопластического материала.

При наличии эффекта Баушингера увеличение предела упругости при одноосном растяжении стержня приводит к его уменьшению при сжатии. На рисунке площадь треугольника OAB равна удельной потенциальной энергии упругой деформации при растяжении, а площадь треугольника OCD — упругой деформации при сжатии при начальном нагружении. Площадь треугольника $O_1A_1B_1$ равна удельной потенциальной энергии упругой деформации растяжения, а площадь треугольника $O_1C_1D_1$ — упругой деформации сжатия при повторном нагружении при наличии пластических деформаций. Согласно энергетическому условию прочности Мизеса пластическое деформирование начинается при достижении некоторого предельного значения удельной потенциальной энергии упругой

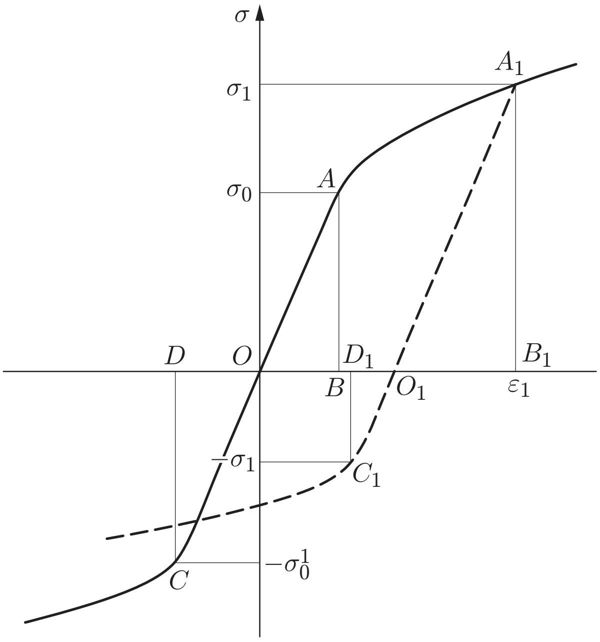

Диаграмма одноосного растяжения-сжатия для упругопластического материала: сплошная линия — первое нагружение, штриховая — повторное нагружение

деформации (площадь треугольника OAB). Из рисунка следует, что при повторном нагружении после пластического деформирования предел упругости увеличивается. Следовательно, увеличивается и предельное значение удельной потенциальной энергии упругой деформации. Таким образом, при повторном нагружении энергетическое условие прочности Мизеса не выполняется. Из рисунка также следует, что с увеличением удельной потенциальной энергии при растяжении удельная потенциальная энергия при сжатии уменьшается, т. е. увеличение удельной потенциальной энергии упругой деформации при нагружении в одном из направлений в пространстве напряжений приводит к ее уменьшению в противоположном направлении. С учетом сказанного выше примем следующую гипотезу: сумма максимальных удельных потенциальных энергий упругих деформаций при нагружении в противоположных направлениях в пространстве напряжений остается постоянной при любом повторном статическом нагружении. В частности, в случае растяжения и сжатия тонкого стержня имеем

$$S_{\Delta OAB} + S_{\Delta OCD} = S_{\Delta O_1 A_1 B_1} + S_{\Delta O_1 C_1 D_1}.$$

Для произвольного напряженно-деформированного состояния математическая формулировка принятой гипотезы имеет вид

$$\frac{1}{2}\,\sigma'_{ij}\varepsilon'_{ij} + \frac{1}{2}\,\sigma''_{ij}\varepsilon''_{ij} = \frac{1}{2E}\,(\sigma^2_{1\text{т}} + \sigma^2_{2\text{т}}), \tag{1.1}$$

где $\sigma_{1\text{т}}$, $\sigma_{2\text{т}}$ — пределы текучести при одноосном растяжении и сжатии соответственно; σ'_{ij}, ε'_{ij} и σ''_{ij}, ε''_{ij} — компоненты тензоров напряжений и упругих деформаций при нагружении в противоположных направлениях; по повторяющимся индексам проводится суммирование от 1 до 3. Удельная потенциальная энергия является инвариантной величиной, поэтому левая часть равенства (1.1) должна быть функцией инвариантов тензора напряжений. Следовательно, равенство (1.1) можно записать в главных осях. Тогда из (1.1) получаем

$$\sigma'_i\varepsilon'_i + \sigma''_i\varepsilon''_i = (\sigma^2_{1\text{т}} + \sigma^2_{2\text{т}})/E. \tag{1.2}$$

Так как точки с координатами $(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')$ и $(\sigma_1'', \sigma_2'', \sigma_3'')$ в трехмерном пространстве напряжений находятся на одной прямой, проходящей через начало координат, то выполняются условия

$$\frac{\sigma_1'}{k_1} = \frac{\sigma_2'}{k_2} = \frac{\sigma_3'}{k_3}, \qquad \frac{\sigma_1''}{k_1} = \frac{\sigma_2''}{k_2} = \frac{\sigma_3''}{k_3}, \tag{1.3}$$

где

$$k_i = \sigma_i' \Big/ \sqrt{\sigma_1'^2 + \sigma_2'^2 + \sigma_3'^2} = \sigma_i'' \Big/ \sqrt{\sigma_1''^2 + \sigma_2''^2 + \sigma_3''^2}\,, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{1.4}$$

Закон Гука в главных осях имеет вид [4]

$$\varepsilon_i = \frac{1+\nu}{E}\,\sigma_i - \frac{\nu}{E}\,(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \tag{1.5}$$

С учетом (1.3)–(1.5) после ряда преобразований получаем

$$\sigma_{ij}'' = -\sqrt{(\sigma_{1\text{т}}^2 + \sigma_{2\text{т}}^2)/(J_1'^2 + 2(1+\nu)J_2') - 1}\;\sigma_{ij}' \tag{1.6}$$

или

$$\sigma_{ij}' = -\sqrt{(\sigma_{1\text{т}}^2 + \sigma_{2\text{т}}^2)/(J_1''^2 + 2(1+\nu)J_2'') - 1}\;\sigma_{ij}'', \tag{1.7}$$

где ν — коэффициент Пуассона; J_1', J_2' и J_1'', J_2'' — первый и второй инварианты тензора напряжений:

$$J_1 = \sigma_{ij}\delta_{ij}, \qquad J_2 = -(J_1^2 - \sigma_{ij}\sigma_{ij})/2,$$

δ_{ij} — символы Кронекера. Из (1.6), (1.7) следует, что если точка с координатами σ_{ij} в пространстве напряжений находится на поверхности текучести, то точка с координатами $-k_0\sigma_{ij}$ также находится на поверхности текучести. При этом

$$k_0 = \sqrt{k^2/(J_1'^2 + 2(1+\nu)J_2') - 1}\,, \qquad k^2 = \sigma_{1\text{т}}^2 + \sigma_{2\text{т}}^2. \tag{1.8}$$

Условие (1.1) является новым энергетическим условием прочности.

На начальной поверхности нагружения, когда пластические деформации и упрочнение отсутствуют, $\sigma_{ij}' = -\sigma_{ij}''$. Следовательно, на начальной поверхности нагружения $k_0 = 1$. Приравнивая к единице правую часть первого равенства (1.8) с учетом второго, получаем

$$J_1^2 + 2(1+\nu)J_2 = \sigma_\text{т}^2. \tag{1.9}$$

Уравнение (1.9) является уравнением начальной поверхности нагружения. В (1.9) штрихи над инвариантами опущены.

2. Уравнение поверхности нагружения. Определим поверхность нагружения при любом повторном статическом нагружении. Из (1.6), (1.7) следует, что любая прямая, проходящая через начало координат в пространстве напряжений и пересекающая поверхность нагружения, пересекает ее в двух точках. Поэтому поверхность нагружения будем искать в виде поверхности второго порядка. Учитывая, что поверхность нагружения должна быть функцией инвариантов напряжений, запишем ее уравнение в виде

$$J_1^2 + aJ_2 + bJ_1J_1^0 + c\sigma_{ij}^0\sigma_{ij} + d = 0, \tag{2.1}$$

где σ_{ij}^0 — компоненты напряжения в конце предыдущего активного нагружения; a, b, c, d — неизвестные компоненты, зависящие от инвариантов тензора σ_{ij}^0. Приведем (2.1) к каническому виду. Для этого введем новые переменные $\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{0ij}$ (σ_{0ij} — координаты центра поверхности нагружения). Тогда имеем

$$\sigma_{ij} = \bar{\sigma}_{ij} + \sigma_{0ij}, \qquad J_1 = \sigma_{ij}\delta_{ij} = (\bar{\sigma}_{ij} + \sigma_{0ij})\delta_{ij} = \bar{J}_1 + J_{01},$$
$$J_1^2 = \bar{J}_1^2 + 2\bar{J}_1 J_{01} + J_{01}^2, \qquad J_2 = -(J_1^2 - \sigma_{ij}\sigma_{ij})/2 = \bar{J}_2 + J_{01} - \bar{J}_1 J_{01} + \bar{\sigma}_{ij}\sigma_{0ij}.$$

Подставляя эти зависимости в (2.1), получаем

$$\bar{J}_1^2 + a\bar{J}_2 + (2J_{01}\delta_{ij} - aJ_{01}\delta_{ij} + a\sigma_{0ij} + bJ_1^0\delta_{ij} + c\sigma_{ij}^0)\bar{\sigma}_{ij} + \\ + J_{01}^2 + aJ_{02} + bJ_{01}J_1^0 + c\sigma_{ij}^0\sigma_{0ij} + d = 0. \quad (2.2)$$

Каноническим уравнением (2.2) является уравнение, в котором коэффициенты при $\bar{\sigma}_{ij}$ равны нулю, т. е.

$$[(2-a)J_{01} + bJ_1^0]\delta_{ij} + a\sigma_{0ij} + c\sigma_{ij}^0 = 0. \quad (2.3)$$

Умножая обе части равенства (2.3) на δ_{ij} и проводя суммирование по i, j от 1 до 3, получаем

$$J_{01} = -\frac{3b+c}{2(3-a)}\,J_1^0. \quad (2.4)$$

Подставляя (2.4) в (2.3), имеем

$$\sigma_{0ij} = \frac{2c - a(b+c)}{2a(3-a)}\,J_1^0\delta_{ij} - \frac{c}{a}\,\sigma_{ij}^0. \quad (2.5)$$

Таким образом, центр новой поверхности нагружения находится в точке, определяемой формулой (2.5). Известно, что после пластического деформирования и последующей разгрузки в теле остаются не только пластические деформации, но и остаточные напряжения [5]. Из физических соображений следует, что σ_{0ij} являются остаточными напряжениями. В частном случае при одноосном растяжении $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ и после разгрузки, следующей за пластическим деформированием, остаточные напряжения равны $\sigma_1 = \sigma_{01}$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 0$. Из формулы (2.5) следует, что если отлично от нуля хотя бы одно напряжение (в данном случае σ_1), то, поскольку в правой части (2.5) имеется первый инвариант тензора напряжений, все компоненты остаточных напряжений отличны от нуля. Для того чтобы устранить это противоречие, положим

$$2c - a(b+c) = 0. \quad (2.6)$$

Подставляя (2.6) в (2.5), получаем

$$\sigma_{0ij} = -(c/a)\sigma_{ij}^0. \quad (2.7)$$

С учетом (2.7) условие (2.2) имеет вид

$$\bar{J}_1^2 + a\bar{J}_2 = (c/a)^2((J_1^0)^2 + aJ_2) - d. \quad (2.8)$$

Осталось определить коэффициенты a, b, c, d.

С учетом (1.8) из (2.3) следует

$$d = -k_0((J_1^0)^2 + aJ_2^0). \quad (2.9)$$

Подставляя (2.9) в (2.8), получаем

$$\bar{J}_1^2 + a\bar{J}_2 = (c^2/a^2 + k_0)((J_1^0)^2 + aJ_2^0). \quad (2.10)$$

С учетом принятых предположений из (1.9) следует, что условие (2.10) имеет вид

$$\bar{J}_1^2 + 2(1+\nu)\bar{J}_2 = \bar{\sigma}_{\text{т}}^2. \quad (2.11)$$

Это означает, что

$$\bar{\sigma}_{\text{т}}^2 = (c^2/a^2 + k_0)((J_1^0)^2 + aJ_2^0), \tag{2.12}$$

где $\bar{\sigma}_{\text{т}}$ — новый предел текучести при повторном нагружении. Из (2.6) следует

$$b = c(2 - a)/a. \tag{2.13}$$

Подставляя (2.13) в (2.6), получаем

$$c = (k_0 - 1)a/2. \tag{2.14}$$

Подставляя (2.13), (2.14) в (2.12), находим

$$\bar{\sigma}_{\text{т}}^2 = (k_0 + 1)^2((J_1^0)^2 + aJ_2^0)/4. \tag{2.15}$$

В случае отсутствия давления ($J_1 = 0$) упрочнение материала отсутствует, иными словами, $k_0 = 1$. Тогда из (2.13), (2.14) следует

$$c = b = 0, \qquad \bar{\sigma}_{\text{т}}^2 = \sigma_{\text{т}}^2$$

и выражение (2.15) принимает вид

$$J_1^0 + aJ_2^0 = \sigma_{\text{т}}^2. \tag{2.16}$$

В то же время на начальной поверхности текучести выполняется равенство

$$J_1^0 + 2(1 + \nu)J_2^0 = \sigma_{\text{т}}^2. \tag{2.17}$$

Из (2.16), (2.17) следует

$$a = 2(1 + \nu). \tag{2.18}$$

Подставляя (2.14), (2.18) в (2.13), имеем

$$b = (k_0 - 1)(2 - a)/2 = (1 - k_0)\nu,$$

подставляя (2.15) в (2.9), находим

$$d = -\frac{4k_0}{(k_0 + 1)^2}\,\bar{\sigma}_{\text{т}}^2. \tag{2.19}$$

На девиаторной плоскости с учетом (2.19) из (2.1) получаем

$$J_2 = \sigma_{\text{т}}^2/[2(1 + \nu)]. \tag{2.20}$$

Поскольку на девиаторной плоскости инварианты тензора напряжений совпадают с инвариантами девиатора напряжений, из (2.20) следует [1]

$$\sqrt{s_2} = \sigma_{\text{т}}/\sqrt{2(1 + \nu)}\,, \tag{2.21}$$

где s_2 — второй инвариант девиатора напряжений. Известно, что на поверхности текучести $\nu \to 0{,}5$ [5], тогда (2.21) принимает вид

$$\sqrt{s_2} = \sigma_{\text{т}}/\sqrt{3}\,. \tag{2.22}$$

Условие (2.22) совпадает с условием текучести Мизеса. Таким образом, идеальная пластичность имеет место на девиаторной плоскости. С учетом (2.14) из (2.18) для поверхности текучести окончательно получаем

$$\bar{J}_1^2 + 2(1 + \bar{\nu})\bar{J}_2 = ((k_0 + 1)/2)^2[(J_1^0)^2 + 2(1 + \nu)J_2^0].$$

Предположим, что начальное нагружение происходит в направлении гидростатической оси, т. е. $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$, $J_1^2 = 9\sigma^2$, $J_2 = -3\sigma^2$. Учитывая, что на начальной поверхности нагружения коэффициент Пуассона $\nu \to 0{,}5$ [5], для k_0 получаем

$$k_0 = \sqrt{\frac{k^2}{(J_1^0)^2 + 2(1+\nu)J_2^0} - 1} = \sqrt{\frac{k^2}{9\sigma^2 - 9\sigma^2} - 1} = \infty.$$

Следовательно, начальная поверхность нагружения представляет собой цилиндр, ось которого является гидростатической осью, поэтому при воздействии гидростатического давления объемная деформация будет упругой. Действительно, в работе [6] приведены результаты экспериментов, согласно которым при сколь угодно большом гидростатическом давлении объемная деформация всегда является упругой.

3. Энергетическое условие разрушения. Из соотношений (1.2), (1.3) можно получить критерий разрушения, рассматривая предельное состояние поверхности текучести в пространстве напряжений. Так как поверхность текучести должна содержать начало системы координат, т. е. точку, которая соответствует ненапряженному состоянию, то предельными являются случаи, когда поверхность проходит через начало координат. Полагая в (1.2) $\sigma''_{ij} = 0$, получаем

$$(J_1')^2 + 2(1+\nu)J_2' = \sigma_{1\text{т}}^2 + \sigma_{2\text{т}}^2. \tag{3.1}$$

При $\sigma_{1\text{т}} = \sigma_{2\text{т}} = \sigma_{\text{т}}$ выражение (3.1) принимает вид (штрихи опущены)

$$J_1^2 + 2(1+\nu)J_2 = 2\sigma_{\text{т}}^2. \tag{3.2}$$

Условие (3.2) является условием разрушения в пространстве напряжений для начального нагружения.

В частном случае при одноосном растяжении тонкого стержня $J_1 = \sigma_1$, $J_2 = 0$ и из (3.2) следует

$$\sigma_1 = \sqrt{2}\,\sigma_{\text{т}} \approx 1{,}4\sigma_{\text{т}}. \tag{3.3}$$

Условие (3.3) означает, что при напряжении, равном $1{,}4\sigma_{\text{т}}$, стержень начинает разрушаться, иными словами, при одноосном растяжении предел текучести может увеличиваться на 40 %. Например, известно, что после нейтронного облучения для многих марок стали предел текучести увеличивается именно на 40 % [7].

Правая часть равенства (3.2) в два раза больше правой части равенства (1.9). Таким образом, во всех рассмотренных частных случаях, а именно когда действуют только касательные напряжения (путь нагружения находится на девиаторной плоскости), когда действует только всестороннее давление (путь нагружения совпадает с гидростатической осью) или когда пределы упругости при растяжении и сжатии равны, полученные результаты совпадают с результатами, полученными ранее.

Заключение. В работе получены следующие основные результаты.

Предложено новое энергетическое условие пластичности, из которого, в частности, следует, что любой материал может упрочняться или быть идеально пластическим в зависимости от того, подвергается ли он всестороннему сжатию или не подвергается, объемная деформация всегда упругая, условие текучести Мизеса верно только на девиаторной плоскости.

Получена зависимость предела текучести и координат центра поверхности нагружения от типа напряженного состояния.

Предложено новое энергетическое условие разрушения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Галин Л. А.** Упруго-пластические задачи. М.: Наука, 1984.
2. **Быковцев Г. И.** Теория упрочняющегося пластического тела / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. М.: Наука, 1971.
3. **Аннин Б. Д.** Упруго-пластическая задача / Б. Д. Аннин, Г. П. Черепанов. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1983.
4. **Вопросы** теории пластичности. М.: Изд-во АН СССР, 1981.
5. **Гулгазли А. С.** Пластичность и ползучесть при повторном нагружении. Саарбрюккен: Lambert Acad. Publ., 2012.
6. **Надаи А.** Пластичность и разрушение твердых тел. М.: Высш. шк., 1980.
7. **Влияние** ядерных излучений на материалы. М.: Атомиздат, 1961.

Поступила в редакцию 29/III 2017 г.,
в окончательном варианте — 7/VI 2017 г.