

## ВНУТРЕННИЕ РЕЗОНАНСЫ И УСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

В. В. Новиков

(Горький)

Для ряда нагруженных упругих оболочек определенная при рассмотрении линеаризованной задачи так называемая верхняя критическая нагрузка  $q_v$  превосходит в несколько раз найденную в большей части экспериментальных работ критическую нагрузку  $q_a$ , причем эксперименты дают большой разброс в  $q_a$  (от  $0,1q_v$  до  $q_v$ ). Эти факты объясняются в настоящее время влиянием начальных неправильностей формы оболочек.

Заслуживает внимания взгляд на проблему устойчивости оболочек, базирующийся на особенностях спектра их собственных частот. В связи с этим укажем, что обстоятельный обзор современного состояния теории распределения собственных частот упругих оболочек содержится в работе [1]. В работе [2] показано, что существует класс задач устойчивости оболочек, в которых распределение собственных значений начинается с точки сгущения, а поэтому обычный для теории оболочек переход от рассмотрения системы с бесконечным числом степеней свободы к изучению системы с одной степенью свободы некорректен. В дальнейшем [3] была построена теория аппроксимации таких распределенных систем конечномерными системами.

1. Существенная особенность рассматриваемых здесь задач состоит в том, что при некотором  $q < q_v$  появляется новое устойчивое состояние равновесия с меньшей энергией системы и что устойчивость нарушается на формах с весьма большим числом перегибов, т. е. при увеличении нагрузки наибольшее изменение претерпевают частоты  $\omega_i$  с  $i \sim n \sim h^{-1/2}$  (в зависимости от толщины оболочки обычно  $n \sim 10-100$ ). Ветви частот  $\omega_i(q)$  с увеличением нагрузки пересекаются с ветвями, отвечающими  $i < n$ , а при  $q = q_v$  одна из них ( $\omega_N$ ) обращается в нуль.

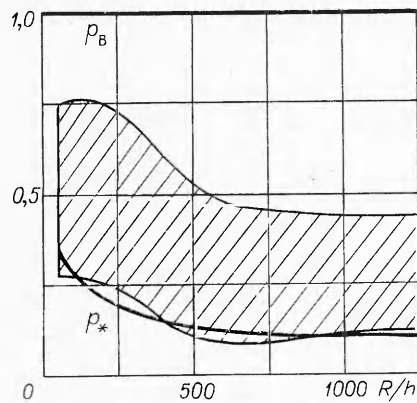
При таком характере зависимости  $\omega_i(q)$  необходимо учитывать ангармонические эффекты, обусловленные квадратичной нелинейностью в уравнениях упругих колебаний, приводящие к тому, что на колебания с частотами  $\omega_i$  накладываются комбинационные колебания слабой интенсивности. Кроме того, начиная с некоторого значения нагрузки  $q_*$ , возможны такие подборы частот, когда выполняются условия внутреннего резонанса

$$(1.1) \quad \omega_i + \omega_j = \omega_k, \quad i + j = k.$$

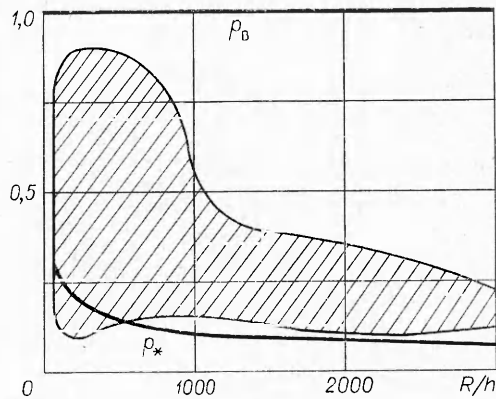
Число точек, в которых они имеют место, можно оценить по числу совпадений частот разных форм  $C_N^2$  (для рассматриваемых задач  $\sim 10^2-10^3$ ).

Рассматриваемые здесь системы подвергаются действию лишь консервативных нагрузок, поэтому при случайном возмущении, которое можно представить в виде набора малых колебаний по нескольким формам, внутренний резонанс приводит к перераспределению энергии между формами колебаний, что может способствовать увеличению амплитуд отдельных форм до значений, при которых в материале оболочки произойдут необратимые изменения и устойчивость нарушится или станет возможным перескок системы в другое равновесное состояние. С точки зрения теории, развитой в работе [3], перераспределение энергии между формами также следует рассматривать как фактор, приводящий к неустойчивости оболочек. В зависимости от начальных условий, характера нагружения и т. п. нарушение устойчивости будет происходить при нагрузках из интервала  $[q_*, q_v]$ .

Для практических расчетов в качестве  $q_*$  можно принять значение нагрузки, при котором впервые происходит пересечение ветвей  $\omega_i(q)$ .



Ф и г. 1



Ф и г. 2

Оно определяется как максимальное значение нагрузки, когда  $d\omega/di \geq 0$  выполняется для всех  $i$ . Если для некоторых  $i$   $d\omega/di < 0$ , то возможны малоразличимые частоты, соответствующие соседним  $i$ , которые вместе с малым  $\omega$ , удовлетворяют (1.1). Понятно, что для точного определения критической нагрузки с учетом внутренних резонансов необходимы знания о виде нелинейности, характере нагружения, что в каждом конкретном случае весьма различно и приводит к сложной задаче. Рассмотрение же спектра частот линеаризованной системы позволяет для всех задач этого класса указать нагрузки, при которых возможна потеря устойчивости.

2. Рассмотрим два примера. При этом воспользуемся уравнениями частот для сферической и цилиндрической оболочек [4], дополненными членами, содержащими нагрузку, которые можно легко получить после учета в уравнениях упругих колебаний сил, обусловленных равновесными напряжениями, в виде [5].

А. Сферическая оболочка, находящаяся под гидростатическим давлением  $p$ . Уравнение частот имеет вид

$$\frac{2\rho R^2}{E} \left(1 + \frac{1+3\sigma}{k}\right) \omega^2 = -\frac{k p R}{E h} + \frac{k^2}{6(1-\sigma^2)} \left(\frac{h}{R}\right)^2 + 2,$$

где  $h$  — толщина оболочки;  $R$  — ее радиус;  $\rho$  — плотность материала;  $\sigma$  — коэффициент Пуассона;  $E$  — модуль растяжения;  $k = n(n+1)$ ,  $n = 2, 3, \dots$ . При получении данного соотношения использован известный факт, что нарушение устойчивости происходит при  $p \sim (h/R)^2$ .

Положив  $\omega^2 = 0$  и минимизируя  $p$  по  $k$ , имеем

$$p_b = \frac{2E}{1/3(1-\sigma^2)} \left(\frac{h}{R}\right)^2.$$

Для отыскания  $p_*$  воспользуемся соотношением  $d\omega/dn \geq 0$ , которое можно заменить эквивалентным неравенством  $d\omega^2/dk \geq 0$ . Откуда имеем

$$p_* = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/3} E \left[\frac{1+3\sigma}{(1-\sigma^2)^2}\right]^{1/3} \left(\frac{h}{R}\right)^{7/3}, \quad \frac{p_*}{p_b} = \frac{3}{2} \left[\frac{(1+3\sigma)^2}{12(1-\sigma^2)} \left(\frac{h}{R}\right)^2\right]^{1/6}.$$

На фиг. 1 показаны  $p_b$ ,  $p_*$  и область экспериментальных данных для  $p_0$ , взятая из работы [5];  $p_b$  и  $p_*$  вычислялись при  $\sigma = 0,3$ .

Б. Цилиндрическая оболочка, сжимаемая в осевом направлении силой  $p$ . Уравнение частот имеет вид

$$\frac{\rho R^2}{a^3} \omega^2 \left(1 + \frac{1}{a^2}\right) = -p + \frac{E}{a^2} + \frac{E}{12(1-\sigma^2)} a^2 \left(\frac{h}{R}\right)^2,$$

где  $a = n\pi \frac{R}{l}$  ( $n = 1, 2, \dots$ );  $l$  — длина оболочки.

Аналогично предыдущему примеру находим

$$p_* = E \left[ \frac{3}{16(1-\sigma^2)^2} \right]^{1/3} \left(\frac{h}{R}\right)^{4/3}, \quad \frac{p_*}{p_b} = \frac{3}{2} \left[ \frac{1}{12(1-\sigma^2)} \right]^{1/6} \left(\frac{h}{R}\right)^{1/3}.$$

На фиг. 2 представлены  $p_b$ ,  $p_*$  и область экспериментальных критических нагрузок  $p_0$  [5, 6].

В заключение заметим, что найденная нагрузка  $p_*$  зависит от толщины оболочки и в широком интервале изменения  $h$  совпадает с нижней границей области полученных в экспериментах критических нагрузок. В рамках предложенного механизма нарушения устойчивости находят объяснение и другие экспериментальные факты. В частности, большой разброс экспериментальных данных может быть объяснен различием в начальных условиях, характере нагружения и случайных динамических воздействиях, а уменьшение этого разброса при малых толщинах связано с увеличением вместе с ростом  $1/h$  числа резонансных соотношений.

Автор выражает благодарность Г. Г. Денисову за помощь в работе.

Поступила 8 VIII 1979

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В. В. Теория распределения собственных частот упругих тел и ее применение к задачам случайных колебаний. — ИМ, 1972, № 4.
2. Бендич Н. Н., Корнев В. М. О плотности собственных значений в задачах устойчивости тонких упругих оболочек. — ПММ, 1971, № 2.
3. Корнев В. М. Об аппроксимации в задачах устойчивости и колебаний упругих оболочек при сгущении собственных значений. — Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 2.
4. Вибрация в технике. Справочник. Т. 1. М., Машиностроение, 1978.
5. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. М., Физматгиз, 1973.
6. Григолюк Э. И., Кабанов В. В. Устойчивость оболочек. М., Наука, 1978.

УДК 539.374

### ПОЛЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ В ЗОНЕ УСТЬЯ ТРЕЩИНЫ

В. И. Архипов

(Хабаровск)

При установлении критерия разрушения большое значение имеет знание деформационных и силовых условий в зоне устья трещины. В зависимости от принятой модели упругопластического деформирования этой зоны предложены различные концепции в выборе критерия разрушения [1]. При этом необходимо учитывать, что реальный процесс разрушения в макромасштабе носит в большинстве случаев смешанный характер [2]. Отсюда большое значение имеет экспериментальное и теоретическое исследование поля упругопластического деформирования (УПД) в зоне устья трещины [3]. В работах [4—6] проведен эк-