ПМТФ, № 6, 1974

УДК 534.539.3

ИМПУЛЬС ДАВЛЕНИЯ НА ГРАНИЦЕ УПРУГОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Г. П. Коваленко

(Сумы)

Задача о движении импульса давления с постоянной скоростью по границе упругой однородной полуплоскости рассматривалась в [1−3]. В [1, 2] задача рассматривалась как стационарная, в [3] она решалась с применением преобразования Лапласа по времени. В данной работе рассматривается аналогичная задача для упругой полуплоскости с переменными параметрами Ламе и плотностью среды.

1. Рассматривается упругая полуплоскость xz, $z > 0$, параметры Ламе λ, μ и плотность ρ которой зависят от координаты z по степенному закону

$$\lambda = \lambda_0\varepsilon^\nu, \quad \mu = \mu_0\varepsilon^\nu, \quad \rho = \rho_0\varepsilon^\omega \tag{1.1}$$

$$\varepsilon = az + 1, \quad \nu = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}, \quad \omega = \frac{4}{\gamma-1}, \quad \gamma = \frac{\lambda+2\mu}{\mu}$$

Уравнения движения такой среды, как показано в [4], можно представить в виде

$$\left[\nabla^2 + \frac{4a\partial}{(\gamma-1)\,\varepsilon\partial z} - v_n^{-2}\varepsilon^{(3-\gamma)/(\gamma-1)}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\psi_n = 0 \tag{1.2}$$

$$v_1^2 = (\lambda_0 + 2\mu_0)\rho_0^{-1}, \quad v_2^2 = \mu_0\rho_0^{-1}, \quad n = 1, 2$$

где v_1, v_2 — скорости упругих волн, a — безразмерный параметр.

Функции ψ_n и смещения u_n связаны зависимостями

$$f_1\mathbf{u}_1 = \nabla(f_1\psi_1), \quad f_2\mathbf{u}_2 = \nabla \times \left(i_y f_2\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\right) \tag{1.3}$$

Весовые функции f_n зависят только от z, единичный вектор i_y направлен вдоль оси y. Будем рассматривать среду, для которой $\lambda_0 = \mu_0$. Тогда $\gamma = 3$, уравнения (1.2) упрощаются и принимают вид

$$\left(\nabla^2 + \frac{2a\partial}{\varepsilon\,\partial z} - v_n^{-2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi_n = 0 \tag{1.4}$$

Решение системы (1.4) при нулевых начальных данных должно удовлетворять граничным условиям

$$\sigma_z = -\delta(vt - x), \quad \tau_{xz} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0 \tag{1.5}$$

Здесь $\delta(\alpha)$ — функция Дирака, v — скорость движения импульса давления, t — время, σ_z, τ_{xz} — компоненты тензора напряжений.

Вводим новую переменную s по формуле $s = vt - x$. Тогда решения системы (1.4) можно представить в виде

$$\psi_1 = \varepsilon^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} G(\alpha)\exp(i\alpha s - \alpha\eta z)\,d\alpha$$

$$\psi_2 = \varepsilon^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} Q(\alpha)\exp(i\alpha s - \alpha\delta z)\,d\alpha$$

$$\eta = (1 - v^2v_1^{-2}\alpha^{-2})^{1/2}, \quad \delta = (1 - v^2v_2^{-2}\alpha^{-2})^{1/2}$$

где α — параметр разделения уравнения (1.4).

Для определения функций G, Q используем граничные условия (1.5) и зависимости (1.3). Это приводит к двум уравнениям

$$G(2\eta + a) + Q(2\alpha^2 - v^2 v_2^{-2} + a\delta) = 0 \tag{1.6}$$
$$G(2\alpha^2 - v^2 v_2^{-2} + 3a\eta) + Q(2\delta + 3a)\alpha^2 = -2\pi^{-1}$$

При получении второго уравнения использовано интегральное представление функции Дирака

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}\, d\alpha$$

Определив постоянные из (1.6), с помощью (1.3) находим смещения

$$u_x = \frac{\mathrm{Im}}{2\pi\varepsilon}\int_0^{\infty} \alpha\left[(\zeta + a\delta)e^{-\eta z} - \delta(2\eta + a)e^{-\delta z}\right] R^{-1} e^{-i\alpha s}\, d\alpha$$

$$u_z = \frac{\mathrm{Re}}{2\pi\varepsilon}\int_0^{\infty} \left[\alpha^2(2\eta + a)e^{-\delta z} - (\zeta + a\delta)\eta e^{-\eta z}\right] R^{-1} e^{-i\alpha s}\, d\alpha$$

Через R обозначена функция Рэлея неоднородной среды, R_0 — однородной, $\zeta = \varkappa + iw$ — комплексная переменная интегрирования

$$R = 4\eta\delta\alpha^2 - \zeta^2 - av^2 v_2^{-2}\alpha^2(3\eta + \delta) + 3a^2(\alpha^2 - \eta\delta)$$
$$\zeta = 2\alpha^2 - v^2 v_2^{-2}$$

2. Полагаем, что на границе полуплоскости заданы условия

$$\sigma_z = -H(vt - x), \quad \tau_{xz} = 0 \quad \text{при } z = 0 \tag{2.1}$$

Здесь $H(\alpha)$ — функция Хевисайда.

Применив к уравнениям движения (1.4) и граничным условиям (2.1) преобразование Лапласа по времени и воспользовавшись (1.3), получим

$$\left(\nabla^2 + \frac{2a\partial}{\varepsilon\partial z} - v_n^{-2}p^2\right)\overline{\psi}_n = 0, \qquad \overline{\psi}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt}\psi(t)\, dt \tag{2.2}$$

$$\overline{\sigma}_z = \frac{\mu}{\varepsilon}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 3\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{3a\partial}{\varepsilon\partial z}\right)\overline{\psi}_1 + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(2\frac{\partial}{\partial z} - \frac{3a}{\varepsilon}\right)\overline{\psi}_2\right]_{z=0} = \tag{2.3}$$
$$= -\frac{e^{-pxH(x)}}{p}$$
$$\overline{\tau}_{xz} = \frac{\mu\partial}{\varepsilon\,\partial x}\left[\left(2\frac{\partial}{\partial z} - \frac{a}{\varepsilon}\right)\overline{\psi}_1 + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{a\partial}{\varepsilon\partial z}\right)\overline{\psi}_2\right]_{z=0} = 0$$

где p — комплексный параметр преобразования Лапласа.

Решения уравнений (2.2) ищем в форме

$$\overline{\psi}_1 = \varepsilon^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} G(\zeta)\exp\left(ip\zeta x - p\sqrt{\zeta^2 + G^2}\, z\right) d\zeta, \quad c_1 = v^{-1} \tag{2.4}$$

$$\overline{\psi}_2 = \varepsilon^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} Q(\zeta)\exp\left(ip\zeta x - p\sqrt{\zeta^2 + c_2^2}\, z\right) d\zeta, \quad c_2 = v_2^{-1}, \quad \zeta = \alpha p^{-1}$$

Интегрирование ведется по действительной оси комплексной плоскости ζ. Для однозначности подынтегральных функций ветви корней фиксируем условием $\sqrt{1} = 1$. Подставив (2.4) в (2.3), приходим к двум интегральным уравнениям для определения $G(\zeta)$, $Q(\zeta)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} [G(2p\delta + a) + Q(p^2\eta^2 + p^2\zeta^2 - ap\eta)] \exp(ip\zeta x)\, d\zeta = 0 \tag{2.5}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} [G(-p\zeta^2 + 3p\delta^2 + 3a\delta) + Q(2\eta p^2\zeta^2 + 3ap\zeta^2)]\, e^{ip\zeta x} = e^{-pxH(x)}/p^2$$

Положив

$$G(\zeta) = -F(\zeta)(p^2\eta^2 + p^2\zeta^2 + ap\eta)$$
$$Q(\zeta) = F(\zeta)(2p\delta + a)$$
$$\delta = \sqrt{\zeta^2 + c_1^2}, \quad \eta = \sqrt{\zeta^2 + c_2^2}$$

тождественно удовлетворим первому уравнению (2.5) и получим уравнение для определения функции $F(\zeta)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\zeta) R(\zeta) \exp(ip\zeta x)\, d\zeta = -p^{-3} \exp\left(-\frac{pxH(x)}{v}\right) \tag{2.6}$$

$$R(\zeta) = p^2[4\zeta^2\eta\delta - (2\zeta^2 + 1)^2] - ap(3\delta + \eta) + 3a^2 \times \tag{2.7}$$
$$\times (1 - \eta\delta) = [4\zeta^2\eta\delta - (2\zeta^2 + 1)^2](p + p_1)(p + p_2)$$

Замыкая контур интегрирования в (2.6) для $x > 0$ и $x < 0$ соответственно в верхней и нижней полуплоскостях, находим, что для $x > 0$ уравнение удовлетворится, если

$$F(\zeta) R(\zeta) = L_+(\zeta)[2\pi i p^3 L_+(iv^{-1})(\zeta - iv^{-1})]^{-1} \tag{2.8}$$

а для $x < 0$

$$F(\zeta) R(\zeta) = -L_-(\zeta)[2\pi i p^3 L_-(-i\beta)(\zeta + i\beta)]^{-1}, \ \beta \to \infty$$

На действительной оси имеем

$$\lambda_+ = \frac{L_+(\xi + i\beta)}{L_+(iv^{-1})} = -\frac{L_-(\xi)(\xi - iv^{-1})}{L_-(-i\beta)} = \lambda_-$$

Здесь L_+, L_- — аналитические функции, не имеющие особенностей в верхней и нижней полуплоскостях соответственно.

Отсюда следует, что λ_+ — аналитическое продолжение λ_- в верхнюю полуплоскость. Поэтому λ — функция, аналитическая во всей плоскости, т. е. целая.

Для сходимости интегралов (2.5) необходимо потребовать, чтобы при $z = 0$

$$\lambda_-(\zeta) = A\zeta + B \tag{2.9}$$

Постоянные A и B определяются по значениям $\lambda_-(-i\beta)$, $\lambda_-(iv^{-1})$. Имея выражения для $\lambda_-(\zeta)$, из (2.9) находим $F(\zeta)$. Тогда (2.6) даст искомые функции $G(\zeta)$, $Q(\zeta)$. С помощью (2.4) и (1.3) определяем смещения в изображениях

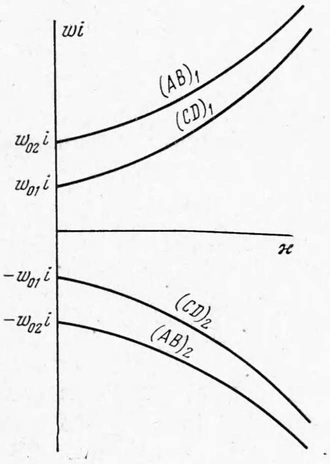
$$\bar{u}_x = \frac{\mathrm{Im}}{2\pi\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ip\zeta x}}{p(\zeta - iv^{-1}) R_0} \left\{ \left[2\delta\eta + \frac{pa[\eta R_0 + 2\delta\eta(3\delta + \eta)] - 2a^2 s_1}{R} \right] e^{-p\eta z} - \right. \tag{2.10}$$
$$\left. - \left[(2\zeta^2 + 1) + \frac{pa[\eta R_0 + (2\zeta^2 + 1)(3\delta + \eta)] - a^2(2\zeta^2 + 1)(1 - \eta\delta)}{R} \right] e^{-p\delta z} \right\} d\zeta$$

$$\bar{u}_z = \frac{\mathrm{Re}}{2\pi\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ip\zeta x}}{p\zeta(\zeta - iv^{-1})R_0}\left\{-\left[2\delta\zeta^2 + \frac{pa[\zeta^2R_0 - 2\delta\zeta^2(3\delta+\eta)] - 2a^2s_2}{R}\right]e^{-p\eta z} +\right.$$

$$\left. + \left[(2\zeta^2+1)\delta + \frac{pa[(3\delta+\eta)\delta(2\zeta^2+1) + R_0\eta\delta] - a^2(1-\eta\delta)(2\zeta^2+1)\delta}{R}\right]e^{-p\delta z}\right\}d\zeta$$

$$s_1 = \delta\eta(1-\eta\delta),\ s_2 = \delta\zeta^2(1-\eta\delta),\ R_0 = 4\zeta^2\eta\delta - (2\zeta^2+1)^2$$

Здесь слагаемые расположены по степеням параметра. При $a = 0$ выражения (2.10) дают смещения в изображениях для однородной среды.



3. Обращение выражений (2.10) в пространство оригиналов производится непосредственно по таблице обратных преобразований Лапласа. Путь интегрирования в комплексной плоскости целесообразно деформировать таким образом, чтобы в качестве путей интегрирования были выбраны кривые, на которых выполняются условия

$$\mathrm{Im}\,(i\zeta x - \eta z) = 0 \qquad (3.1)$$
$$\mathrm{Im}\,(i\zeta x - \delta z) = 0$$

Соотношения (3.1) имеют место вдоль отрезка мнимой оси

$$\mathrm{Re}\,\zeta = \varkappa = 0$$

$$0 < \mathrm{Im}\,\zeta < \omega_{0n} = \frac{\chi_n{}^2H^2}{\sqrt{1+H^2}}$$

и на кривых $\omega_n(\chi_n)$ (фигура)

$$\omega_n = \sqrt{H^2\varkappa + \frac{\chi_n{}^2H^2}{1+H^2}},\quad H = \frac{x}{z},\quad \chi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}},\quad \chi_2 = 1 \qquad (3.2)$$

Вдоль пути (3.2) имеем

$$\sqrt{x^2+\chi_n{}^2} = \frac{\omega}{H} + iH\varkappa,\qquad \zeta = (\omega^2 - \omega_0{}^2)^{1/2}$$

$$ix\zeta - z\sqrt{x^2+\chi_n{}^2} = z\omega(H + H^{-1})$$

Рассмотрим слагаемые в выражениях (2.10), которые возникают за счет неоднородности среды.

Выполнив соответствующие замены, часть горизонтального смещения, вызванного неоднородностью среды в изображениях, можно записать в виде

$$\bar{u}_{xa} = \frac{\mathrm{Im}}{2\pi\varepsilon pR_0{}^2}\sum_{n=1}^{2}\int\limits_0^{w_{0n}}\left\{\frac{e^{-p(wx+\eta z)}}{\zeta - iv^{-1}}\left(\frac{pA_1(iw) + aB_1(iw)}{(p+p_1)(p+p_2)}\right) -\right. \qquad (3.3)$$

$$\left. - \frac{[pA_2(iw) + aB_2(iw)]e^{-p(wx+\delta z)}}{(p+p_1)(p+p_1)}\right\}dw + \frac{\mathrm{Im}}{2\pi\varepsilon pR_0{}^2}\sum_{n=1}^{2}\int\limits_{w_{0n}}^{\infty}\left\{\frac{e^{-pzw(H+H^{-1})}}{(s - iv^{-1})}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{pA_1(s) + aB_1(s)}{(p+p_1)(p+p_2)}\right) - \frac{[pA_2(s) + aB_2(s)]e^{-pzw(H+H^{-1})}}{(p+p_1)(p+p_2)(s - iv^{-1})}\right\}ds$$

Здесь введены обозначения

$$A_1 = \eta R_0 + 2\delta\eta(3\delta+\eta),\ B_1 = 2\delta\eta(1-\eta\delta)$$
$$A_2 = \eta R_0 + (2\zeta^2+1)(3\delta+\eta),\ B_2 = (2\zeta^2+1)(1-\eta\delta)$$

Первый интеграл берется по отрезку мнимой оси, где $\zeta = iw$, второй — по кривой, на которой

$$\zeta = H^{-1}\sqrt{w_n^2 - w_{0n}^2} + iw_n \equiv s, \qquad ds = \left(\frac{w_n}{H\,(w_n^2 - w_{0n}^2)^{1/2}} + i\right)dw$$

$$p_{1,2} = a\,\{3\delta + \eta \pm [(3\delta + \eta)^2 - 12\,(\delta\eta - x^2)\,R_0]^{1/2}\}\,(2R_0)^{-1}$$

Пути интегрирования указаны на фигуре. Кривым $(AB)_n$ и $(DC)_n$ отвечают два значения $\varkappa = 1,\ ^1/_3$. Аналогично записывается выражение, входящее в вертикальное смещение.

Применяя к (3.3) таблицу обратных преобразований Лапласа, получим

$$\begin{aligned} (3.4)\qquad u_{xa} = {} & \frac{a\,\mathrm{Im}}{2\pi\varepsilon R_0^2\,(p_1 - p_2)} \sum_{n=1}^{2} \int_0^{w_{0n}} \left\{ \frac{A_1(iw)}{\zeta - iv^{-1}} \sum_{k=1}^{2} \frac{1 - \exp\left[-p_k\left(t - \frac{wx - \eta z}{v}\right)\right]}{p_k} \times \right. \\ & \times (-1)^{k-1} + \frac{aB_1(iw)}{\zeta - iv^{-1}} \sum_{k=1}^{2} \exp\left[-p_k\left(t - \frac{wx + \eta z}{v}\right)\right](-1)^{k-1} - \\ & - \frac{A_2(iw)}{\zeta - iv^{-1}} \sum_{k=1}^{2} \frac{1 - \exp\left[-p_k\left(t - \frac{xw + \delta z}{v}\right)\right]}{p_k} (-1)^{k-1} + \\ & \left. + \frac{aB_2}{\zeta - iv^{-1}} \sum_{k=1}^{2} \exp\left[-p_k\left(t - \frac{wx + \delta z}{w}\right)\right]\right\} dw + \frac{a\,\mathrm{Im}}{2\pi\varepsilon R_0^2\,(p_1 - p_2)} \times \\ & \times \sum_{n=1}^{2} \int_{w_{0n}}^{\infty} \left\{ \frac{A_1(s)}{s - iv^{-1}} \sum_{k=1}^{2} \frac{1 - \exp\left[-p_k\left(t - \frac{zw\,(H + H^{-1})}{v}\right)\right]}{p_k} (-1)^{k-1} + \right. \\ & + \frac{aB_1(s)}{s - iv^{-1}} \sum_{k=1}^{2} \exp\left[-p_k\left(t - \frac{zw\,(H + H^{-1})}{v}\right)\right](-1)^{k-1} - \\ & - \frac{A_2(s)}{s - iv^{-1}} \sum_{k=1}^{2} \frac{1 - \exp\left[p_k\left(t - \frac{wz\,(H + H)^{-1}}{v}\right)\right]}{p_k\,(-1)^{k-1}} - \\ & \left. - a\,\frac{B_2}{s - iv^{-1}} \sum_{k=1}^{2} \exp\left[-p_k\left(t - \frac{wz\,(H + H^{-1})}{v}\right)\right](-1)^{k-1}\right\} ds \end{aligned}$$

Выражение (3.4) содержит два вида слагаемых, изменения которых со временем качественно отличаются. Часть слагаемых с течением времени убывает. Вторая часть слагаемых стремится к постоянной величине при $t \to \infty$ и определяет статическую часть смещения.

Поступила 3 VI 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Sneedon I. N.* The Stress produced by a pulse of pressure moving along the surface of a semi-infinite solid. Rend. Circ. Mat. Palermo, 1952, t. 2, No. 1, pp. 57—62.
2. *Radok J. R. M.* Problems of plane elasticity for reinforced boundaries. J. Appl. Mech., 1955, vol. 22, No. 2, pp. 249—254.
3. *Гольдштейн Р. В.* Волны Рэлея и резонансные явления в упругих телах. ПММ, 1965, т. 29, вып. 3.
4. *Hook J. F.* Separation of the vector wave equation of elasticity for certain types of inhomogeneous, isotropic midia. J. Acoust. Soc. America, 1961, vol. 33, No. 3, pp. 302—313.