Полученные результаты позволяют вывести формулы для расчета усредненных характеристик сеток, тканей и т. п. Отметим, что для указанных материалов эффективно применение аппроксимационного метода решения ячеечных задач [7—10].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Санчес-Паленсия Э.** Неоднородные среды и теория колебаний.— М.: Мир, 1984.
2. **Каламкаров А. Л., Кудрявцев Б. А., Партон В. З.** Асимптотический метод осреднения в механике композитов регулярной структуры // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела.— М.: ВИНИТИ, 1987.— Т. 19.
3. **Gaillerie D.** Thin elastic and periodic plates // Math. Meth. Appl. Sci.— 1984.— N 6.
4. **Дюво Г., Лионс Ж.-Л.** Неравенства в механике и физике.— М.: Мир, 1980.
5. **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого твердого тела.— М.: Наука, 1979.
6. **Панасенко Г. П.** Осреднение системы уравнений теории упругости для неоднородной пластины // УМН.— 1985.— Т. 40, № 5.
7. **Колпаков А. Г.** К определению усредненных характеристик упругих каркасов // ПММ.— 1985.— Т. 49, вып. 6.
8. **Kolpakov A. G.** Mechanics of composite frameworks // Шести национален конгресс по теоретична и приложна механика. Резюмета.— Варна, 1989.
9. **Annin B. D., Kalamkarov A. L., Kolpakov A. G.** Analysis of local stresses in high modulus fiber composites // Localized Damage Computer—Aided Assessment and Control.— Southampton: Comput. Mech. Publ., 1990.— V. 2.
10. **Kolpakov A. G.** On dependence of velocity of elastic waves in composite media on initial stresses // IInd World Congr. on Computational Mechanics, Stuttgart, 1990: Extended Abstracts of Lectures.

г. Новосибирск *Поступила 10/V 1990 г.*

УДК 534.11+539.4

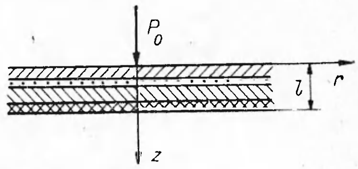
К. С. Адамова, М. А. Каниболотский

ОПТИМИЗАЦИЯ СТРУКТУРЫ ВИБРОИЗОЛИРУЮЩЕГО ЭКРАНА ПРИ ДЕЙСТВИИ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ

При падении волны на границу раздела сред с различными физико-механическими свойствами в слоистой среде возникает система отраженных и преломленных волн. Меняя количество, размеры и материалы слоев, можно управлять интенсивностью спектра волнового процесса. Естественно, возникает задача оптимизации структуры слоистой среды при различных критериях оптимизации и ограничениях на характеристики волнового процесса. В ряде работ [1—5] рассматривались вопросы оптимизации структуры многослойных звукоотражающих экранов, причем материалы слоев могли выбираться из заданного конечного набора. Исследовались случаи как нормального, так и наклонного падения плоской акустической волны. Если число и последовательность расположения материалов слоев заранее не заданы, то задача оптимизации формулируется в рамках теории оптимального управления. Для вывода необходимых условий оптимальности и построения алгоритма численных расчетов использовался принцип максимума Понтрягина и аппарат игольчатого варьирования. Эти методы, обобщенные в [5], применялись также при оптимальном проектировании свободноколеблющейся слоистой толстостенной сферы минимальной массы [6], в ряде задач статической термоупругости толстостенных сферических сосудов [7, 8], при проектировании слоистой теплозащиты [5, 9, 10] и волновых электромагнитных фильтров [2]. Во всех упомянутых работах спектральные характеристики волнового процесса зависели от одной пространственной переменной и описывались обыкновенными дифференциальными уравнениями.

В настоящей работе исследуется процесс установившихся колебаний плоского упругослоистого экрана, жестко сцепленного с упругим полупространством, под действием гармонической сосредоточенной силы. Требуется оптимизировать структуру слоистого экрана из условия минимизации суммарного потока мощности волновой энергии в упругое полупространство. Спектральные характеристики волнового процесса будут зависеть от двух пространственных переменных и описываться уравнениями в частных производных. Применяя интегральное преобразование Ханкеля [11] по радиальной координате, удается сформулировать соответствующую задачу оптимизации для изображений, которые описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Получены необходимые условия оптимальности, предложен алгоритм и приведены примеры численных расчетов.

1. Постановка задачи. Рассмотрим установившиеся колебания упругослоистого экрана толщины $l > 0$, жестко сцепленного с упругим полупространством $z > l$, под действием гармонической сосредоточенной силы (см. рисунок). Требуется из конечного набора упругих материалов синтезировать слоистый экран, занимающий область $0 \leqslant z \leqslant l$, при котором суммарный поток вектора мощности, прошедший в полупространство $z > l$, был бы минимальным. Формулировка этой задачи оптимизации в терминах теории оптимального управления предполагает описание, во-первых, управляемой системы, во-вторых, множества управляющих переменных и, в-третьих, функционалов, входящих в критерий минимизации и ограничения.



Роль управляемой системы играют уравнения физического процесса, в данном случае уравнения установившихся колебаний слоистого полупространства. В цилиндрической системе координат при $r > 0$, $0 \leqslant z < \infty$ эти уравнения для осевой симметрии имеют вид [11] (множитель $\exp(i\omega t)$ опущен)

$$\text{(1.1)} \qquad \frac{\partial G^+}{\partial r} + \frac{\partial \Gamma^+}{\partial z} + \frac{2\mu}{\lambda}\frac{\partial}{\partial r}\left(G^- - 2\mu\frac{\partial U_z}{\partial z}\right) + \rho\omega^2 U_r = 0,$$

$$\frac{\partial G^+}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\lambda r\Gamma^+) + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\Gamma^-) + \rho\omega^2 U_z = 0,$$

где $$G^{\pm} = 2\mu\frac{\partial U_z}{\partial z} + \lambda\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rU_r) \pm \frac{\partial U_z}{\partial z}\right]; \quad \Gamma^{\pm} = \mu\left(\frac{\partial U_r}{\partial z} \pm \frac{\partial U_z}{\partial r}\right).$$

Условия на границах слоев при $z > 0$ вытекают из требований непрерывности комплексных амплитуд компонент U_r и U_z вектора смещений и непрерывности нормальной $\sigma_{zz} = G^+$ и касательной $\sigma_{zr} = \Gamma^+$ компонент тензора напряжений:

$$\text{(1.2)} \qquad [U_r] = [U_z] = [G^+] = [\Gamma^+] = 0.$$

Так как рассматривается поверхностный источник типа нормальной сосредоточенной силы $\operatorname{Re}[f(r)\exp(i\omega t)]$, то граничные условия при $z = 0$ запишем в форме [11]

$$\text{(1.3)} \qquad G^+(r, 0) = f(r) = \frac{P_0}{2\pi}\frac{\delta(r)}{r}, \quad \Gamma^+(r, 0) = 0.$$

Коэффициенты Ламе λ и μ в (1.1) — кусочно-постоянные функции координаты z. Краевая задача (1.1)—(1.3) дополняется условием излучения на бесконечности [12].

В задаче множеством управляющих переменных служит множество всевозможных слоистых структур толщины l, которые можно составить из имеющегося набора исходных материалов. Для описания этого множества поступим следующим образом. Поставим в соответствие каждому материалу его порядковый номер, под которым он расположен в заданном наборе. Введем характеристическую функцию слоистой среды $u(z)$, которая в каждой точке $z \in [0, l]$ принимает целочисленное значение, равное этому порядковому номеру материала, находящегося в данной точке. Функция $u(z)$ принадлежит классу кусочно-постоянных функций

$$\text{(1.4)} \qquad u(z) = \{u_s | z_s < z \leqslant z_{s+1}\}, \; s = 1, \ldots, I; \; z_1 = 0, \; z_{I+1} = l,$$

область значений которых состоит из целых чисел от 1 до m

$$\text{(1.5)} \qquad u_s \in \{1, \ldots, m\} = \Lambda,$$

где z_s ($s = 2, \ldots, I$) — границы раздела между слоями; I — число слоев; m — число исходных материалов. Так как между множеством слоистых структур и множеством функций $u(z)$ можно установить взаимно однозначное соответствие, то в качестве управления выбираем характеристическую функцию слоистой среды (1.4), (1.5). Задание $u(z)$ однозначно определяет количество, размеры и порядок расположения материалов слоев. Очевидно, $\lambda = \lambda[u(z)]$, $\mu = \mu[u(z)]$, $\rho = \rho[u(z)]$.

В качестве минимизируемой величины рассматривается суммарный поток вектора мощности через плоскость $z = l$ [12]:

$$(1.6)\qquad F(u) = \pi\omega \int_0^\infty r \operatorname{Im}[\sigma_{zz}(r, l)\overline{U}_z(r, l) + \sigma_{zr}(r, l)\overline{U}_r(r, l)]\, dr$$

(черта означает комплексную сопряженность).

Математически задача оптимизации формулируется следующим образом: среди функций (1.4), (1.5), заданных на отрезке $[0, l]$, найти функцию $u^{\text{opt}}(z)$, минимизирующую функционал (1.6); входящие в него функции $U_r(r, z)$, $U_z(r, z)$, $\sigma_{zr}(r, z)$ и $\sigma_{zz}(r, z)$ определяются из решения краевой задачи (1.1)—(1.3).

2. Приведение задачи (1.1)—(1.6) к канонической задаче оптимального управления. Известно, что трудоемкость решения задач оптимизации резко возрастает с увеличением числа независимых переменных. С другой стороны, искомое управление $u(z)$ зависит только от одной пространственной переменной z. Естественно попытаться с помощью интегрального преобразования Ханкеля «свернуть» радиальную координату r и получить вместо (1.1)—(1.3) систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно изображений исходных зависимых переменных. Представляя решение U_r, U_z в виде

$$(2.1)\qquad U_r(r, z) = \int_0^\infty J_1(\alpha r) P(\alpha, z)\, d\alpha,\quad U_z(r, z) = \int_0^\infty J_0(\alpha r) S(\alpha, z)\, d\alpha$$

(J_0, J_1 — функции Бесселя) и подставив в (1.1), получим для изображений P и S систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка [11]:

$$(2.2)\qquad \begin{gathered}[\mu(P' - \alpha S)]' - \alpha\lambda S' - (\lambda + 2\mu)\eta^2 P = 0,\\ [(\lambda + 2\mu)S' + \lambda\alpha P]' + \alpha\mu P' - \mu\xi^2 S = 0.\end{gathered}$$

Здесь $\eta^2 = \alpha^2 - K_P^2$; $\xi^2 = \alpha^2 - K_S^2$; $K_p = \omega/[(\lambda + 2\mu)/\rho]^{1/2}$; $K_s = \omega/(\mu/\rho)^{1/2}$; штрих означает дифференцирование по z. В результате преобразования (1.3) находим при $z = 0$ граничные условия для изображений P и S:

$$(2.3)\qquad \begin{gathered}(\lambda + 2\mu)S' + \alpha\lambda P = f_0,\ P' - \alpha S = 0,\ z = 0\\ \left(f_0(\alpha) = \alpha \int_0^\infty J_0(\alpha r) f(r) r\, dr = P_0\alpha/(4\pi)\right).\end{gathered}$$

Введем новые переменные $y_1 = -P/\alpha^2$, $y_2 = S/\alpha$, $y_3 = -\mu(P' - \alpha S)/\alpha^2$, $y_4 = [(\lambda + 2\mu)S' + \alpha\lambda P]/\alpha$, которые в силу (1.2) остаются непрерывными при переходе через границы раздела слоев. Из (2.2), (2.3) следует, что вектор $\mathbf{y} = \{y_1, \ldots, y_4\}$ удовлетворяет системе первого порядка

$$(2.4)\qquad \mathbf{y}'(\alpha, z) = A(\alpha, u)\mathbf{y}(\alpha, z);$$

$$(2.5)\qquad y_3(\alpha, 0) = 0,\ y_4(\alpha, 0) = P_0/(4\pi),$$

где $A = \|a_{ij}\|$ $(i, j = 1, \ldots, 4)$; $a_{11} = a_{14} = a_{22} = a_{23} = a_{32} = a_{33} = a_{41} = a_{44} = 0$; $a_{12} = -1$; $a_{13} = \mu^{-1}$; $a_{21} = \alpha^2\lambda(\lambda + 2\mu)^{-1}$; $a_{24} = (\lambda + 2\mu)^{-1}$; $a_{31} = (\lambda + 2\mu)\eta^2 - (\alpha\lambda)^2(\lambda + 2\mu)^{-1}$; $a_{34} = -\lambda(\lambda + 2\mu)^{-1}$; $a_{42} = -\mu(\alpha^2 - \xi^2)$; $a_{43} = \alpha^2$. Система (2.4) в силу непрерывности вектора $\mathbf{y}$ справедлива на всем полубесконечном интервале $0 \leqslant z < \infty$. Для ее замыкания граничные условия при $z = 0$ дополним условиями излучения на бесконечности. Уравнения (2.4) обладают следующими свойствами: 1) элементы матрицы A определены при $z \geqslant 0$, зависят от исходного управления $u(z)$ и являются кусочно-постоянными функциями; 2) (2.4) определяет однопараметрическое семейство решений, зависящее от параметра преобразования α. С помощью приема, описанного в [5], влияние полупространства $z > l$ на волновую картину в слоистом экране $0 \leqslant \leqslant z \leqslant l$ можно свести к двум граничным условиям при $z = l$. Запишем решение системы (2.4) в области $z > l$. Вид решения будет различным в зависимости от того, какой из трех областей принадлежит параметр α: $0 \leqslant \alpha < K_P$, либо $K_P \leqslant \alpha < K_S$, либо $K_S \leqslant \alpha < \infty$. Например, для первого случая

$$(2.6)\qquad \begin{aligned} y_1(\alpha, z) &= A_P \exp[i\gamma_1(z-l)] + i\gamma_2 A_S \exp[i\gamma_2(z-l)],\\ y_2(\alpha, z) &= i\gamma_1 A_P \exp[i\gamma_1(z-l)] + \alpha^2 A_S \exp[i\gamma_2(z-l)],\\ y_3(\alpha, z) &= \mu\{2i\gamma_1 A_P \exp[i\gamma_1(z-l)] + \beta A_S \exp[i\gamma_2(z-l)]\},\\ y_4(\alpha, z) &= \mu\{\beta A_P \exp[i\gamma_1(z-l)] + 2i\alpha^2\gamma_2 A_S \exp[i\gamma_2(z-l)]\}. \end{aligned}$$

Здесь $\gamma_1^2 = K_P^2 - \alpha^2$; $\gamma_2^2 = K_S^2 - \alpha^2$; $\beta = 2\alpha^2 - K_S^2$; A_P, A_S — неизвестные произвольные постоянные. Решение в виде (2.6) обеспечивает выполнение условий излучения на бесконечности. Если решение (2.6) записать при $z = l$, выразить из первых двух уравнений A_P, A_S и подставить их в третье и четвертое уравнения, то можно получить граничные условия

$$(2.7)\qquad \begin{aligned} y_3(\alpha, l) &= g_{11} y_1(\alpha, l) + g_{12} y_2(\alpha, l),\\ y_4(\alpha, l) &= g_{21} y_1(\alpha, l) + g_{22} y_2(\alpha, l), \end{aligned}$$

где $g_{11} = i\mu\gamma_1 K_S^2\Delta$; $g_{12} = \mu(\beta + 2\gamma_1\gamma_2)\Delta$; $g_{21} = \alpha^2 g_{12}$; $g_{22} = i\mu\gamma_2 K_S^2\Delta$; $\Delta = (\alpha^2 + \gamma_1\gamma_2)^{-1}$. При $K_P \leqslant \alpha < K_S$ граничные условия при $z = l$ имеют тот же вид (2.7), но со следующими значениями g_{ij} $(i, j = 1, 2)$: $g_{11} = -i\mu\eta K_S^2\Delta_1$, $g_{12} = \mu(\beta + 2i\gamma_1\eta)\Delta_1$, $g_{21} = \alpha^2 g_{12}$, $g_{22} = i\mu\gamma_1 K_S^2\Delta_1$, $\Delta_1 = (\alpha^2 + i\gamma_1\eta)^{-1}$. Как видно из дальнейшего, решения (2.4) для $\alpha > K_S$ не потребуются. Таким образом, значение $\mathrm{y}(\alpha, z)$ на отрезке $0 \leqslant z \leqslant l$ находится из решения краевой задачи (2.4), (2.5), (2.7).

Чтобы окончательно сформулировать задачу оптимизации в терминах изображений, выразим через них минимизируемый функционал (1.6). Для этого надо по формулам обращения записать значения исходных величин

$$(2.8)\qquad \begin{aligned} U_r(r, z) &= -\int_0^\infty \alpha^2 J_1(\alpha r)\, y_1(\alpha, z)\, d\alpha, \quad U_z(r, z) = \int_0^\infty \alpha J_0(\alpha r)\, y_2(\alpha, z)\, d\alpha,\\ \sigma_{zr}(r, z) &= -\int_0^\infty \alpha^2 J_0(\alpha r)\, y_3(\alpha, z)\, d\alpha, \quad \sigma_{zz}(r, z) = \int_0^\infty \alpha J_0(\alpha r)\, y_4(\alpha, z)\, d\alpha \end{aligned}$$

и подставить их в интеграл (1.6). Тогда с учетом равенства Парсеваля минимизируемый функционал запишется как

$$(2.9)\qquad F(u) = \pi\omega \operatorname{Im} \int_0^\infty \alpha \left[\bar{y}_2(\alpha, l)\, y_4(\alpha, l) + \alpha^2 \bar{y}_1(\alpha, l)\, y_3(\alpha, l)\right] d\alpha.$$

Непосредственное численное интегрирование (2.8), (2.9) невозможно из-за наличия у подынтегральных функций конечного числа полюсов $\alpha_к$, являющихся нулями знаменателя Рэлея $\mathrm{R}(\alpha) = 0$ [11, 12]. Наличие полюсов связано с образованием на поверхности $z = 0$ и границах слоев волн типа Рэлея и Лява. Число полюсов и величины $\alpha_к$ зависят, вообще говоря, от структуры слоистой среды и частоты. Можно показать, что

$$\operatorname{Im} \int_{K_S^0}^\infty \alpha \left[\bar{y}_2(\alpha, l)\, y_4(\alpha, l) + \alpha^2 \bar{y}_1(\alpha, l)\, y_3(\alpha, l)\right] d\alpha = 0.$$

Здесь $K_S^0 = \omega/(\mu^0/\rho^0)^{1/2}$ — второе волновое число для упругого полупространства $z > l$. Отсюда следует, что минимизируемый функционал имеет вид определенного интеграла

$$(2.10)\qquad F(u) = \pi\omega \operatorname{Im} \int\limits_0^{K_S^0} \alpha \left[\bar{y}_2(\alpha, l)\, y_4(\alpha, l) + \alpha^2 \bar{y}_1(\alpha, l)\, y_3(\alpha, l)\right] d\alpha$$

с подынтегральной функцией, не содержащей полюсов. Окончательно исходную задачу оптимизации сформулируем в канонической понтрягинской форме: среди кусочно-постоянных функций (1.4) с целочисленной областью значений (1.5) требуется найти $u^{\text{opt}}(z)\,(0 \leqslant z \leqslant l)$, минимизирующую функционал (2.10). Входящие в подынтегральное выражение функции $y_i(\alpha,\ l)$ $(i = 1, \ldots, 4)$ находятся при каждом $0 \leqslant \alpha \leqslant K_S^0$ из решения краевой задачи (2.4), (2.5), (2.7).

3. Необходимые условия оптимальности. Для вывода этих условий надо построить вариацию функционала (2.10), порожденную вариацией управления $u(z)$. Классические методы вариационного исчисления для этого неприемлемы, так как управление $u(z)$ в силу (1.5) не имеет малых в равномерной норме вариаций. Под возмущенным управлением будем понимать функцию [13]

$$(3.1)\qquad u^*(z) = \begin{cases} \vartheta; & z \in M,\ \vartheta \in \Lambda, \\ u; & z \in [0, l] \setminus M, \end{cases}$$

где $M \subset [0,\ l]$ — множество малой меры; $\operatorname{mes} M = \varepsilon \ll l$; $\varepsilon > 0$ — малая величина первого порядка. Главное приращение функционала (2.10), порождаемое игольчатой вариацией $\{M,\ \hat{\vartheta}\}$, имеет вид [13]

$$(3.2)\qquad \delta F(M, \vartheta) = \int\limits_M [H(\mathbf{y}, \boldsymbol{\psi}, u) - H(\mathbf{y}, \boldsymbol{\psi}, \vartheta)]\, dz.$$

Функция Гамильтона

$$(3.3)\qquad H(\mathbf{y}, \boldsymbol{\psi}, u) = \operatorname{Re} \int\limits_0^{K_S^0} \left[\frac{1}{\mu} y_3\psi_1 + \frac{1}{\lambda + 2\mu} y_4\psi_2 + \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} (y_4\psi_3 - \right.$$
$$- \alpha^2 y_1\psi_2) - \rho\omega^2 (y_1\psi_3 + y_2\psi_4) + \alpha^2 \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} y_1\psi_3 +$$
$$\left. + \alpha^2 (y_1\psi_3 + y_3\psi_4) - (y_2\psi_1 + y_4\psi_3)\right] d\alpha.$$

Сопряженная вектор-функция $\boldsymbol{\psi} = \{\psi_i\}$ $(i = 1, \ldots, 4)$ находится из решения сопряженной краевой задачи

$$(3.4)\qquad \boldsymbol{\psi}'(\alpha,\ z) = -A^*(\alpha,\ u)\boldsymbol{\psi}(\alpha,\ z),$$
$$\psi_1(\alpha,\ 0) = 0,\ \ \psi_1(\alpha,\ l) + g_{11}\psi_3(\alpha,\ l) + g_{21}\psi_4(\alpha,\ l) = 2\pi\omega\alpha^3 Q_1,$$
$$\psi_2(\alpha,\ 0) = 0,\ \ \psi_2(\alpha,\ l) + g_{12}\psi_3(\alpha,\ l) + g_{22}\psi_4(\alpha,\ l) = 2\pi\omega\alpha Q_2.$$

Здесь

$$Q_1 = \begin{cases} \operatorname{Im}(g_{11})\, \bar{y}_1(\alpha, l), & 0 \leqslant \alpha \leqslant K_P^0, \\ \operatorname{Im}(g_{11})\, \bar{y}_1(\alpha, l) + \operatorname{Im}(g_{12})\, \bar{y}_2(\alpha, l), & K_P^0 < \alpha \leqslant K_S^0; \end{cases}$$

$$Q_2 = \begin{cases} \operatorname{Im}(g_{22})\, \bar{y}_2(\alpha, l), & 0 \leqslant \alpha \leqslant K_P^0, \\ \operatorname{Im}(g_{21})\, \bar{y}_1(\alpha, l) + \operatorname{Im}(g_{22})\, \bar{y}_2(\alpha, l), & K_P^0 < \alpha \leqslant K_S^0. \end{cases}$$

Если $u(z) = u^{\text{opt}}(z)$, то $\delta F \geqslant 0$ для всех M и $\vartheta \in \Lambda$. Отсюда вытекают необходимые условия оптимальности в виде принципа максимума Понтрягина: пусть $u^{\text{opt}}(z)$— оптимальное управление, минимизирующее функционал (2.10), а $\mathbf{y}(\alpha, z)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant K_S^0$, $0 \leqslant z \leqslant l$ — соответствующее семейство решений краевой задачи (2.4), (2.5), (2.7). Тогда существует семейство решений $\boldsymbol{\psi}(\alpha,\ z)$ сопряженной краевой задачи (3.4) такое, что построенная с ее помощью функция Гамильтона (3.3) достигает своего максимального значения по аргументу u на оптимальном управлении почти при всех $z \in [0, l]$:

$$H\left(\mathbf{y}, \boldsymbol{\psi}, u^{\mathrm{opt}}\right) = \max_{u\in\Lambda} H(\mathbf{y}, \boldsymbol{\psi}, u). \tag{3.5}$$

4. Вычислительный алгоритм. Вычислительная процедура нахождения оптимального решения состоит в построении минимизирующей последовательности управлений $u^n(z)$, $n = 1, 2, \ldots$ Переход к следующему приближению состоит в таком выборе множества малой меры M и значения $\vartheta \in \Lambda$ на этом множестве, при которых возмущенное управление (3.1) уменьшает функционал (2.10). Существует несколько алгоритмов построения минимизирующей последовательности, которые отличаются друг от друга способом задания множества M. Приведем один из наиболее эффективных [14]. Пусть известны текущее приближение $u^n(z)$ и соответствующие решения $\mathbf{y}^n(\alpha, z)$ и $\boldsymbol{\psi}^n(\alpha, z)$ прямой и сопряженной задач. Разобьем отрезок $[0, l]$ на достаточно большое число равных интервалов $\Delta z_i = l/N = \Delta z$ $(i = 1, \ldots, N)$, $\Delta z_i = z_{i+1} - z_i$. Определим $\widehat{u}(z)$ и $w(\widehat{u}, z)$:

$$\widehat{u}(z) = \arg\max_{u\in\Lambda} H\left(\mathbf{y}^n, \boldsymbol{\psi}^n, u\right),$$

$$w(\widehat{u}, z) = H(\mathbf{y}^n, \boldsymbol{\psi}^n, \widehat{u}) - H(\mathbf{y}^n, \boldsymbol{\psi}^n, u^n) \geqslant 0.$$

Очевидно, что вариацию функционала (3.2) можно записать как

$$\delta F = -\int_M w(\widehat{u}, z)\, dz \leqslant 0.$$

Если u^n неоптимально, то можно найти достаточно малое M, при котором вариация δF станет меньше нуля. Для того чтобы выбрать множество M наилучшим способом, поступим следующим образом. Обозначим $w_i = w[\widehat{u}(z_i + \Delta z/2),\ z_i + \Delta z/2]$ $(i = 1, \ldots, N)$. Расположим величины w_i по мере их убывания. В результате получим набор $w_{j_k}, k = 1, \ldots, N\left(w_{j_{k+1}} \leqslant w_{j_k}\right)$, где j_k обозначает номер интервала. Образуем множества M_i $(i = 1, \ldots, N)$ по правилу

$$M_i = \bigcup_{k=1}^{i} \Delta z_{j_k}$$

(очевидно, $\operatorname{mes} M_1 = \Delta z$, $\operatorname{mes} M_N = l$) и введем

$$u_i^n(z) = \begin{cases} \widehat{u}; & z \in M_i, \\ u^n, & z \notin M_i. \end{cases}$$

Обозначим $i^0 = \arg\min\limits_i F\left(u_i^n\right)$. Тогда $u^{n+1}(z) = u_{i^0}^n(z)$. Выберем в качестве нового управления $u^{n+1}(z)$. Вычислим для него соответствующие $\mathbf{y}^{n+1}$, $\boldsymbol{\psi}^{n+1}$, построим новые функции Гамильтона, $\widehat{u}$ и w и т. д. Процесс оканчивается, когда $w_i = 0$, $i = 1, \ldots, N$. Это условие эквивалентно выполнению (3.5).

5. Примеры расчетов. Из материалов, приведенных в таблице, требуется синтезировать неоднородный экран общей толщины $l = 0{,}1$ м, минимизирующий суммарный поток вектора мощности, прошедший в упругое полупространство $z > l$, от воздействия гармонической сосредоточенной силы единичной амплитуды и частоты $\omega = 2\pi\ 2000$ Гц. Свойства упругого полупространства заданы: $\lambda = 10{,}66 \cdot 10^9$ Н/м^2, $\mu = 1{,}83 \times 10^9$ Н/м^2, $\rho = 917$ кг/м^3. Интервал $\left[0, K_S^0\right]$ интегрирования по α при вычислении функции Гамильтона (3.3) разбивался на 10, 15 и 20 частей, а интеграл заменялся соответствующими частичными суммами. При указанных разбиениях значения оценочного функционала различались не более чем на 2 %. В результате расчетов оптимальным оказался двухслойный экран: первый слой толщины $2{,}4 \cdot 10^{-2}$ м из первого материала

Номер материала	$\mu\cdot10^{-10}$	$\lambda\cdot10^{-10}$	$\rho\cdot10^{-3}$	Номер материала	$\mu\cdot10^{-10}$	$\lambda\cdot10^{-10}$	$\rho\cdot10^{-3}$
1	0,145	1,15	1,20	4	2,50	16,00	2,70
2	2,50	12,22	2,30	5	2,66	14,80	2,50
3	3,90	16,6	2,65	6	2,73	12,30	2,21

и второй толщины $7{,}6\cdot10^{-2}$ м из четвертого. Эффективность оптимального экрана оценивается величиной $\theta = F^{\text{opt}}/F_0$, где F^{opt} — суммарный поток вектора мощности в полупространство $z > l$ в направлении оси z при наличии оптимального экрана, F_0 — при отсутствии экрана. Для вычисленного примера $\theta = 0{,}268$. Если в приведенном примере сосредоточенная сила действует с частотой $\omega = 2\pi\ 5000$ Гц, то оптимальный экран состоит из четырех слоев: первый $1{,}6\cdot10^{-2}$ м из первого материала, второй $2{,}5\cdot10^{-2}$ м из четвертого, третий $4{,}4\cdot10^{-2}$ м из третьего, четвертый $1{,}5\cdot10^{-2}$ м из четвертого материала. Эффективность этого экрана равна $\theta = 0{,}099$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бабе Г. Д., Гусев Е. Л.** Численный метод оптимизации интерференционных фильтров // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Материалы VIII науч. конф.— Новосибирск: Наука, 1984.
2. **Бабе Г. Д., Гусев Е. Л.** Математические методы оптимизации интерференционных фильтров.— Новосибирск: Наука, 1987.
3. **Адамова К. С., Каниболотский М. А., Яковлева Л. П.** Минимизация толщины звукозащитного слоя // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук.— 1987.— № 18, вып. 5.
4. **Адамова К. С., Каниболотский М. А., Яковлева Л. П.** Оптимизация структуры звукозащитной панели при наклонном падении плоской волны // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук.— 1988.— № 19, вып. 1.
5. **Каниболотский М. А., Уржумцев Ю. С.** Оптимальное проектирование слоистых конструкций.— Новосибирск: Наука, 1989.
6. **Алехин В. В.** Оптимизация слоистых тел при ограничении на основную частоту собственных колебаний // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики.— 1984.— Вып. 66.
7. **Алехин В. В., Аннин Б. Д., Колпаков А. Г.** Синтез слоистых материалов и конструкций.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1988.
8. **Алехин В. В., Аннин Б. Д.** Оптимизация термоупругих слоистых тел // ПМТФ.— 1989.— № 2.
9. **Бабе Г. Д., Каниболотский М. А., Уржумцев Ю. С.** Оптимизация многослойных конструкций, подверженных периодическим температурным воздействиям // ДАН СССР.— 1983.— Т. 269, № 2.
10. **Адамова К. С., Каниболотский М. А., Яковлева Л. П.** Минимизация массы цилиндрически-слоистой теплозащитной оболочки // ИФЖ.— 1987.— Т. 53, № 4.
11. **Аккуратов Г. В., Дмитриев В. И.** Метод расчета поля установившихся упругих колебаний в слоистой среде // ЖВММФ.— 1984.— Т. 24, № 2.
12. **Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф.** Динамика неоднородных линейно-упругих сред.— М.: Наука, 1989.
13. **Федоренко Р. П.** Приближенное решение задач оптимального управления.— М.: Наука, 1978.
14. **Срочко В. А., Хамидуллин Р. Г.** Об оптимальном способе варьирования управлений в методах фазовой линеаризации // Вопросы оптимального управления и исследования операций.— Иркутск: Изд-во Иркутск. ун-та, 1988.

г. Якутск *Поступила 26/IV 1990 г.*

УДК 539.374

О. А. Волоховская, В. В. Подалков

О ПЛАСТИЧЕСКОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ ИЗОТРОПНО УПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ ПОЛИКРИСТАЛЛИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

Известно, что особенности упругопластического поведения металлов определяются их поликристаллической структурой. Поэтому вывод уравнения деформирования поликристалла должен основываться на рассмотрении происходящих в его зернах процессов. Экспериментально установлено, что при умеренных температурах пласти-