

УДК 539.3(4):517.958:517.956.227

ЛАКУНА В НЕПРЕРЫВНОМ СПЕКТРЕ УПРУГОГО ВОЛНОВОДА С ЧАСТИЧНО ЗАЩЕМЛЕННОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

С. А. Назаров

Институт проблем машиноведения РАН, 199178 Санкт-Петербург
E-mail: serna@snark.ipme.ru

Построен периодический упругий волновод, в непрерывном спектре которого имеется лагуна — интервал, который может содержать лишь дискретный спектр. Лагуна препятствует распространению волн в соответствующем частотном диапазоне, что позволяет использовать ее при проектировании фильтров и демпферов упругих волн.

Ключевые слова: упругий волновод, лагуна, непрерывный спектр.

1. Постановка задачи. Пусть Π — периодический упругий волновод из анизотропного неоднородного материала с ограниченной ячейкой периодичности ϖ , расположенной в слое $\{x = (x_1, x'): x_1 \in (0, l), x' = (x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2\}$ (рис. 1). Масштабированием сведем размер l ячейки к единичному и введем ее целочисленные сдвиги

$$\varpi_j = \{x: (x_1 - j, x') \in \varpi\}. \quad (1.1)$$

Внутренность объединения замыканий ячеек

$$\bar{\Pi} = \bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} \bar{\varpi}_j \quad (1.2)$$

будем считать областью с липшицевой границей $\partial\Pi$, в частности связным множеством. Боковую поверхность $\gamma^0 = \{x \in \partial\varpi: x_1 \in (0, 1)\}$ ячейки представим как объединение поверхностей γ^σ и γ^u , а затем введем периодические множества Γ^σ и Γ^u , используя равенства, аналогичные (1.1), (1.2). Предположим, что граница Γ^σ свободна от внешних нагрузок,

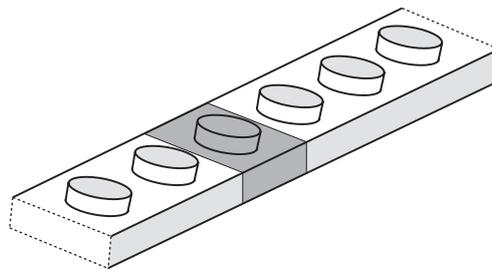


Рис. 1. Периодический волновод (заштрихованная область — ячейка периодического волновода)

а граница Γ^u жестко зашкреплена. В данной работе рассматривается случай, когда и γ^u , и γ^σ имеют положительную площадь. Форма ячейки и представление $\gamma^\sigma \cup \gamma^u$ ее боковой поверхности будут определены в п. 5.

Используем матричную форму записи [1, 2] определяющих соотношений трехмерной анизотропной теории упругости, а именно: в фиксированной декартовой системе координат x вектор смещений $u(x)$ интерпретируем как столбец $(u_1(x), u_2(x), u_3(x))^T$ ("Т" — знак транспонирования). Столбец деформаций

$$\varepsilon = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \sqrt{2} \varepsilon_{23}, \sqrt{2} \varepsilon_{31}, \sqrt{2} \varepsilon_{12})^T \quad (1.3)$$

находится по формуле $\varepsilon(u; x) = D(\nabla_x)u(x)$, где

$$\nabla_x = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)^T, \quad \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, 3,$$

$$D(\nabla_x)^T = \begin{pmatrix} \partial_1 & 0 & 0 & 0 & 2^{-1/2} \partial_3 & -2^{-1/2} \partial_2 \\ 0 & \partial_2 & 0 & -2^{-1/2} \partial_3 & 0 & 2^{-1/2} \partial_1 \\ 0 & 0 & \partial_3 & 2^{-1/2} \partial_2 & -2^{-1/2} \partial_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Отметим, что множители $\sqrt{2}$ введены в формулы (1.3) и (1.4) для того, чтобы уравнять естественные нормы тензоров и изображающих их столбцов. После постановки этих множителей [2] ортогональным преобразованиям системы координат соответствуют ортогональные преобразования столбца деформаций $\varepsilon(u)$ и аналогичного столбца напряжений $\sigma(u)$ с шестью компонентами, который определяется согласно закону Гука:

$$\sigma(u; x) = A(x)\varepsilon(u; x).$$

При этом A — симметрическая (6×6) -матрица упругих моделей, измеримая и удовлетворяющая условию положительности и ограниченности при почти всех $x \in \Pi$:

$$c_A |a|^2 \leq a^T A(x)a \leq C_A |a|^2, \quad a \in \mathbb{R}^6, \quad C_A \geq c_A > 0. \quad (1.5)$$

Упругие волны в периодическом цилиндре Π описываются с помощью следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned} D(-\nabla_x)^T A(x) D(\nabla_x) u(x) &= \lambda \rho(x) u(x), & x \in \Pi, \\ D(n(x))^T A(x) D(\nabla_x) u(x) &= 0, & x \in \Gamma^\sigma, \quad u(x) = 0, \quad x \in \Gamma^u. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь $n = (n_1, n_2, n_3)^T$ — единичный вектор (столбец) внешней нормали (вследствие липшицевости поверхности он определен при почти всех $x \in \partial\Pi$); λ — спектральный параметр (квадрат частоты); ρ — плотность материала, т. е. измеримая функция, удовлетворяющая условию положительности и ограниченности

$$0 < c_\rho \leq \rho(x) \leq C_\rho \quad (1.7)$$

при почти всех $x \in \Pi$. В окрестности бесконечности физические характеристики волновода незначительно отличаются от периодических, а именно справедливо неравенство

$$|A(x) - A^0(x)| + |\rho(x) - \rho_0(x)| \leq c \exp(-\delta_0 |z|), \quad \delta_0 > 0,$$

где A^0 , ρ_0 — матрица и скаляр, 1-периодически зависящие от продольной переменной x_1 и наследующие все свойства A и ρ .

Результаты данной работы сохраняют силу при любом возмущении тела в ограниченной области, но для упрощения изложения поставим задачу (1.6) для периодического

тела (1.2). Выполняя в этой задаче замены $A \mapsto A^0$ и $\rho \mapsto \rho_0$, получаем периодическую задачу

$$\begin{aligned} D(-\nabla_x)^T A^0(x) D(\nabla_x) u(x) &= \lambda \rho^0(x) u(x), & x \in \Pi, \\ D(n(x))^T A^0(x) D(\nabla_x) u(x) &= 0, & x \in \Gamma^\sigma, \\ u(x) &= 0, & x \in \Gamma^u. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Существенные спектры задач (1.6) и (1.8) совпадают (см. п. 4).

2. О непрерывном спектре и упругих волнах. В случае если Π — цилиндр $\omega \times \mathbb{R}$ (ω — ограниченная область на плоскости \mathbb{R}^2), а матрица жесткости A^0 и плотность ρ_0 не зависят от продольной переменной z , как известно, существует единственный порог λ^\dagger , при котором на полуинтервале $[0, \lambda^\dagger)$ может быть расположен лишь дискретный спектр задачи (1.6), а на луче $[\lambda^\dagger, +\infty)$ — непрерывный. Собственным числам λ_n задачи (1.6) соответствуют собственные вектор-функции, обладающие конечной упругой энергией, — так называемые ловушечные моды [3, 4], а точки λ_n могут располагаться как ниже, так и выше порога λ^\dagger (см., например, [4–13]). Если $\lambda \in [0, \lambda^\dagger)$ не является собственным числом, то неоднородная задача (1.6) однозначно разрешима в естественном энергетическом классе $H^1_0(\Pi; \Gamma^u)$ (вектор-функции из пространства Соболева $H^1(\Pi)$, обращающиеся в нуль на Γ^u). Вместе с тем в случае $\lambda \geq \lambda^\dagger$ задача в классе $H^1_0(\Pi; \Gamma^u)$ оказывается некорректной и требует постановки условий излучения на бесконечности, которые позволяют различить приходящие и уходящие волны. Иными словами, на непрерывном спектре, т. е. выше порога, возникают волновые процессы, а на резольвентном поле или дискретном спектре, в частности ниже порога, они отсутствуют.

Теория Флоке — Блоха (см., например, [14–16]) предсказывает для периодических волноводов возможность появления на непрерывном спектре лагун — интервалов, концами которых являются точки непрерывного спектра, но которые могут содержать лишь дискретный спектр задачи (1.6). Таким образом, в отличие от цилиндра $\omega \times \mathbb{R}$ у периодического упругого тела (1.2) непрерывный спектр необязательно является связным множеством, и даже выше первого порога распространение волн в некоторых частотных диапазонах невозможно. Это свойство периодических волноводов может быть использовано для разработки фильтров и демпферов упругих волн.

Отсутствие лагун не является отличительной особенностью цилиндрических тел: непрерывный спектр может быть связным и у периодического тела, например, подходящее малое возмущение границы цилиндрической упругой ячейки $\omega \times (0, 1)$ не способно открыть лагуну. Автору не известны работы, в которых лагуна найдена на непрерывном спектре периодического упругого волновода. Примеры конкретных тел с таким свойством — основной результат настоящей работы, который был сформулирован без доказательства в [17]. Следует отметить, что в предшествующих данной работе публикациях, в которых исследовалось раскрытие лагун, в основном рассматривались скалярные уравнения в неограниченном пространстве (см. [18–24]), а также система уравнений Максвелла (см. [25]).

3. Спектральная задача на ячейке. Предположив, что все данные задачи достаточно гладкие, подставим в уравнения и краевые условия (1.8) выражение для волны Флоке:

$$u(x_1, x') = \exp(i\eta x_1) U(x_1, x'). \quad (3.1)$$

Здесь i — мнимая единица; η — числовой параметр; U — вектор-функция, 1-периодическая по переменной x_1 . В результате получим следующую задачу на ячейке периодичности:

$$\begin{aligned} D(-\partial_1 - i\eta, -\partial_2, -\partial_3)^T A^0(x_1, x') D(\partial_1 + i\eta, \partial_2, \partial_3) U(x_1, x') &= \lambda \rho_0(x_1, x') U(x_1, x'), \\ (x_1, x') &\in \varpi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D(n(x_1, x'))^T A^0(x_1, x') D(\partial_1 + i\eta, \partial_2, \partial_3) U(x_1, x') &= 0, & (x_1, x') \in \gamma^\sigma, & (3.2) \\
U(x_1, x') &= 0, & (x_1, x') \in \gamma^u, & \\
U(0, x') &= U(1, x'), & \partial_1 U(0, x') &= \partial_1 U(1, x').
\end{aligned}$$

Поскольку в системе дифференциальных уравнений содержится квадрат спектрального параметра η , оператор задачи (3.2) называется квадратичным пучком. Теория голоморфных пучков представлена в [26]. В частности, из общих результатов следует, что на комплексной плоскости \mathbb{C} задача (3.2) при всех λ имеет счетный набор $\{\eta_p\}$ нормальных собственных чисел с единственной точкой сгущения на бесконечности. Наряду с парой $\{\eta, U\}$ задаче (3.2) удовлетворяют пары $\{\eta \pm 2\pi, \exp(\mp 2\pi i x_1) U\}$; иными словами, спектр задачи (3.2) инвариантен относительно сдвигов вдоль вещественной оси на расстояния $\pm 2\pi$, т. е. является периодическим множеством (подробнее об этом см. [27; 28, § 3.4]).

В работе [27] (см. также [28]) установлено, что при некотором фиксированном λ оператор неоднородной задачи (1.6) является фредгольмовым (имеет конечномерные ядро и коядро, а также замкнутый образ) в том и только том случае, если полуотрезок $[0, 2\pi)$, а значит (в силу периодичности), и вся вещественная ось $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ свободны от собственных чисел η_p пучка (3.2). Фредгольмовость оператора означает, что точка λ принадлежит либо дискретному спектру, либо резольвентному множеству (на последнем задача (1.6) однозначно разрешима).

Для того чтобы использовать указанные результаты, придадим точный смысл введенным объектам.

4. Операторная постановка задачи. Вследствие возможных иррегулярностей границы и коэффициентов решение краевой задачи (1.2) может не являться гладким, поэтому ее следует переформулировать как интегральное тождество [29]:

$$(AD(\nabla_x)u, D(\nabla_x)v)_\Pi = \lambda(\rho u, v)_\Pi, \quad v \in \overset{0}{H}^1(\Pi; \Gamma^u). \quad (4.1)$$

Здесь $(\cdot, \cdot)_\Pi$ — скалярное произведение в пространстве Лебега $L_2(\Pi)$. Снабдим пространство Соболева $\mathcal{H} = \overset{0}{H}^1(\Pi; \Gamma^u)$ специфическим скалярным произведением

$$\langle u, v \rangle = (AD(\nabla_x)u, D(\nabla_x)v)_\Pi. \quad (4.2)$$

В гильбертовом пространстве \mathcal{H} введем оператор \mathcal{K} :

$$\langle \mathcal{K}u, v \rangle = (\rho u, v)_\Omega, \quad u \in \mathcal{H}, \quad v \in \mathcal{H}. \quad (4.3)$$

Замена спектрального параметра

$$\mu = \lambda^{-1} \quad (4.4)$$

и простые алгебраические преобразования позволяют превратить интегральное тождество (4.1) в абстрактное спектральное уравнение

$$\mathcal{K}u = \mu u \in \mathcal{H}. \quad (4.5)$$

Ясно, что оператор \mathcal{K} непрерывен и симметричен, а значит, самосопряжен. Этот оператор положителен, его норму обозначим k . Спектр оператора \mathcal{K} расположен на сегменте $[0, k]$ вещественной оси $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Вследствие неограниченности области Π оператор не является компактным и поэтому помимо точки $\mu = 0$ имеет непрерывный спектр на полуинтервале $(0, k]$ (см. [30, § 9.2]).

В силу связи (4.4) λ -спектр вариационной задачи (4.1) (или краевой задачи (1.6) при гладких данных) наследует все свойства μ -спектра уравнения (4.5), за исключением тех, которые присущи точке $\mu = 0$, соотнесенной с бесконечно удаленной точкой λ .

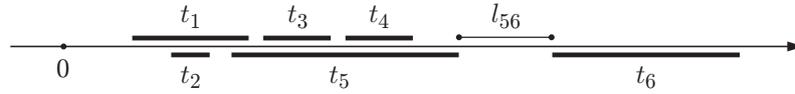


Рис. 2. Лакуна между пятым и шестым сегментами непрерывного спектра

Нетрудно показать, что при фиксированном вещественном η задача (3.2) формально самосопряжена. В пространстве $H(\eta) = H_{per}^1(\varpi; \gamma^u)$ комплекснозначных вектор-функций $U \in H^1(\varpi)$, обращающихся в нуль на поверхности γ^u и 1-периодических по переменной x_1 , по аналогии с формулами (4.2), (4.3) введем скалярное произведение

$$\langle U, V \rangle_\eta = (A^0 D(\partial_1 + i\eta, \partial_2, \partial_3)U, D(\partial_1 + i\eta, \partial_2, \partial_3)V)_\varpi \quad (4.6)$$

и самосопряженный компактный положительный оператор $K(\eta)$:

$$\langle K(\eta)U, V \rangle_\eta = (\rho^0 U, V), \quad U \in H(\eta), \quad V \in H(\eta). \quad (4.7)$$

Норму этого оператора обозначим $k(\eta)$. Согласно [30] (см. теоремы 9.2.1 и 10.2.2) спектр оператора $K(\eta)$ состоит из точки $M_\infty = 0$, принадлежащей существенному спектру, и бесконечно малой последовательности собственных чисел

$$k(\eta) = M_1(\eta) \geq M_2(\eta) \geq \dots \geq M_n(\eta) \dots \rightarrow +0, \quad (4.8)$$

образующих дискретный спектр оператора. Собственные числа указаны в (4.8) с учетом их кратностей; они непрерывно и 2π -периодически зависят от параметра $\eta \in \mathbb{R}$.

Собственные числа задачи (4.1)

$$\Lambda_n(\eta) = M_n(\eta)^{-1}$$

(см. формулу (4.4)) образуют бесконечно большую последовательность

$$0 < \Lambda_1(\eta) \leq \Lambda_2(\eta) \leq \dots \leq \Lambda_n(\eta) \leq \dots \rightarrow +\infty \quad (4.9)$$

и также непрерывно и 2π -периодически зависят от η . Следовательно, каждая из величин $\Lambda_n(\eta)$ заполняет замкнутый сегмент

$$t_n = \{\Lambda > 0: \Lambda = \Lambda_n(\eta), \eta \in [0, 2\pi)\}. \quad (4.10)$$

При некоторых n сегмент (4.10) может вырождаться в точку, однако пример такой ситуации в теории упругости неизвестен. Объединение сегментов (4.10) обозначим T . Согласно результатам [27], указанным в п. 3, множество T содержит все точки, для которых оператор неоднородной задачи (4.1) (а при гладких данных и оператор задачи (1.6)) перестает быть фредгольмовым, а именно: у однородной модельной задачи появляется незатухающее решение — волна Флоке (3.1). Соответственно множество $S \cup \{M_\infty\}$, где

$$S = \{\mu > 0: \mu^{-1} \in T\}, \quad (4.11)$$

представляет собой существенный спектр оператора \mathcal{K} .

Структура множества (4.11) не исключает появления лакун (см. рис. 2, на котором показаны сегменты t_1, t_2, \dots, t_5 и t_6 , а также лакуна l_{56}).

В соответствии со стандартной схемой (см., например, [16, 28] и др.) оператор $\tilde{\mathcal{K}}$ задачи (1.6) может быть выражен через оператор \mathcal{K} и сумму произвольно малого и компактного операторов, а значит, $\tilde{\mathcal{K}}$ и \mathcal{K} имеют одинаковые существенные спектры.

5. Неравенство Корна. Для проверки существования лакуны в непрерывном спектре волновода с ячейкой периодичности, показанной на рис. 3, необходимо использовать

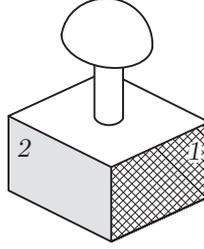


Рис. 3. Грибовидная ячейка периодичности

специальное — весовое и анизотропное — неравенство Корна, позволяющее оценить границы интервала, в котором изменяются собственные числа (4.9). Схема доказательства неравенства допускает обобщения (см. ниже), однако для упрощения изложения выберем симметричные формы и поверхность защемления в виде полосы.

Пусть $\Xi \subset \mathbb{R}^3$ — область с липшицевой границей $\partial\Xi$ и компактным замыканием: $\bar{\Xi} = \Xi \cup \partial\Xi$, а Γ — часть поверхности $\partial\Xi$, имеющая положительную площадь. Доказательство неравенства Корна

$$\|\nabla_x u; L_2(\Xi)\|^2 + \|u; L_2(\Xi)\|^2 =: \|u; H^1(\Xi)\|^2 \leq C(\Xi, \Gamma) \|D(\nabla_x)u; L_2(\Xi)\|^2, \quad (5.1)$$

$$u \in H^1_0(\Xi; \Upsilon)$$

приведено в работах [2, 31–33] и др. Зависимость постоянной Корна C от формы тела Ξ и жестко защемленной поверхности Γ является сложной и в общем случае неизвестна.

Отметим следующие два факта. Во-первых, подстановка в неравенство (5.1) при $\Xi = \varpi$ и $\Gamma = \gamma^u$ вектор-функции (3.1) с сомножителем $U \in H^1_0(\varpi; \gamma^u)$ приводит к соотношению

$$(4\pi)^{-2} \|U; H^1(\varpi)\|^2 \leq \|u; H^1(\varpi)\|^2 \leq c(\varpi, \gamma^u) \|D(\nabla_y, \partial_z + i\eta)U; L_2(\varpi)\| \leq$$

$$\leq C(\varpi, \gamma^u) c_{A^0}^{-1} (A^0 D(\nabla_y, \partial_z + i\eta)U, D(\nabla_y, \partial_z + i\eta)U)_{\varpi}. \quad (5.2)$$

Во-вторых, в силу условия положительности (1.5) суммирование неравенств (5.1), в которых $\Xi = \varpi_j$, $\Gamma = \gamma_j^u$ и постоянная $C(\varpi_j, \gamma_j^u) = C(\varpi, \gamma^u)$ не зависит от номера j ячейки (1.1), приводит к оценке

$$\|u; H^1(\Pi)\|^2 \leq C(\varpi, \gamma^u) \|D(\nabla_x)u; L_2(\Pi)\|^2 \leq C(\varpi, \gamma^u) c_A^{-1} (AD(\nabla_x)u, D(\nabla_x)u)_{\Pi}. \quad (5.3)$$

Пусть представленная на рис. 3 грибовидная ячейка периодичности

$$\varpi = \Xi \cup \Upsilon_r \cup \Omega \quad (5.4)$$

состоит из массивной “грибницы” Ξ в форме параллелепипеда: $\Xi = \theta \times (-2H, 0)$ и массивной “шляпки” Ω в виде полушара $\{x: (x_1 - 1/2)^2 + x_2^2 + (x_3 - R)^2 < R^2/4, x_3 > R\}$, соединенных тонкой “ножкой” $\Upsilon_r = \omega_r \times (-H, 5R/4)$, “вросшей” как в Ξ , так и в Ω . Здесь $\theta = (-1/2, 1/2) \times (0, 1)$ — квадрат; $\omega_r = \{(x_1, x_2): (x_1 - 1/2)^2 + x_2^2 < r^2\}$ — круг малого радиуса $r \in (0, R)$; $H > 0$ и $R \in (0, 1/2)$ — фиксированные размеры. Сами множества Ξ и Ω , а также сечение ω_r цилиндра Υ_r могут быть достаточно произвольными, а их конкретные формы выбраны только для того, чтобы установить соответствие с рис. 3. Важно лишь то, что массивные тела соединены тонкой перемычкой и $\gamma^u = \Gamma = (0, 1) \times \{1/2\} \times (-2H, 0)$, т. е. часть поверхности одного из тел (грань 1 параллелепипеда на рис. 3) жестко защемлена и, следовательно, справедливо неравенство Корна (5.1). Отметим, что на грани 2 параллелепипеда и на противоположной ей (см. рис. 3) заданы условия периодичности.

Пусть $u \in H^1_0(\varpi; \gamma^u)$, $w = \chi_r u$ и $\chi_r \in C^\infty(\mathbb{R})$ — срезающая функция, равная единице при $x_3 > r - H$ и нулю при $x_3 \leq -H$, причем $0 \leq \chi_r(x_3) \leq 1$ и $|\partial_3 \chi_r(x_3)| \leq cr^{-1}$. Тогда имеем

$$\|D(\nabla_x)w; L_2(\Upsilon_r)\|^2 \leq 2\|D(\nabla_x)u; L_2(\Upsilon_r)\|^2 + cr^{-2}\|u; L_2(\omega_r \times (-H, r - H))\|^2. \quad (5.5)$$

Это соотношение вместе с неравенством Корна (5.1) и следствием одномерного неравенства Харди

$$\begin{aligned} r^{-2}\|u; L_2(\omega_r \times (-H, r - H))\|^2 &\leq c\|\varrho_H^{-1}u; L_2(\omega_h \times (-H, r - H))\|^2 \leq \\ &\leq c\|\varrho_H^{-1}u; L_2(\Xi)\|^2 \leq c\|u; H^1(\Xi)\|^2, \\ \varrho_H(x) &= ((x_1 - 1/2)^2 + x_2^2 + (x_3 - H)^2)^{1/2} \end{aligned}$$

устанавливают неравенство

$$\|D(\nabla_x)w; L_2(\Upsilon_r)\|^2 \leq c\|D(\nabla_x)u; L_2(\Upsilon \cup \Xi)\|^2. \quad (5.6)$$

Поскольку $w(x) = 0$ при $(x_1, x_2) \in \omega_r$ и $x_3 = -H$, применим для стержня анизотропное неравенство Корна (см. [34, 35], а также [36, § 2] и [2, гл. 3]), которое сделано асимптотически точным путем распределения весовых множителей между составляющими соболевской нормы:

$$\begin{aligned} cr^2\|w; H^1(\Upsilon_r)\|^2 &\leq \sum_{p=1}^2 \int_{\Upsilon_r} \left(\left| \frac{\partial w_p}{\partial x_p} \right|^2 + \left| \frac{\partial w_3}{\partial x_3} \right|^2 + r^2 \left(\left| \frac{\partial w_p}{\partial x_3} \right|^2 + \left| \frac{\partial w_3}{\partial x_p} \right|^2 \right) + \right. \\ &\left. + r^2 \left(\left| \frac{\partial w_1}{\partial x_2} \right|^2 + \left| \frac{\partial w_2}{\partial x_1} \right|^2 \right) + r^2 |w_p|^2 + |w_3|^2 \right) dx \leq c\|D(\nabla_x)w; L_2(\Upsilon_r)\|^2. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Следует отметить, что во всех оценках постоянные не зависят от малого параметра $r \in (0, R]$ и пробных функций.

Рассмотрим поле смещений на “шляпке” Ω , представив его в виде

$$u(x) = u^\perp(x) + d(x_1 - 1/2, x_2, x_3 - R)b, \quad (5.8)$$

где $b \in \mathbb{R}^6$; $d(x_1 - 1/2, x_2, x_3 - R)b$ — жесткое смещение, т. е. $d(x)$ — аналогичная (1.4) матрица размером 3×6 :

$$d(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2^{-1/2}x_3 & -2^{-1/2}x_2 \\ 0 & 1 & 0 & -2^{-1/2}x_3 & 0 & 2^{-1/2}x_1 \\ 0 & 0 & 1 & 2^{-1/2}x_2 & -2^{-1/2}x_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

Отметим, что точка $(1/2, 0, R)$ совпадает с центром полушара Ω . Слагаемое u^\perp удовлетворяет шести условиям ортогональности:

$$\int_{\Omega} d\left(x_1 - \frac{1}{2}, x_2, x_3 - R\right)^T u^\perp(x) dx = 0 \in \mathbb{R}^6, \quad (5.10)$$

устраняющим жесткое смещение, и поэтому справедлив следующий вариант неравенства Корна (см., например, [33], а также [2, § 2.2]):

$$\|u^\perp; H^1(\Omega)\|^2 \leq c_\Omega \|D(\nabla_x)u^\perp; L_2(\Omega)\|^2 = c_\Omega \|D(\nabla_x)u; L_2(\Omega)\|^2. \quad (5.11)$$

Последнее равенство выполнено, поскольку $D(\nabla_x)d(x)$ — нулевая матрица размером 6×6 согласно определениям (1.4) и (5.9) (столбец деформаций (1.4) вырождается на жестких смещениях).

Осталось оценить столбец $b \in \mathbb{R}^6$ в разложении (5.8), являющийся решением алгебраической системы

$$Mb = \int_{\Upsilon_r^0} d\left(x_1 - \frac{1}{2}, x_2, x_3 - R\right)^T (w(x) - u^\perp(x)) dx \in \mathbb{R}^6 \quad (5.12)$$

с симметричной матрицей Грама

$$\mathcal{M} = \int_{\Upsilon_r^0} d\left(x_1 - \frac{1}{2}, x_2, x_3 - R\right)^\top d\left(x_1 - \frac{1}{2}, x_2, x_3 - R\right) dx, \quad (5.13)$$

построенной с помощью скалярного произведения в $L_2(\Upsilon_r^0)$ по столбцам матрицы $d(x_1 - 1/2, x_2, x_3 - R)$. В силу линейной независимости столбцов матрица \mathcal{M} положительно определена. В формуле (5.13) в качестве области интегрирования примем прямой круговой цилиндр $\Upsilon_r^0 = \{x \in \Upsilon_r: x_3 \in (R, 5R/4)\}$. Вследствие симметрии тела Υ_r^0 матрица Грама является диагональной:

$$\mathcal{M} = \text{diag} \left\{ \frac{\pi}{4} Rr^2, \frac{\pi}{4} Rr^2, \frac{\pi}{4} Rr^2, \frac{\pi}{32} Rr^2 \left(\frac{R^2}{12} + r^2 \right), \frac{\pi}{32} Rr^2 \left(\frac{R^2}{12} + r^2 \right), \frac{\pi}{16} Rr^4 \right\}. \quad (5.14)$$

Первые три элемента в правой части (5.14) представляют собой объем тела Υ_r^0 , а остальные три — его моменты инерции.

В силу неравенств (5.5)–(5.7) и (5.11), а также соотношений (5.12), (5.14) при $p = 1, 2$ находим

$$\begin{aligned} |b_p|^2 &\leq cr^{-4} \left(\int_{\Upsilon_r^0} (|w_p(x)|^2 + |u_p^\perp(x)|^2) dx \right)^2 \leq \\ &\leq cr^{-4} \text{mes}_3(\Upsilon_r^0) (\|w_p; L_2(\Upsilon_r^0)\|^2 + \|u_p^\perp; L_2(\Upsilon_r^0)\|^2) \leq \\ &\leq cr^{-2} (r^{-2} \|D(\nabla_x)u; L_2(\Xi \cup \Upsilon_r)\|^2 + \|D(\nabla_x)u; L_2(\Omega)\|^2) \leq \\ &\leq cr^{-4} \|D(\nabla_x)u; L_2(\varpi)\|^2. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Поскольку в подынтегральном выражении в (5.7) слагаемое $|w_3|^2$ не имеет множителя r^2 , мажоранта в оценке компоненты b_3 столбца b уменьшается:

$$\begin{aligned} |b_3|^2 &\leq cr^{-4} \left(\int_{\Upsilon_r^0} (|w_3| + |u_3^\perp|) dx \right)^2 \leq \\ &\leq cr^{-2} (\|D(\nabla_x)u; L_2(\Xi \cup \Upsilon_r)\|^2 + \|D(\nabla_x)u; L_2(\Omega)\|^2) \leq cr^{-2} \|D(\nabla_x)u; L_2(\varpi)\|^2. \end{aligned}$$

Кроме того, аналогично (5.15) получаем

$$\begin{aligned} |b_{6-p}|^2 &\leq cr^{-4} \left(\int_{\Upsilon_r^0} (|\tilde{x}_p|(|w_3| + |u_3^\perp|) + |x_3 - R|(|w_p| + |u_p^\perp|)) dx \right)^2 \leq \\ &\leq cr^{-2} (r^{-2} \|D(\nabla_x)u; L_2(\Xi \cup \Upsilon_r)\|^2 + \|D(\nabla_x)u; L_2(\Omega)\|^2) \leq cr^{-4} \|D(\nabla_x)u; L_2(\varpi)\|^2. \end{aligned}$$

При этом $\tilde{x}_1 = x_1 - 1/2$ и $\tilde{x}_2 = x_2$.

Наконец, компонента b_6 требует отдельной обработки. В работе [37] обнаружено, что неравенства Корна (5.7) для стержня недостаточно для правильной оценки крутильной составляющей его деформации, и установлено следующее дополнительное неравенство (см. также предложение 3.4.13 в [2]):

$$\|w_p - \bar{w}_p; L_2(\Upsilon_r)\|^2 \leq c \|\partial_3(w_p - \bar{w}_p); L_2(\Upsilon_r)\|^2 \leq C \|D(\nabla_x)w; L_2(\Upsilon_r)\|^2. \quad (5.16)$$

Здесь $p = 1, 2$; $\bar{w}_p(x_3)$ — среднее функции w_p по сечению стержня:

$$\bar{w}_p(x_3) = (\text{mes}_2\omega_r)^{-1} \int_{\omega_r} w_p(x) dx_1 dx_2.$$

Применяя оценки (5.5), (5.6), (5.16) и (5.11), получаем

$$\begin{aligned}
 |b_6|^2 &\leq cr^{-8} \left(\left(\int_{\Upsilon_r^0} \{ \tilde{x}_2[w_1(x) - \bar{w}_1(x_3)] - \tilde{x}_1[w_2(x) - \bar{w}_2(x_3)] \} dx \right)^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \left(\int_{\Upsilon_r^0} r(|u_1^\perp(x)| + |u_2^\perp(x)|) dx \right)^2 \right) \leq \\
 &\leq cr^{-8} \text{mes}_3(\Upsilon_r^0) \max \{ |\tilde{x}_p| : x \in \overline{\Upsilon_r^0}, p = 1, 2 \} (\|D(\nabla_x)w; L_2(\Upsilon_r)\|^2 + \|D(\nabla_x)u; L_2(\Omega)\|^2) \leq \\
 &\leq cr^{-4} \|D(\nabla_x)u; L_2(\varpi)\|^2. \quad (5.17)
 \end{aligned}$$

Отметим, что вычитаемые $\bar{w}_p(z)$ в (5.16) удалось ввести в первое подынтегральное выражение формулы (5.17) вследствие симметрии сечения стержня Υ_r^0 : интеграл от величины \tilde{x}_p по кругу ω_r равен нулю.

Итак, на “шляпке” Ω для составляющих разложения (5.8) получено следующее неравенство:

$$r^4 |b'|^2 + r^2 |b_3|^2 + \|u^\perp; H^1(\Omega)\|^2 \leq c \|D(\nabla_x)u; L_2(\varpi)\|^2. \quad (5.18)$$

Здесь $b' = (b_1, b_2, b_4, b_5, b_6)^\top$ и соответственно далее (3×5) -матрица $d'(x)$ получена вычеркиванием из матрицы (5.9) третьего столбца.

Таким образом, если комплекснозначная вектор-функция $u \in \overset{0}{H}^1(\varpi; \gamma^u)$ удовлетворяет пяти условиям ортогональности

$$h' := \int_{\Omega} d' \left(x_1 - \frac{1}{2}, x_2, x_3 - R \right)^\top u(x) dx = 0 \in \mathbb{C}^5, \quad (5.19)$$

то столбец b' становится нулевым и из неравенства (5.18) следует соотношение

$$\begin{aligned}
 r^2 \|u; H^1(\Omega)\|^2 &\leq 2r^2 \|u^\perp; H^1(\Omega)\|^2 + 2r^2 |b_3|^2 \leq \\
 &\leq c (r^2 \|D(\nabla_x)u; L_2(\Omega)\|^2 + \|D(\nabla_x)u; L_2(\varpi)\|^2) \leq c_\varpi \|D(\nabla_x)u; L_2(\varpi)\|^2. \quad (5.20)
 \end{aligned}$$

Действительно, согласно формулам (5.8), (5.10)

$$b = \left\{ \int_{\Omega} d \left(x_1 - \frac{1}{2}, x_2, x_3 - R \right)^\top d \left(x_1 - \frac{1}{2}, x_2, x_3 - R \right) dx \right\}^{-1} h', \quad (5.21)$$

но в силу определения матрицы (5.9) и осевой симметрии тела Ω матрица Грама в фигурных скобках в (5.21) (аналогичная матрице Грама (5.13)) приобретает блочно-диагональную структуру, т. е. в шестой строке и шестом столбце матрицы лишь диагональный элемент отличен от нуля. Таким образом, равенства (5.19) и (5.21) означают, что $b' = 0$.

Обозначим через H_\perp подпространство вектор-функций $u \in \overset{0}{H}^1(\varpi; \gamma^u)$, удовлетворяющих условиям (5.19). Из оценок (5.1), (5.7) и (5.20) следует неравенство Корна

$$r^2 \|u; H^1(\varpi)\|^2 \leq c_\perp \|D(\nabla_x)u; L_2(\varpi)\|^2, \quad u \in H_\perp, \quad (5.22)$$

в котором множитель c_\perp не зависит от параметра $h \in (0, 1]$.

Отметим, что использованная выше осевая симметрия “шляпки” Ω не является обязательной: в (5.21) интегрирование можно вести по телу вращения внутри Ω , добавив в подынтегральное выражение компоненту u^\perp , уже оцененную в формуле (5.11).

6. Идентификация лакуны. Используем максиминимальный принцип (см., например, теорему 10.2.2 в [30]) для оператора $-K(\eta)$:

$$-M_p(\eta) = \max_{H_p(\eta) \subset H(\eta)} \inf_{U \in H_p(\eta) \setminus \{0\}} \frac{\langle -K(\eta)U, U \rangle_\eta}{\langle U, U \rangle_\eta}. \quad (6.1)$$

Здесь $p \in \mathbb{N}$; $H_p(\eta)$ — произвольное подпространство в $H(\eta)$ с коразмерностью $p - 1$, в частности, $H_1(\eta) = H(\eta)$. Пусть $p = 6$. В качестве $H_6(\eta)$ примем конкретное подпространство

$$H_\perp(\eta) = \{U \in H_{per}^0(\varpi; \gamma^u): u = \exp(i\eta x_1)U \in H_\perp\},$$

уменьшив при этом правую часть (6.1). С учетом определений (4.6), (4.7) и неравенства (5.22) для вектор-функции $u = \exp(i\eta x_3)U$, из которого следует неравенство

$$r^2 \|U; L_2(\varpi)\|^2 \leq c_\perp \|D(\partial_1 + i\eta, \partial_2, \partial_3)U; L_2(\varpi)\|^2,$$

получаем

$$M_6(\eta) \leq - \inf_{U \in H_\perp(\eta)} \frac{-(\rho_0 U, U)_\varpi}{(A^0 D(\partial_1 + i\eta, \partial_2, \partial_3)U, D(\partial_1 + i\eta, \partial_2, \partial_3)U)_\varpi} \leq \frac{C_{\rho_0}}{c_{A^0} c_\perp^{-1} r^2}. \quad (6.2)$$

Следовательно, найдена постоянная $C_\varpi > 0$, при которой справедливы соотношения

$$M_6(\eta) \leq C_\varpi^{-1} r^{-2}, \quad \Lambda_6(\eta) \geq C_\varpi r^2. \quad (6.3)$$

Докажем, что

$$M_5(\eta) \geq c_\varpi^{-1} r^{-4}, \quad \Lambda_5(\eta) \leq c_\varpi r^4. \quad (6.4)$$

С этой целью определим специальные поля смещений, обращающиеся в нуль на области Ξ в упругом сочленении (5.4) и поэтому оказывающиеся периодическими:

$$\begin{aligned} u^p(x) &= e_p \chi(x_3) - \tilde{x}_p e_3 \partial_3 \chi(x_3), & u^{p+2}(x) &= e_p x_3 \chi(x_3) - \tilde{x}_p e_3 \partial_3 (x_3 \chi(x_3)), \\ u^5(x) &= (\tilde{x}_2 e_1 - \tilde{x}_1 e_2) \chi(x_3). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Здесь $p = 1, 2$; e_j — орты осей x_j ; $\tilde{x}_1 = x_1 - 1/2$; $\tilde{x}_2 = x_2$; $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ — срезающая функция, равная единице при $x_3 \geq R$ и нулю при $x_3 \leq 0$. Следует отметить, что на области Ξ каждая вектор-функция в (6.5) представляет собой нетривиальное жесткое смещение, а значит, справедливо неравенство

$$\|u^q; L_2(\varpi)\|^2 \geq c_0 > 0, \quad q = 1, 2, \dots, 5.$$

Непосредственные вычисления показывают, что среди деформаций $\varepsilon_{jk}(u^q)$ нетривиальными являются лишь следующие:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{33}(u^p; x) &= -\tilde{x}_p \partial_3^2 \chi(x_3), & \varepsilon_{33}(u^{p+2}; x) &= -\tilde{x}_p \partial_3^2 (x_3 \chi(x_3)), \\ \varepsilon_{3k}(u^5; x) &= \varepsilon_{k3}(u^5; x) = -(-1)^k \tilde{x}_{3-k} \partial_3 \chi(x_3), & p &= 1, 2, \quad k = 1, 2. \end{aligned}$$

Производные срезающей функции χ отличны от нуля лишь на множестве диаметром $O(r)$, кроме того, $|\tilde{x}_p| \leq r$ при $x \in \Upsilon_r$. Таким образом,

$$\|D(\nabla_x)u^q; L_2(\varpi)\|^2 \leq C_0 r^4, \quad q = 1, 2, \dots, 5.$$

Любое подпространство $H_5(\eta)$ коразмерностью четыре содержит линейную комбинацию

$$U(x) = \exp(-i\eta x_3)u(x) = \exp(-i\eta x_3) \sum_{q=1}^5 \alpha_q u^q(x) \quad (6.6)$$

пяти заданных линейно независимых вектор-функций; при этом можно считать, что $|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \dots + |\alpha_5|^2 = 1$. Увеличивая значение выражения, максимум которого вычисляется в (6.1), посредством выбора конкретной пробной функции (6.6), находим

$$-M_5(\eta) \leq -\frac{\langle K(\eta)U, U \rangle_\eta}{\langle U, U \rangle_\eta} = -\frac{(\rho_0 u, u)_\varpi}{(A^0 D(\nabla_x)u, D(\nabla_x)u)_\varpi} \leq -\frac{c_{\rho_0} c_0}{C_{A^0} C_0 r^4} =: c_\varpi^{-1} r^{-4}. \quad (6.7)$$

Итак, соотношения (6.4) доказаны.

Положительные постоянные C_ϖ и c_ϖ в формулах (6.3) и (6.4) не зависят от геометрического параметра r , границу изменения которого $r_0 > 0$ можно зафиксировать, так чтобы выполнялось неравенство $c_\varpi r_0^4 < C_\varpi r_0^2$. В результате при $r \in (0, r_0]$ на непрерывном спектре имеется по крайней мере одна лагуна $l_{56} \supset (c_\varpi r^4, C_\varpi r^2)$ между сегментами t_5 и t_6 (см. рис. 2). Проведенный анализ не позволяет установить наличие или отсутствие лагун между сегментами t_1, t_2, \dots, t_5 . Следует отметить, что образование лагуны l_{56} обусловлено в большей степени особой формой ячейки ϖ , но не специфическими упругими свойствами материала, так как в правых частях неравенств (6.2) и (6.7) содержатся не сами матрица жесткости A^0 и плотность ρ_0 , а лишь постоянные c_{A^0} , C_{A^0} и c_{ρ_0} , C_{ρ_0} , для которых имеют место оценки (1.5) и (1.7) соответственно. Использование условия заземления бесконечной поверхности Γ^u обосновано, поскольку без него не удастся отделить пять собственных чисел $\Lambda_1(\eta) \leq \Lambda_2(\eta) \leq \dots \leq \Lambda_5(\eta)$ в последовательности (4.9), являющихся бесконечно малыми $O(r^4)$ более высокого порядка, чем остальные.

Путем увеличения плотности одного из массивных тел в периодическом семействе на интервале $(0, \min \{\Lambda_1(\eta): \eta \in [0, 2\pi)\})$, свободном от непрерывного спектра, можно образовать любое заранее заданное количество собственных чисел задачи (1.6) (ср. прием, разработанный в [13]). Вопрос о существовании ловушечных мод, порожденных собственными числами задачи (1.6) на сегментах t_1, t_2, \dots, t_5 непрерывного спектра (левее обнаруженной лагуны l_{56}), остается неизученным. Также не найден волновод, у которого лагуна содержит собственное число.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лехницкий С. Г.** Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977.
2. **Назаров С. А.** Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки. Новосибирск: Науч. кн., 2002.
3. **Ursell F.** Trapping modes in the theory of surface waves // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1951. V. 47. P. 347–358.
4. **Bonnet-Bendhia A.-S., Duterte J., Joly P.** Mathematical analysis of elastic surface waves in topographic waveguides // Math. Models Methods Appl. Sci. 1999. V. 9, N 5. P. 755–798.
5. **Evans D. V., Levitin M., Vasil'ev D.** Existence theorems for trapped modes // J. Fluid Mech. 1994. V. 261. P. 21–31.
6. **Bonnet-Bendhia A.-S., Starling F.** Guided waves by electromagnetic gratings and non-uniqueness examples for the diffraction problem // Math. Methods Appl. Sci. 1994. V. 77. P. 305–338.
7. **Roitberg I., Vassiliev D., Weidl T.** Edge resonance in an elastic semi-strip // Quart. J. Appl. Math. 1998. V. 51, N 1. P. 1–13.
8. **Сухинин С. В.** Волноводное, аномальное и шепчущее свойства периодической цепочки препятствий // Сиб. журн. индустр. математики. 1998. Т. 1, № 2. С. 175–198.
9. **Камоцкий И. В., Назаров С. А.** Аномалии Вуда и поверхностные волны в задачах рассеяния на периодической границе. 1 // Мат. сб. 1999. Т. 190, № 1. С. 109–138.

10. **Камоцкий И. В., Назаров С. А.** Аномалии Вуда и поверхностные волны в задачах рассеяния на периодической границе. 2 // *Мат. сб.* 1999. Т. 190, № 2. С. 43–70.
11. **Камоцкий И. В., Назаров С. А.** Упругие волны, локализованные около периодических семейств дефектов // *Докл. АН.* 1999. Т. 368, № 6. С. 771–773.
12. **Камоцкий И. В., Назаров С. А.** Экспоненциально затухающие решения задачи о дифракции на жесткой периодической решетке // *Мат. заметки.* 2003. Т. 73, № 1. С. 138–140.
13. **Назаров С. А.** Ловушечные моды для цилиндрического упругого волновода с демпфирующей прокладкой // *Журн. вычисл. математики и мат. физики.* 2008. Т. 48, № 5. С. 132–150.
14. **Кучмент П. А.** Теория Флоке для дифференциальных уравнений в частных производных // *Успехи мат. наук.* 1982. Т. 37, № 4. С. 3–52.
15. **Скриганов М. М.** Геометрические и арифметические методы в спектральной теории многомерных периодических операторов. Л.: Наука. Ленингр. отд-ние, 1985. (Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова / АН СССР; Т. 171).
16. **Kuchment P.** Floquet theory for partial differential equations. Basel: Birkhäuser, 1993.
17. **Назаров С. А.** Волны Рэлея для упругого полуслоя с частично заземленной периодической границей // *Докл. АН.* 2008. Т. 423, № 1. С. 56–61.
18. **Figotin A., Kuchment P.** Band-gap structure of spectra of periodic dielectric and acoustic media. 1. Scalar model // *SIAM J. Appl. Math.* 1996. V. 56. P. 68–88.
19. **Figotin A., Kuchment P.** Band-gap structure of spectra of periodic dielectric and acoustic media. 2. Two-dimensional photonic crystals // *SIAM J. Appl. Math.* 1996. V. 56. P. 1561–1620.
20. **Green E. L.** Spectral theory of Laplace — Beltrami operators with periodic metrics // *J. Differential Equations.* 1997. V. 133. P. 15–29.
21. **Hempel R., Lineau K.** Spectral properties of the periodic media in large coupling limit // *Comm. Partial Differential Equations.* 2000. V. 25. P. 1445–1470.
22. **Friedlander L.** On the density of states of periodic media in the large coupling limit // *Comm. Partial Differential Equations.* 2002. V. 27. P. 355–380.
23. **Жиков В. В.** О лакунах в спектре некоторых дивергентных эллиптических операторов с периодическими коэффициентами // *Алгебра и анализ.* 2004. Т. 6, № 5. С. 34–58.
24. **Kuchment P.** The mathematics of photonic crystals // *Mathematical modeling in optical science.* S. l.: SIAM, 2001. V. 22. P. 207–272.
25. **Filonov N.** Gaps in the spectrum of the Maxwell operator with periodic coefficients // *Comm. Math. Phys.* 2003. V. 240, N 1/2. P. 161–170.
26. **Гохберг И. Ц.** Введение в теорию несамосопряженных операторов / И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. М.: Наука, 1965.
27. **Назаров С. А.** Эллиптические краевые задачи с периодическими коэффициентами в цилиндре // *Изв. АН СССР. Сер. мат.* 1981. Т. 45, № 1. С. 101–112.
28. **Назаров С. А.** Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей / С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский. М.: Наука, 1991.
29. **Ладыженская О. А.** Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
30. **Бирман М. Ш.** Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве / М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980.
31. **Friedrichs K. O.** On the boundary value problems of the theory of elasticity and Korn's inequality // *Ann. Math.* 1947. V. 48. P. 441–471.
32. **Мосолов П. П., Мясников В. П.** Доказательство неравенства Корна // *Докл. АН СССР.* 1971. Т. 201, № 1. С. 36–39.
33. **Кондратьев В. А., Олейник О. А.** Краевые задачи для системы теории упругости в неограниченных областях. Неравенство Корна // *Успехи мат. наук.* 1988. Т. 43, № 5. С. 55–98.

34. **Назаров С. А.** Неравенства Корна, асимптотически точные для тонких областей // Вестн. С.-Петербур. гос. ун-та. Сер. 1. 1992. Вып. 2, № 8. С. 19–24.
35. **Назаров С. А.** Обоснование асимптотической теории тонких стержней. Интегральные и поточечные оценки // Проблемы математического анализа. СПб.: Изд-во С.-Петербур. гос. ун-та, 1997. Вып. 17. С. 101–152.
36. **Назаров С. А.** Неравенства Корна для упругих сочленений массивных тел, тонких пластин и стержней // Успехи мат. наук. 2008. Т. 63, № 5. С. 37–110.
37. **Назаров С. А.** Неравенство Корна для упругого соединения тела со стержнем // Проблемы механики деформируемого твердого тела. СПб.: Изд-во С.-Петербур. гос. ун-та, 2002. С. 234–240.

*Поступила в редакцию 4/VI 2008 г.,
в окончательном варианте — 10/XI 2008 г.*
