

УДК 539.3; 624

ЗАКРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ТОНКОСТЕННОЙ СВОБОДНО ОПЕРТОЙ БАЛКИ С ОТКРЫТЫМ ПРОФИЛЕМ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ, ПОКОЯЩЕЙСЯ НА ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОМ УПРУГОМ ОСНОВАНИИ, ПРИ ЕЕ КРУЧЕНИИ

Ч. К. Рао, Л. Б. Рао*

Объединение институтов Налла Нарсимха Редди, 500088 Хайдарабад, Индия

* Школа механических и строительных наук ВИТ-университета, 600127 Ченнай, Индия

E-mails: chellapilla95@gmail.com, bhaskarbabu_20@yahoo.com

Исследуется закритическое поведение свободно опертой тонкостенной балки, лежащей на упругом основании Винклера — Пастернака и находящейся под действием осевой сжимающей нагрузки. Предполагается, что материал балки является упругим, деформации балки малы. Деформациями поперечного сдвига и деформациями в плоскости поперечного сечения балки пренебрегается. Определено закритическое поведение свободно опертой балки при различных значениях жесткостей оснований Винклера и Пастернака. Найдены точки бифуркации.

Ключевые слова: балка, открытый профиль сечения, закритическое поведение, скручивание, основание Винклера — Пастернака.

DOI: 10.15372/PMTF20180122

Введение. Тонкостенные призматические балки с поперечным сечением, имеющим открытый профиль, широко применяются в автомобиле-, корабле- и самолетостроении, а также в гражданском строительстве. В ротационных машинах часть элементов также представляют собой балки с открытым профилем поперечного сечения. Поэтому исследование закритического поведения таких балок является актуальной задачей.

При некоторых значениях нагрузок балки с открытым сечением поперечного профиля теряют устойчивость. При этом происходит кручение балок или их изгиб (либо одновременно кручение и изгиб). При проектировании конструкций, содержащих балки в качестве подкрепляющих элементов, необходимо учитывать возможность потери устойчивости балок.

Результаты исследования устойчивости балок в линейной постановке приведены в работах [1, 2]. Однако определить закритическое поведение балок в линейной постановке невозможно.

Впервые в нелинейной постановке поведение тонкостенной конструкции при однородном кручении исследовалось К. Г. Юнгом, который рассматривал балку с круговым поперечным сечением. Результаты этого исследования изложены в работе [3]. В работе [4]

изучалась жесткость на кручение балки с прямоугольным поперечным сечением, находящейся под действием осевой растягивающей нагрузки. В [5] исследовано поведение тонкостенной балки с поперечным сечением I-образной и Z-образной формы. С использованием точной нелинейной теории задача о кручении тонкостенной балки с поперечным сечением, имеющим открытый профиль, решалась в работах [6, 7]. При этом использовался принцип минимума потенциальной энергии. Задача решалась с учетом больших деформаций при произвольных нагрузках и произвольных краевых условиях.

Детально нелинейная задача о кручении тонкостенных балок исследовалась в работах [8–13]. В [14] закритическое поведение тонкостенных элементов конструкций с открытым профилем поперечного сечения, находящихся под действием сжимающих нагрузок, изучалось с использованием общей нелинейной теории устойчивости.

Во всех указанных выше работах не учитывалось упругое основание, на котором могут находиться тонкостенные элементы конструкций. В [15, 16] в линейной постановке решалась задача об устойчивости и колебаниях при кручении лежащих на упругом основании Винклера тонкостенных элементов конструкций с поперечным сечением, имеющим открытый профиль [17, 18]. В работах [15, 16] не рассматривалось закритическое поведение таких конструкций. В [19] исследовалось закритическое поведение тонкостенной балки, находящейся под действием осевой сжимающей нагрузки и лежащей на упругом основании Винклера. С использованием общей теории балок в [20] изучалось закритическое поведение тонкостенных призматических элементов конструкций. На основе обобщенной теории балок в работе [20] предложен ряд аналитических моделей закритического поведения при сжатии и изгибе стальных тонкостенных призматических элементов конструкций, изготовленных методом холодной штамповки. В [21] исследовано влияние на устойчивость тонкостенных элементов конструкций ограничений, налагаемых на депланацию поперечных сечений балки. Рассмотрены различные виды ограничений на депланацию торцевых сечений балки, вычислены критические нагрузки и определены соответствующие им формы потери устойчивости.

В работе [22] представлены результаты исследований устойчивости плоских и пространственных стальных тонкостенных ферм, полученные с использованием обобщенной теории балок. В [23] с помощью первой теоремы Кастильяно изучалось кручение тонкостенной балки с сечением открытого профиля с наложенными на нее связями. Поперечное сечение имело две плоскости симметрии. Полученные точные решения были упрощены путем разложения их в ряды. В [24] изучалось влияние депланации на закритическое поведение тонкостенных конструкций. С использованием одномерной модели исследована первая стадия закритического деформирования каркасной конструкции. В [25] с помощью принципа стационарности полной потенциальной энергии исследовано влияние дисторсии на устойчивость упругой, сжатой в осевом направлении балки.

Из приведенного выше обзора работ следует, что влияние двухпараметрического упругого основания Винклера — Пастернака на закритическое поведение тонкостенной балки с сечением открытого профиля не исследовалось.

В данной работе изучается влияние упругого основания Винклера — Пастернака [18, 26] на закритическое поведение свободно опертой однородной тонкостенной балки с сечением открытого профиля при ее кручении.

1. Постановка задачи. Решается задача о закритическом поведении при кручении упругой статически определимой тонкостенной балки длиной L с сечением открытого профиля, лежащей на упругом основании Винклера — Пастернака. Балка имеет две плоскости симметрии. Поперечное сечение балки имеет I-образную форму (сечение балки представляет собой двутавр) (рис. 1).

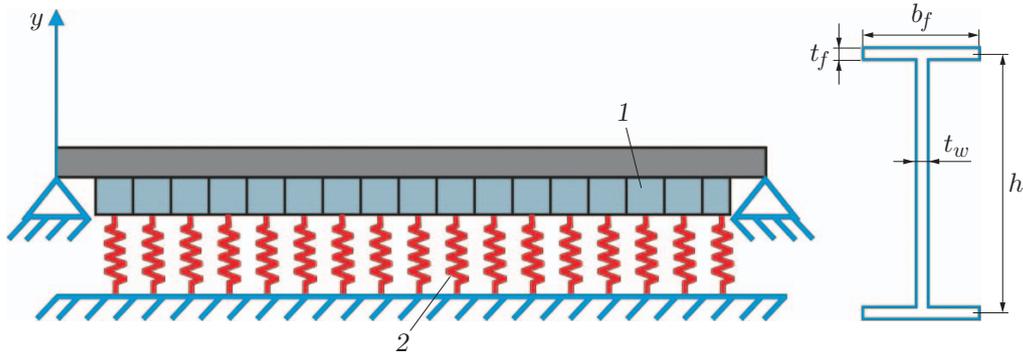


Рис. 1. Схема свободно опертой стальной балки с поперечным сечением I-образной формы, лежащей на упругом основании Винклера — Пастернака: 1 — сдвиговый слой (слой Пастернака) с жесткостью K_P , 2 — слой Винклера с жесткостью K_W

2. Математическая формулировка задачи и ее решение. При математической формулировке задачи принимаются следующие предположения:

- 1) деформации в поперечном сечении балки отсутствуют;
- 2) деформации являются малыми и упругими;
- 3) деформации поперечного сдвига отсутствуют.

Выражение для энергии деформации при неоднородном кручении находящейся под действием внешней осевой сжимающей статической силы P тонкостенной балки с поперечным сечением открытого профиля площадью A записывается в виде

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L [EC_w(\varphi'')^2 + GC_s(\varphi')^2 + EF(\varphi')^4] dz, \quad (1)$$

выражение для работы осевой сжимающей силы — в виде

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L \sigma I_p(\varphi')^2 dz, \quad \sigma = \frac{P}{A}, \quad (2)$$

выражение для работы реакции упругого основания — в виде

$$R = \frac{1}{2} \int_0^L [K_P(\varphi')^2 + K_W(\varphi)^2] dz. \quad (3)$$

В уравнениях (1)–(3) штрих обозначает производную по координате z ; $F = I_p - (I_{pc}/A)^2$; I_p — полярный момент инерции поперечного сечения; $I_{pc} = I_p/2$; $C_w = I_f h^2/2$; $C_s = (2b_f t_f^3 + h t_w^3)/3$; E — модуль Юнга; G — модуль сдвига; φ — угол кручения. Полная потенциальная энергия V сохраняет постоянное значение:

$$V = U - W + R = \text{const}. \quad (4)$$

Поперечное сечение рассматриваемой балки представляет собой двутавр, имеющий две плоскости симметрии. Геометрические параметры поперечного сечения следующие: t_f и t_w — толщина полок и стенки соответственно; h — расстояние между центрами полок;

b_f — ширина полок. Предполагается, что $t_f \ll h$ и $t_w \ll h$. Для такого сечения выражения для введенных выше геометрических параметров I_p и I_{pc} имеют следующий вид [6]:

$$I_p = \frac{h^5 t_w}{320} + \frac{b_f h^4 t_f}{32} + \frac{b_f^5 t_f}{160} + \frac{b_f^3 h^2 t_f}{48}, \quad I_{pc} = \frac{1}{24} (h^3 t_w + 2b_f^3 t_f + 6b_f h^2 t_f).$$

Дифференциальное уравнение Эйлера для функционала потенциальной энергии V (4) записывается в виде

$$EC_w \frac{d^4 \varphi}{dz^4} - 6EF \left(\frac{d\varphi}{dz} \right)^2 \frac{d^2 \varphi}{dz^2} - \left(GC_s - \frac{PI_p}{A} + K_P \right) \frac{d^2 \varphi}{dz^2} + K_W \varphi = 0,$$

или

$$EC_w \varphi^{iv} - 6EF(\varphi')^2 \varphi'' - (GC_s - \sigma I_p + K_P) \varphi'' + K_W \varphi = 0. \quad (5)$$

Краевые условия для уравнения (5) в случае свободно опертых торцов балки имеют вид

$$Z = 0: \quad \varphi = 0, \quad \varphi'' = 0, \quad Z = 1: \quad \varphi = 0, \quad \varphi'' = 0, \quad (6)$$

где штрих обозначает производную по безразмерной переменной $Z = z/L$.

Уравнение (5) можно записать в безразмерной форме

$$\varphi^{iv} - 6\delta(\varphi')^2 \varphi'' - (K^2 - \Delta^2 + \xi^2) \varphi'' + 4\lambda^2 \varphi = 0, \quad (7)$$

где $\delta = F/C_w$. Для решения уравнения (7) используется метод Галеркина. Угол закручивания $\varphi(Z)$ принимается в виде

$$\varphi(Z) = \beta x(Z), \quad (8)$$

где β — амплитуда кручения. Предполагается, что функция $\varphi(Z)$ удовлетворяет краевым условиям. Подставляя (8) в (7), получаем выражение для невязки

$$\varepsilon = \beta [x^{iv} - 6\beta^2 \delta (x')^2 x'' - (K^2 - \Delta^2 + \xi^2) x'' + 4\lambda^2 x]. \quad (9)$$

В соответствии с методом Галеркина уравнение

$$\int_0^1 \varepsilon x(Z) dZ = 0 \quad (10)$$

является условием минимизации невязки.

Функцию $x(Z)$, удовлетворяющую краевым условиям (6), примем в следующем виде:

$$x(Z) = \sin(\pi Z). \quad (11)$$

Подставляя (9), (11) в (10), получаем выражение для критического параметра

$$\Delta_{cr}^{*2} = K^2 + \xi^2 + \pi^2 + 4\lambda^2/\pi^2 + 3\pi^2 \delta \beta^2/2.$$

Выражение для критического параметра, полученное с использованием линейной теории, имеет вид

$$\Delta_{cr}^2 = K^2 + \xi^2 + \pi^2 + 4\lambda^2/\pi^2.$$

Таким образом,

$$\frac{P^*}{P_{cr}} = \frac{\Delta_{cr}^{*2}}{\Delta_{cr}^2} = 1 + \frac{3\pi^4 \delta \beta^2}{2} \frac{1}{\pi^2(K^2 + \xi^2 + \pi^2) + 4\lambda^2} \quad (12)$$

(P^* — критическое значение сжимающей нагрузки; P_{cr} — линейная критическая нагрузка).

При отсутствии основания Пастернака ($\xi = 0$) уравнение (12) приводится к виду

$$\frac{P^*}{P_{cr}} = \frac{\Delta_{cr}^{*2}}{\Delta_{cr}^2} = 1 + \frac{3\pi^4\delta\beta^2}{2} \frac{1}{\pi^2(K^2 + \pi^2) + 4\gamma^2}, \quad (13)$$

при отсутствии также основания Винклера ($\lambda = 0$) — к виду

$$\frac{P^*}{P_{cr}} = \frac{\Delta_{cr}^{*2}}{\Delta_{cr}^2} = 1 + \frac{3\pi^2\delta\beta^2}{2(K^2 + \pi^2)}. \quad (14)$$

Наконец, в случае равенства нулю параметра депланации (или в случае пренебрежимо малого значения этого параметра) уравнение (12) принимает вид

$$\frac{P^*}{P_{cr}} = \frac{\Delta_{cr}^{*2}}{\Delta_{cr}^2} = 1 + \frac{3\delta\beta^2}{2}. \quad (15)$$

Из уравнений (12)–(15) следует, что для балки с поперечным сечением открытого профиля, имеющей две плоскости симметрии и подвергнутой неоднородному кручению, различие критических нагрузок, полученных с использованием линейной и нелинейной теорий, тем меньше, чем больше параметр депланации K , параметр основания Винклера γ или параметр основания Пастернака ξ . Из приведенных результатов также следует, что в случае продольного изгиба эйлера критическая нагрузка меньше критических нагрузок Δ_{cr}^* и Δ_{cr} .

3. Обсуждение полученных результатов. Рассмотрим балку, имеющую две плоскости симметрии и поперечное сечение, представляющее собой двутавр, со следующими геометрическими параметрами: $L = 760$ мм, $t_w = 2,13$ мм, $t_f = 3,11$ мм, $b_f = 31,55$ мм, $d = 72,76$ мм, $h = 69,65$ мм. Полярный момент инерции относительно центра тяжести балки с поперечным сечением в форме двутавра, имеющей две плоскости симметрии, равен сумме момента инерции относительно оси x и момента инерции относительно оси y : $I_p = I_{xx} + I_{yy}$. Момент инерции I_p имеет размерность [мм⁴].

Для указанных выше геометрических параметров балки безразмерный параметр K равен 3,106, а безразмерный параметр δ — 1,1095. Уравнение (12) представляет собой зависимость отношения P^*/P_{cr} от амплитуды кручения β при различных значениях параметра основания Винклера λ и параметра основания Пастернака ξ .

Значения отношения P^*/P_{cr} при различных значениях амплитуды кручения β , значениях жесткости основания Винклера $\lambda = 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30$ и значении жесткости основания Пастернака $\xi = 0$ приведены в табл. 1.

На рис. 2 представлены зависимости отношения P^*/P_{cr} от отношения амплитуды кручения β при различных значениях жесткостей оснований Винклера и Пастернака. Из зависимостей, приведенных на рис. 2, следует, что при всех рассмотренных значениях жесткостей оснований Винклера и Пастернака отношение P^*/P_{cr} увеличивается с увеличением амплитуды кручения β . При всех рассмотренных значениях жесткости влияние амплитуды кручения β на величину критической нагрузки уменьшается с увеличением жесткости основания Пастернака ξ .

В табл. 2 для значений амплитуды кручения $\beta \in [0, 1]$ приведены отношения P^*/P_{cr} при различных значениях жесткостей оснований Винклера и Пастернака. На рис. 3 для значений амплитуды кручения $\beta \in [0, 1]$ приведена зависимость отношения P^*/P_{cr} от жесткости основания Винклера λ при различных значениях жесткости основания Пастернака ξ . При $\xi = 0$ имеется существенная зависимость P^*/P_{cr} от жесткости λ . С увеличением жесткости ξ эта зависимость становится более слабой.

В табл. 3 приведены значения отношения P^*/P_{cr} при $\lambda = 0$ и различных значениях амплитуды кручения β и жесткости основания Пастернака ξ . На рис. 4 представлены

Таблица 1

Значения отношения P^*/P_{cr} при жесткости основания Пастернака $\xi = 0$ и различных значениях амплитуды кручения β и жесткости основания Винклера λ

β	P^*/P_{cr}						
	$\lambda = 0$	$\lambda = 5$	$\lambda = 10$	$\lambda = 15$	$\lambda = 20$	$\lambda = 25$	$\lambda = 30$
0	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00
0,1	1,008 40	1,005 53	1,002 73	1,001 48	1,000 90	1,000 60	1,000 43
0,2	1,033 59	1,022 12	1,010 93	1,005 93	1,003 61	1,002 41	1,001 71
0,3	1,075 57	1,049 77	1,024 58	1,013 34	1,008 13	1,005 41	1,003 84
0,4	1,134 35	1,088 47	1,043 70	1,023 71	1,014 45	1,009 62	1,006 83
0,5	1,209 92	1,138 24	1,068 29	1,037 04	1,022 58	1,015 03	1,010 67
0,6	1,302 28	1,199 06	1,098 33	1,053 34	1,032 52	1,021 65	1,015 37
0,7	1,411 44	1,270 95	1,133 84	1,072 61	1,044 26	1,029 47	1,020 92
0,8	1,537 39	1,353 89	1,174 81	1,094 83	1,057 81	1,038 49	1,027 32
0,9	1,680 13	1,447 89	1,221 25	1,120 02	1,073 16	1,048 71	1,034 58
1,0	1,839 66	1,552 95	1,273 14	1,148 18	1,090 32	1,060 14	1,042 69

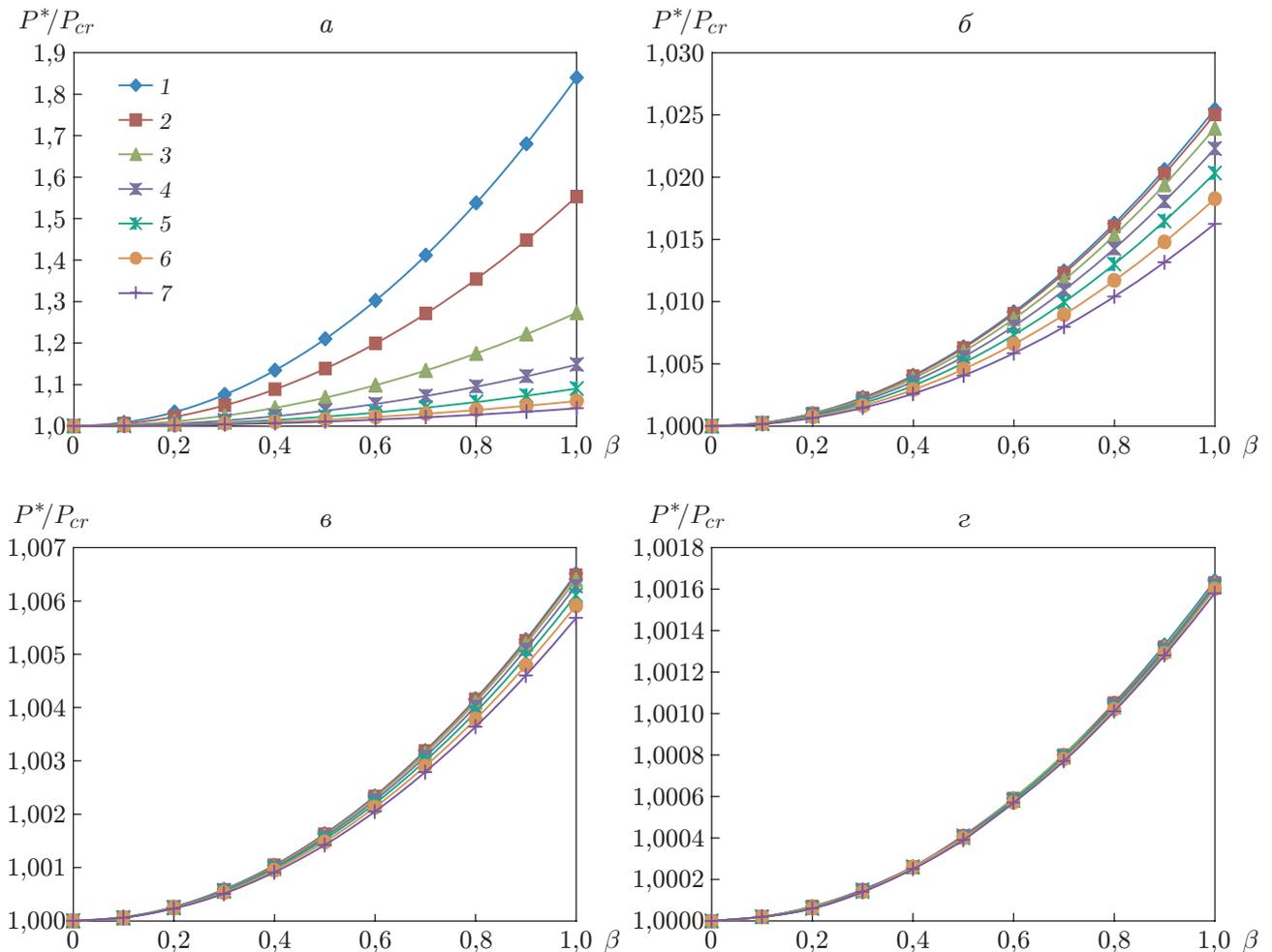


Рис. 2. Зависимости отношения P^*/P_{cr} от амплитуды кручения β при различных значениях жесткостей оснований Винклера λ и Пастернака ξ :
 а — $\xi = 0$, б — $\xi = 25$, в — $\xi = 50$, г — $\xi = 100$; 1 — $\lambda = 0$, 2 — $\lambda = 5$, 3 — $\lambda = 10$, 4 — $\lambda = 15$, 5 — $\lambda = 20$, 6 — $\lambda = 25$, 7 — $\lambda = 30$

Таблица 2

Значения отношения P^*/P_{cr} при значениях амплитуды кручения $\beta \in [0, 1]$ и различных значениях жесткостей оснований Винклера λ и Пастернака ξ

λ	$P^*/P_{cr}, \%$				
	$\xi = 0$	$\xi = 25$	$\xi = 50$	$\xi = 75$	$\xi = 100$
0	82,433 560	2,518 370	0,643 955	0,286 991	0,161 997
5	54,440 940	2,478 380	0,641 961	0,286 991	0,160 997
10	26,967 380	2,368 432	0,633 962	0,284 991	0,160 997
15	14,648 320	2,206 515	0,621 963	0,282 992	0,159 997
20	8,933 959	2,012 597	0,604 964	0,278 992	0,158 997
25	5,950 430	1,807 675	0,584 965	0,274 992	0,157 997
30	4,224 184	1,608 743	0,561 966	0,269 992	0,155 997

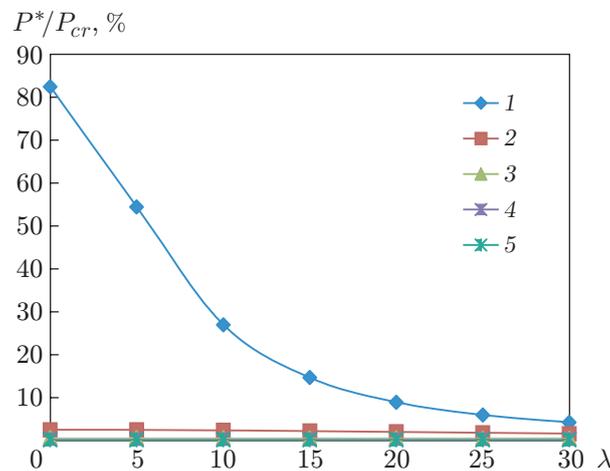


Рис. 3. Зависимости отношения P^*/P_{cr} от жесткости основания Винклера λ при значениях амплитуды кручения $\beta \in [0, 1]$ и различных значениях жесткости основания Пастернака ξ :

1 — $\xi = 0$, 2 — $\xi = 25$, 3 — $\xi = 50$, 4 — $\xi = 75$, 5 — $\xi = 100$

Таблица 3

Значения отношения P^*/P_{cr} при жесткости основания Винклера $\lambda = 0$ и различных значениях амплитуды кручения β и жесткости основания Пастернака ξ

β	P^*/P_{cr}						
	$\xi = 0$	$\xi = 5$	$\xi = 10$	$\xi = 15$	$\xi = 20$	$\xi = 25$	$\xi = 30$
0	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00
0,1	1,008 40	1,003 68	1,001 37	1,000 67	1,000 39	1,000 25	1,000 18
0,2	1,033 59	1,014 73	1,005 49	1,002 68	1,001 56	1,001 02	1,000 71
0,3	1,075 57	1,033 14	1,012 34	1,006 03	1,003 52	1,002 29	1,001 60
0,4	1,134 35	1,058 91	1,021 95	1,010 73	1,006 25	1,004 07	1,002 85
0,5	1,209 92	1,092 05	1,034 29	1,016 76	1,009 77	1,006 36	1,004 46
0,6	1,302 28	1,132 55	1,049 38	1,024 14	1,014 07	1,009 16	1,006 42
0,7	1,411 44	1,180 42	1,067 21	1,032 85	1,019 15	1,012 46	1,008 74
0,8	1,537 39	1,235 65	1,087 78	1,042 91	1,025 01	1,016 28	1,011 41
0,9	1,680 13	1,298 25	1,111 10	1,054 31	1,031 65	1,020 60	1,014 44
1,0	1,839 66	1,368 21	1,137 16	1,067 05	1,039 08	1,025 44	1,017 83

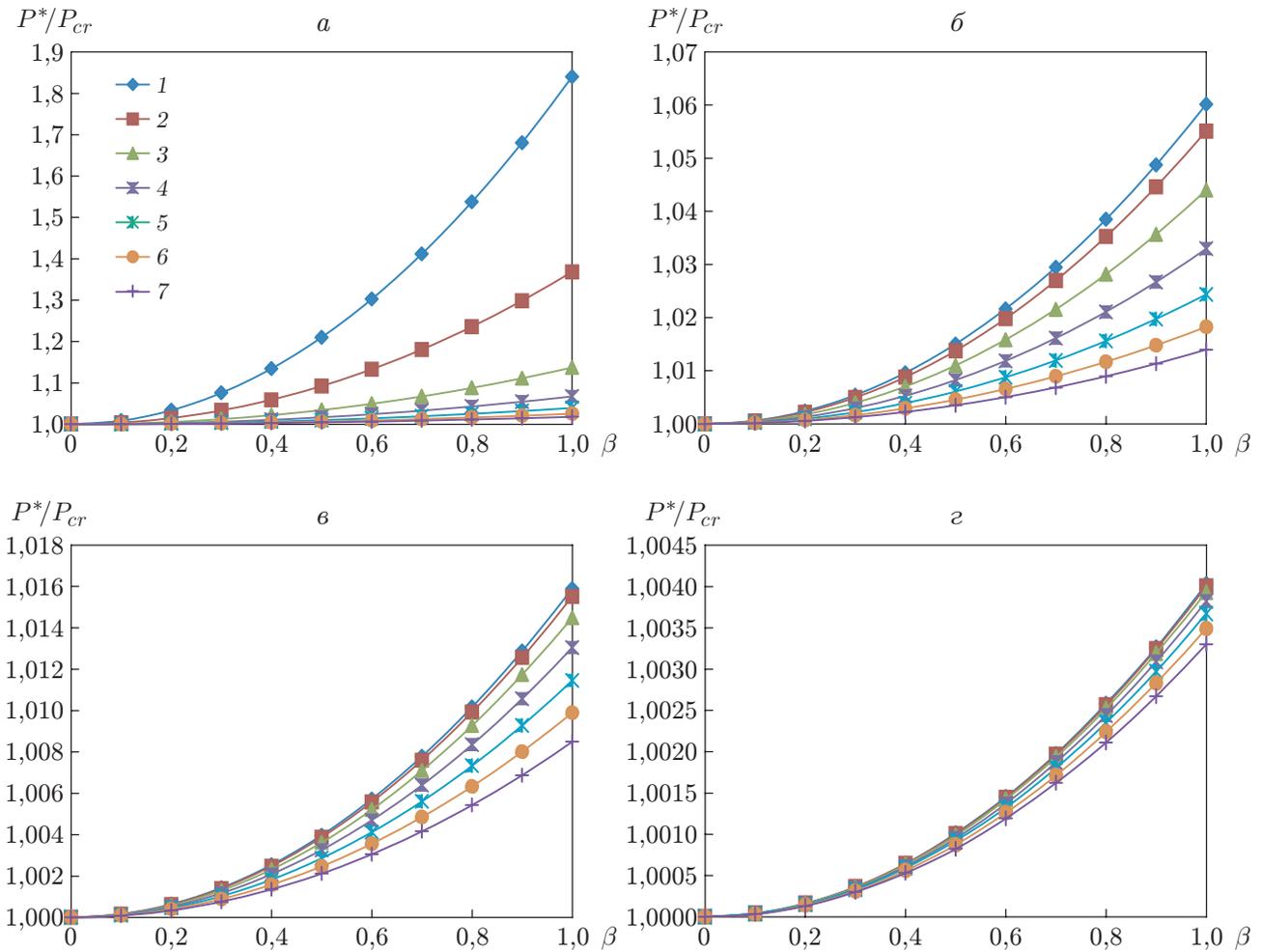


Рис. 4. Зависимости отношения P^*/P_{cr} от амплитуды кручения β при различных значениях жесткостей оснований Пастернака ξ и Винклера λ :
 а — $\lambda = 0$, б — $\lambda = 25$, в — $\lambda = 50$, г — $\lambda = 100$; 1 — $\xi = 0$, 2 — $\xi = 5$, 3 — $\xi = 10$, 4 — $\xi = 15$, 5 — $\xi = 20$, 6 — $\xi = 25$, 7 — $\xi = 30$

зависимости отношения P^*/P_{cr} от амплитуды кручения β при различных значениях жесткостей оснований Пастернака ξ и Винклера λ .

Из приведенных на рис. 4 зависимостей следует, что с увеличением β отношение P^*/P_{cr} увеличивается. Скорость изменения отношения P^*/P_{cr} увеличивается с увеличением β . При одном и том же значении β отношение P^*/P_{cr} уменьшается при увеличении ξ . При увеличении ξ влияние амплитуды кручения β на отношение P^*/P_{cr} уменьшается.

В табл. 4 для значений амплитуды кручения $\beta \in [0, 1]$ приведены отношения P^*/P_{cr} при различных значениях жесткостей оснований Винклера и Пастернака. На рис. 5 для значений амплитуды кручения $\beta \in [0, 1]$ приведены зависимости отношения P^*/P_{cr} от жесткости основания Пастернака ξ при различных значениях жесткости основания Винклера λ .

Следует отметить, что зависимости $P^*/P_{cr}(\beta)$, представленные на рис. 2, сближаются при увеличении ξ от 0 до 100 быстрее, чем зависимости $P^*/P_{cr}(\beta)$, представленные на рис. 4, при увеличении λ от 0 до 100. Из уравнения (12) следует, что при фиксированных значениях β, K, λ критическая нагрузка, вычисленная с использованием нелинейной теории, увеличивается с увеличением параметра δ . Увеличение любого из параметров K, λ

Таблица 4

Значения отношения P^*/P_{cr} при значениях амплитуды кручения $\beta \in [0, 1]$ и различных значениях жесткостей оснований Винклера и Пастернака

ξ	$P^*/P_{cr}, \%$				
	$\lambda = 0$	$\lambda = 25$	$\lambda = 50$	$\lambda = 75$	$\lambda = 100$
0	82,433 560	5,950 430	1,572 748	0,706 951	0,398 984
5	36,319 340	5,450 002	1,534 754	0,698 951	0,395 984
10	13,560 420	4,354 084	1,433 799	0,676 953	0,388 984
15	6,633 556	3,260 924	1,290 832	0,643 961	0,377 985
20	3,867 492	2,412 421	1,133 875	0,601 964	0,362 985
25	2,518 370	1,807 675	0,978 902	0,554 967	0,345 990
30	1,764 682	1,383 806	0,840 933	0,507 975	0,326 990

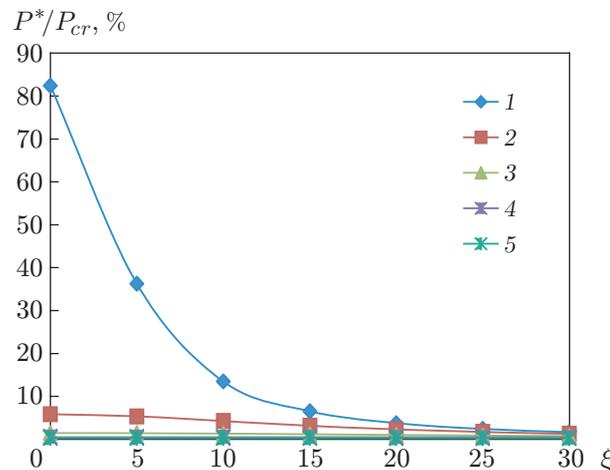


Рис. 5. Зависимость отношения P^*/P_{cr} от жесткости основания Пастернака ξ для значений амплитуды кручения $\beta \in [0, 1]$ при различных значениях жесткости основания Винклера λ :

1 — $\lambda = 0$, 2 — $\lambda = 25$, 3 — $\lambda = 50$, 4 — $\lambda = 75$, 5 — $\lambda = 100$

приводит к уменьшению критической нагрузки. Следует отметить, что при постоянных значениях K , δ скорость изменения критической нагрузки P^* , вычисленной с использованием нелинейной теории, уменьшается при увеличении β и λ (см. рис. 2) и при увеличении β и ξ (см. рис. 4).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Timoshenko S. P.** Theory of elastic stability. 2nd ed. / S. P. Timoshenko, J. M. Gere. N. Y.: McGraw-Hill, 1961. P. 212–229.
2. **Vlasov V. Z.** Thin-walled elastic beams. 2nd ed. Washington: Nat. Sci. Found., 1961.
3. **Timoshenko S. P.** Strength of materials. 3rd ed. Washington: D. VanNostarnd, 1961. Pt 1.
4. **Buckley J. C.** The bifilar property of twisted strips // Philos. Mag. 1914. V. 28. P. 778–787.
5. **Cullimore M. S. G.** The shortening effect — a non-linear feature of pure torsion // Engineering structures. L.: Butterworths, 1949. P. 153–164.
6. **Tso W. K., Ghobarah A. A.** Non-linear non-uniform torsion of thin-walled beams // Intern. J. Mech. Sci. 1971. V. 13. P. 1039–1047.

7. **Ghobarah A. A., Tso W. K.** A non-linear thin-walled beam theory // Intern. J. Mech. Sci. 1971. V. 13. P. 1025–1038.
8. **Bazant Z. P., El Nimeiri M.** Large deflections spatial buckling of thin-walled beams and frames // J. Engng Mech. Div. Proc. ASCE. 1973. V. 99. P. 1259–1281.
9. **Epstein M., Murray D. W.** Three-dimensional large deformation analysis of thin-walled beams // Intern. J. Solids Structures. 1976. V. 12. P. 867–876.
10. **Szymczak C.** Buckling and initial post-buckling behaviour of thin-walled I-columns // Comput. Structures. 1980. V. 11. P. 481–487.
11. **Roberts T. M., Azizian Z. G.** Instability of thin-walled bars // Proc. ASCE. J. Engng Mech. 1983. V. 109. P. 781–794.
12. **Wekezer J. W.** Instability of thin walled bars // Proc. ASCE. J. Engng Mech. 1985. V. 111. P. 923–935.
13. **Wekezer J. W.** Non-linear of torsion of thin-walled bars of variable cross-sections // Intern. J. Mech. Sci. 1985. V. 27. P. 631–641.
14. **Grimaldi A., Pignataro M.** Postbuckling behavior of thin-walled open cross-section compression members // J. Structural Mech. 1979. V. 7, N 2. P. 143–159.
15. **Kameswara Rao C., Gupta B. V. R., Rao D. L. N.** Torsional vibrations of thin-walled beams on continuous elastic foundations using finite element method // Proc. of the Intern. conf. on finite element methods in engineering. Coimbatore: Coimbatore Inst. of technol., 1974. P. 231–248.
16. **Kameswara Rao C., Appala Satyam A.** Torsional vibrations and stability of thin-walled beams on continuous elastic foundation // AIAA J. 1975. V. 13. P. 232–234.
17. **Hatenyi M.** Beams on elastic foundation. Ann Arbor: Univ. Michigan Press, 1946. P. 151–155.
18. **Selvadurai A. P. S.** Elastic analysis of soil-foundation interaction. N. Y.: Elsevier Sci., 1979.
19. **Kameswara Rao C., Mirza S.** Torsional post-buckling of thin-walled open section beams resting on a continuous elastic foundation // Thin-walled Structures. 1989. V. 8. P. 55–62.
20. **Simão P. D.** Post-buckling bifurcational analysis of thin-walled prismatic members in the context of the generalized beam theory: PhD Thesis. Coimbra: Univ. Coimbra, 2007.
21. **Pignataro M., Rizzi N., Puta G., Varano V.** The effects of warping constraints on the buckling of thin-walled structures // J. Mech. Materials Structures. 2009. V. 4, N 10. P. 1711–1727.
22. **Camotim D., Basaglia C., Silvestre N.** GBT buckling analysis of thin-walled steel frames: A state-of-the-art report // Thin-walled Structures. 2010. V. 48. P. 726–743.
23. **Kujawa M.** Torsion of restrained thin-walled bars of open constant bi-symmetric cross-section // Task Quart. 2011. V. 16, N 1. P. 5–15.
24. **Rizzi N. L., Varano V.** The effects of warping on the post-buckling behaviour of thin-walled structures // Thin-walled Structures. 2011. V. 49. P. 1091–1097.
25. **Kujawa M., Szymczak C.** Elastic distortional buckling of thin-walled bars of closed quadratic cross section // Mech. Mech. Engng. 2013. V. 17, N 2. P. 119–126.
26. **Pasternak P. L.** Fundamentals of a new method for calculating elastic two-parameter foundations. M.: Gos. Izd. Lit. Stroit. Arkhit., 1954.

*Поступила в редакцию 15/VIII 2016 г.,
в окончательном варианте — 27/XII 2016 г.*