Теплофизика и аэромеханика, 2017, том 24, № 1

УДК 536.37

Влияние теплового излучения на смешанное конвективное течение в пограничном слое вязкоупругой жидкости на поверхности круглого цилиндра с постоянной температурой

Х. Ахмад, Т. Джавед, А. Гаффари

Международный исламский университет, Исламабад, Пакистан

E-mail: hussainahmad686@yahoo.com

Проанализировано влияние смешанного конвективного течения в слое вязкоупругой жидкости на поверхности изотермического горизонтального круглого цилиндра. Определяющие уравнения пограничного слоя сводятся к безразмерным нелинейным дифференциальным уравнениям в частных производных и затем решаются численно с помощью метода Келлера. Обсуждению коэффициента поверхностного трения и числа Нуссельта уделено особое внимание. Эти величины рассматриваются в зависимости от параметра кривизны. Влияния параметра смешанной конвекции и параметра переноса излучением на коэффициент поверхностного трения и число Нуссельта иллюстрируются с помощью графиков и таблицы. Точки отрыва пограничного слоя вдоль поверхности цилиндра также вычисляются с/без излучения, проводится их сравнение. Наличие излучения способствует уменьшению коэффициента поверхностного трения в противоположно направленном потоке и увеличивает его для спутного потока. Увеличение параметра переноса излучением влечет возрастание коэффициента поверхностного трения и числа Нуссельта для вязкоупругих жидкостей. Торможение пограничного слоя происходит за счет теплового излучения.

Ключевые слова: вязкоупругая жидкость, круглый цилиндр, смешанная конвекция, течение в пограничном слое, тепловое излучение, численное решение.

Введение

Смешанная конвекция имеет большое значение для многих технических приложений, в том числе при нагреве или охлаждении теплообменников, в химических процессах, в технологиях применения ядерной энергии и некоторых аспектах электронного охлаждения. Дело в том, что потоки жидкости, обусловленные силами плавучести, возникающими в процессе теплопереноса, становятся сопоставимыми со скоростью сводобного потока. Смешанные конвективные течения над горизонтальными круглыми цилиндрами часто встречаются во многих физических и технических приложениях на геотермальных электростанциях и при буровых работах. Данное направление стало предметом многих исследователей в течение последних трех десятилетий. Автор [1] был первым, кто провел всесторонний анализ смешанного конвективного течения в пограничном слое на поверхности горизонтального круглого цилиндра. Он исследовал точки отрыва пограничного слоя на поверхности цилиндра. Позже в работе [2] исследовался смешанный конвективный перенос тепла от изотермического горизонтального круглого цилиндра, а работа [3] посвящалась смешанному конвективному течению в пограничном слое на горизонтальном круглом цилиндре с постоянной температурой поверхности. В последние годы течение вязкоупругой жидкости вызвало значительный интерес из-за его инженерных приложений и применений в ряде технологических процессов, например, в нефтяном бурении, производстве продуктов питания, бумаги, краски, покрытий, чернил, горючего для реактивных систем и др. Вязкоупругая жидкость — это явление второго рода. Всестороннее обсуждение жидкостей второго и третьего порядков осуществлялось в работе [4]. Авторы [5–7] также изучали вязкоупругие жидкости в различных геометрических условиях. Необходимо отметить работы [8–11], посвященные жидкостям второго порядка. Авторы [12] исследовали установившиеся смешанные конвективные течения в пограничном слое вязкоупругой жидкости на горизонтальном круглом цилиндре с постоянным тепловым потоком.

Исследование конвективного теплообмена при учете теплового излучения имеет большое значение, особенно в процессах, связанных с высокой температурой, например, в газовых турбинах, атомных электростанциях и аккумуляторах тепловой энергии. В работе [13] с помощью диффузионного приближения Росселанда анализировалось воздействие теплового излучения на смешанную конвекцию вдоль вертикальной пластины с равномерными скоростью свободного течения и температурой поверхности; в [14] исследовалось тепловое излучение серой жидкости, которая излучает и поглощает излучение в нерассеивающей среде. Авторы [15] обсуждали поток с излучением в присутствии магнитного поля. В [16] изучалось влияние теплового излучения на течение в пограничном слое при экспоненциальном растяжении поверхности. В работе [17] исследовалось влияние теплового излучения на магнитно-гидродинамическое течение жидкости второго рода. Влияние излучения на естественное конвективное ламинарное течение над горизонтальным круглым цилиндром рассматривалась в работе [18]. Был сделан вывод, что увеличение излучения вызывает возрастание скорости и толщины теплового пограничного слоя. Из известной авторам литературы следует, что радиационное воздействие на смешанное конвективное течение вязкоупругих жидкостей над изотермическим круглым цилиндром еще не рассматривалось, и предлагаемое исследование посвящено этой проблеме.

В настоящей работе изучается воздействие теплового излучения на смешанный конвективный пограничный слой вязкоупругой жидкости на изотермическом горизонтальном круглом цилиндре с учетом диффузионного приближения Росселанда. Основные уравнения приводятся в безразмерную форму и решаются численно с помощью точной и эффективной конечно-разностной схемы, а именно способом Келлера. Полученные результаты сравниваются для $K = 0$ и $R_d = 0$ (K и R_d — параметры вязкоупругости среды и проводимости излучения) с результатами работы [3]. Установлено, что результаты настоящего исследования хорошо согласуются с данными предыдущих работ.

1. Математическая постановка задачи

Рассматривается смешанное конвективное течение в пограничном слое на горизонтальном круглом цилиндре, погруженным в вязкоупругую жидкость второго рода, при наличии теплового излучения. Горизонтальный круглый цилиндр имеет радиус a, температура его поверхности T_w поддерживается постоянной, цилиндр находится в потоке вязкоупругой жидкости с постоянной температурой T_∞. Физическая модель и соответствующая система координат показаны на рис. 1.

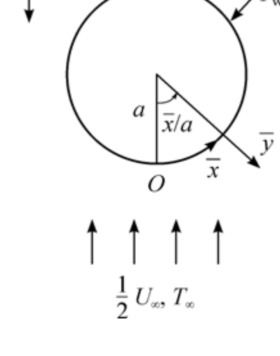

Рис. 1. Физическая модель задачи.

Как и в работе [1], предполагается, что постоянная скорость свободного потока равна $\frac{1}{2}U_\infty$ и направлена вертикально вверх так, что скорость свободного потока для пограничного слоя $\bar{u}_e(\bar{x}) = U_\infty \sin(\bar{x}/a)$. Здесь $T_w > T_\infty$ соответствует нагретому цилиндру (спутное течение), а $T_w > T_\infty$ соответствует охлажденному цилиндру (встречное течение). Длина круглого цилиндра считается достаточно большой, чтобы пренебречь концевыми эффектами. В этих предположениях уравнения непрерывности, импульса, энергии в приближениях Буссинеска и пограничного слоя имеют вид (см. [3] и [12]):

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0, \tag{1}$$

$$\begin{gathered}\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = \bar{u}_e\frac{d\bar{u}_e}{d\bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{k_o}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left(\bar{u}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}\right) + \bar{v}\frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{y}^3} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}\partial \bar{y}}\right] + \\ + g\beta\left(T - T_\infty\right)\sin\left(\frac{\bar{x}}{\alpha}\right),\end{gathered} \tag{2}$$

$$\bar{u}\frac{\partial T}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial T}{\partial \bar{y}} = \frac{k}{\rho C_p}\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial \bar{y}^2} - \frac{1}{\rho C_p}\cdot\frac{\partial q_r}{\partial \bar{y}}, \tag{3}$$

где $\bar{x}$ и $\bar{y}$ — декартовы координаты, измеренные вдоль и по нормали к поверхности цилиндра соответственно. Здесь $\bar{x}$ измеряется от нижней точки торможения цилиндра, $\bar{u}$ и $\bar{v}$ — компоненты скорости в направлениях $\bar{x}$ и $\bar{y}$ соответственно, ν — кинематическая вязкость, ρ — плотность жидкости, T — температура, C_p — удельная теплоемкость, k — теплопроводность жидкости, k_0 — параметр вязкоупругости материала (случай, когда $k_0 = 0,$ соответствует ньютоновской жидкости), g — ускорение силы тяжести, q_r — радиационный тепловой поток, α и β — коэффициенты температуропроводности и теплового расширения соответственно. Для удовлетворения условий термодинамики, как полагают авторы работы [4], k_0 считается положительным. Поскольку определяющие уравнения для вязкоупругой жидкости на один порядок выше, чем для ньютоновских жидкостей, требуется дополнительное граничное условие $\partial\bar{u}/\partial\bar{y} \to 0,$ когда $\bar{y} \to \infty,$ предложенное в работе [19] для численного решения дифференциальных уравнений (1–3). Граничные условия для рассматриваемой задачи задаются следующим образом:

$$\left.\begin{array}{l}\bar{u} = 0,\ \bar{v} = 0,\ T = T_w \ \text{при}\ \bar{y} = 0, \\ \bar{u} \to \bar{u}_e(\bar{x}),\ \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \to 0,\ T \to T_\infty \ \text{при}\ \bar{y} \to \infty,\end{array}\right\}\ \bar{x} \ge 0. \tag{4}$$

Радиационный тепловой поток q_r упрощается диффузионным приближением Росселанда [20]:

$$q_r = -\frac{4\sigma}{3(\alpha_r + \sigma_s)}\cdot\frac{\partial T^4}{\partial \bar{y}}, \tag{5}$$

где σ — постоянная Стефана–Больцмана, α_{r} — средний коэффициент поглощения Росселанда, σ_{s} — коэффициент рассеяния. Будем считать, что разница температур жидкой фазы внутри потока достаточно мала, как указано в работе [15], поэтому T^4 можно разложить в ряд как линейную функцию температуры T и пренебречь условиями более высокого порядка:

$$T^4 \approx 4T_\infty^3 T - 3T_\infty^4. \tag{6}$$

Тогда выражение (5) сводится к виду

$$q_{\mathrm{r}} = -\frac{16\sigma T_\infty^3}{3(\alpha_{\mathrm{r}} + \sigma_{\mathrm{s}})} \cdot \frac{\partial T}{\partial \bar{y}}. \tag{7}$$

Стоит отметить, что диффузионное приближение Росселанда действует внутри среды, но не около границ. Оно применимо только для оптически толстого пограничного слоя. Так как выражение (7) не учитывает излучения с поверхности границы, оно не пригодно для полноценного описания физической ситуации вблизи поверхности. Иными словами, влияние границы внутри оптически толстого пограничного слоя не учитывается, поскольку излучение от границ становится очень слабым еще до достижения внутренней области [18].

Безразмерные переменные вводятся следующим образом:

$$\begin{cases} x = \bar{x}/a, \;\; y = \mathrm{Re}^{\frac{1}{2}}(\bar{y}/a), \;\; u = \bar{u}/U_\infty, \;\; v = \mathrm{Re}^{\frac{1}{2}}(\bar{v}/U_\infty), \\ u_e(x) = \bar{u}_e(\bar{x})/U_\infty, \;\; \theta = T - T_\infty / \;\; T_{\mathrm{w}} - T_\infty, \end{cases} \tag{8}$$

где $\mathrm{Re} = aU_\infty / \nu$ — число Рейнольдса. После подстановки уравнений (7) и (8) в уравнения (1–3) получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{9}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = u_e\frac{du_e}{dx} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + K\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + v\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \lambda\theta\sin(x),\right] \tag{10}$$

$$u\frac{\partial \theta}{\partial x} + v\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{\mathrm{Pr}}\left(1 + \frac{4}{3}R_d\right)\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}, \tag{11}$$

где Pr — число Прандтля, K — безразмерный параметр вязкоупругости, λ — параметр постоянной смешанной конвекции, R_d — параметр проводимости излучения или число Планка, которые имеют вид:

$$\mathrm{Pr} = \frac{\mu C_p}{k}, \;\; K = \frac{k_0 U_\infty}{\rho a \nu}, \;\; \lambda = \frac{\mathrm{Gr}}{\mathrm{Re}^2}, \;\; R_d = \frac{4\sigma T_\infty^3}{k(\alpha_{\mathrm{r}} + \sigma_{\mathrm{s}})}, \tag{12}$$

здесь $\mathrm{Gr} = g\beta(T_{\mathrm{w}} - T_\infty)a^3/\nu^2$ — число Грасгофа. Параметр смешанной конвекции λ, в который входит Gr, указывает на то, что $\lambda > 0$ соответствует спутному течению ($T_{\mathrm{w}} > T_\infty$), а $\lambda < 0$ — встречному течению ($T_{\mathrm{w}} < T_\infty$), и $\lambda = 0$ соответствует случаю вынужденной конвекции. Для $K = 0$ получаем случай для вязких (ньютоновских) жидкостей. Граничные условия (4) можно записать следующим образом:

$$\left.\begin{array}{r} u = 0, \; v = 0, \; \theta = 1 \;\text{ при } y = 0, \\ u \to U_e(x), \; \partial u/\partial y \to 0, \; \theta \to 0 \;\text{ при } y \to \infty \end{array}\right\} x \ge 0. \tag{13}$$

Чтобы решить уравнения (9–11) с учетом граничных условий (13), будем считать, что $u_e(x) = \sin x,$ как указано в работе [1]. Введем следующие переменные:

$$\psi = xF(x, y), \ \ \theta = \theta(x, y), \tag{14}$$

где ψ является функцией тока, задаваемой как:

$$u = \partial\psi/\partial y, \quad v = -\partial\psi/\partial x. \tag{15}$$

Использование уравнений (14) и (15) в уравнениях (10) и (11) позволяет записать:

$$\frac{\partial^3 F}{\partial y^3} + F\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \frac{\sin x\cos x}{x} + \lambda\frac{\sin x}{x}\theta - K\left[F\frac{\partial^4 F}{\partial y^4} - 2\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial^3 F}{\partial y^3} + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + x\left\{\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial^4 F}{\partial y^4} - \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^3 F}{\partial y^3} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^3 F}{\partial x\partial y^2} - \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial^4 F}{\partial x\partial y^3}\right\}\right] = x\left(\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} - \frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right), \tag{16}$$

$$\frac{1}{\mathrm{Pr}}\left(1 + \frac{4}{3}R_d\right)\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} + F\frac{\partial\theta}{\partial y} = x\left(\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial y}\right). \tag{17}$$

Граничные условия будут иметь вид:

$$\begin{gathered} F = 0,\ \ \partial F/\partial y = 0,\ \ \theta = 1 \ \text{ при } \ y = 0,\ \ x \ge 0, \\ \partial F/\partial y \to \frac{\sin x}{x},\ \ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \to 0,\ \ \theta \to 0 \ \text{ при } \ y \to \infty,\ \ x \ge 0, \end{gathered} \tag{18}$$

где штрих обозначают дифференцирование по y.

Физические величины, вызывающие основной интерес, — это напряжение сдвига и скорость теплопереноса, связанные с коэффициентом поверхностного трения C_f и числом Нуссельта Nu соответственно. Для данной задачи они задаются как

$$C_f = \mathrm{Re}^{\frac{1}{2}}\frac{(\tau_{\mathrm{w}})_{\bar{y}=0}}{\rho U_\infty^2},\ \ \mathrm{Nu} = \mathrm{Re}^{-\frac{1}{2}}\frac{a(q_{\mathrm{w}} + q_{\mathrm{r}})_{\bar{y}=0}}{k(T_{\mathrm{w}} - T_\infty)}, \tag{19}$$

где τ_{w} и q_{w} — коэффициент поверхностного трения и тепловой поток на поверхности соответственно, которые определяются следующим образом:

$$\tau_{\mathrm{w}} = \mu\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}\right)_{\bar{y}=0} + k_0\left(\bar{u}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{x}\partial\bar{y}} + \bar{v}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{y}^2} + 2\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}\cdot\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}\right)_{\bar{y}=0},\ \ q_{\mathrm{w}} = -k\left(\frac{\partial T}{\partial\bar{y}}\right)_{\bar{y}=0}. \tag{20}$$

С помощью уравнений (4) и (14) уравнение (19) принимает вид:

$$C_f = x\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_{y=0},\ \ \mathrm{Nu} = -(1 + \frac{4}{3}R_d)\theta'(x, 0). \tag{21}$$

В нижней точке торможения цилиндра, т.е. при $x \approx 0,$ дифференциальные уравнения в частных производных (16–17) с граничными условиями (18) сводятся к следующим обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$f''' + ff'' - (f')^2 + 1 + \lambda\theta - K(ff^{iv} - 2f'f''' + f''^2) = 0, \tag{22}$$

$$\frac{1}{\mathrm{Pr}}(1 + \frac{4}{3}R_d)\theta'' + f\theta' = 0 \tag{23}$$

с граничными условиями

$$f(0)=0,\ \ f'(0)=0,\ \ \theta(0)=1;\ \ f'(\infty)=1,\ \ f''(\infty)=0,\ \ \theta(\infty)=0, \tag{24}$$

где штрих обозначают дифференцирование по y. Коэффициент поверхностного трения C_f и число Нуссельта Nu имеют вид

$$C_f = xf''(0),\ \ \mathrm{Nu}=-(1+\frac{4}{3}R_d)\theta'(0). \tag{25}$$

2. Результаты и обсуждение

Системы дифференциальных уравнений в частных производных (16) и (17) с учетом граничных условий (18) и обыкновенные дифференциальные уравнения (22) и (23) с учетом граничных условий (24) решаются численно с помощью неявной конечно-разностной схемы, известной как метод Келлера. Метод очень хорошо объясняется в монографии [21] и в работе [22]. Размер шага Δy по y и границе пограничного слоя y_∞ подбирается для различных значений параметров λ, K and R_d для достижения точности результатов. В настоящем численном исследовании размер шага был выбран $\Delta y = 0,02$ и $\Delta x = \pi/180$. Численное решение получается в нижней точке торможения цилиндра $x \approx 0$ и далее вокруг цилиндра до точки отрыва.

Результаты для коэффициента поверхностного трения C_f и числа Нуссельта Nu получены для ряда значений параметра смешанной конвекции λ, параметра вязкоупругости K и параметра проводимости излучения R_d при $\Pr = 1$. Сравнение значений коэффициента поверхностного трения C_f и числа Нуссельта Nu с заявленными в работе [3] для ньютоновской жидкости (K = 0) иллюстрируется на рис. 2*a*, 2*b*. Оно показывает отличное соответствие полученных результатов и данных работы [3]. Влияние теплового излучения на коэффициент поверхностного трения C_f и на число Нуссельта Nu представлено на этом же рисунке. Для охлажденного цилиндра $(\lambda < 0)$ заметно небольшое уменьшение поверхностного трения, в то время как для нагретого цилиндра $(\lambda > 0)$ отмечено его существенное увеличение вследствие излучения. Значительное увеличение числа Нуссельта из-за излучения наблюдается на обоих цилиндрах: охлажденном и нагретом. Кривые на рис. 2*a*, 2*b* показывают, что положительное значение параметра смешанной конвекции λ вызывает сопутствующий градиент давления, который способствует увеличению коэффициента поверхностного трения C_f и числа Нуссельта Nu.

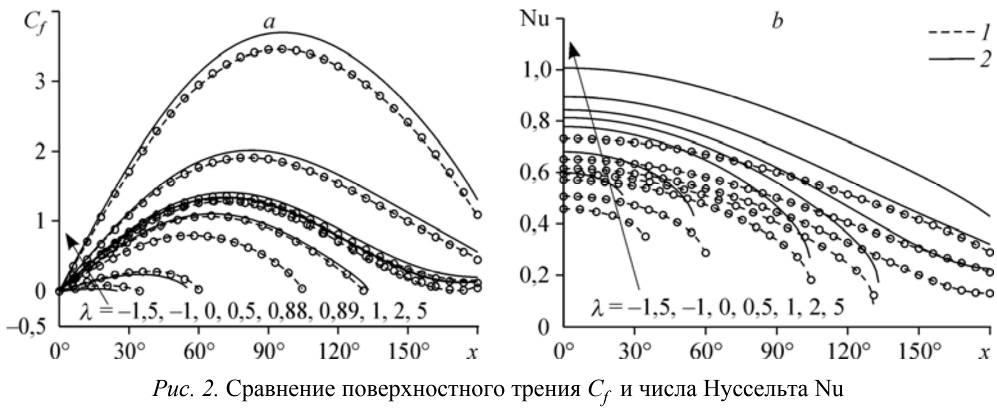

Рис. 2. Сравнение поверхностного трения C_f и числа Нуссельта Nu для K = 0 (ньютоновской жидкости) при Pr = 1 и различных значениях λ.
Символы — данные работы [3]; R_d = 0 (*1*), 0,5 (*2*).

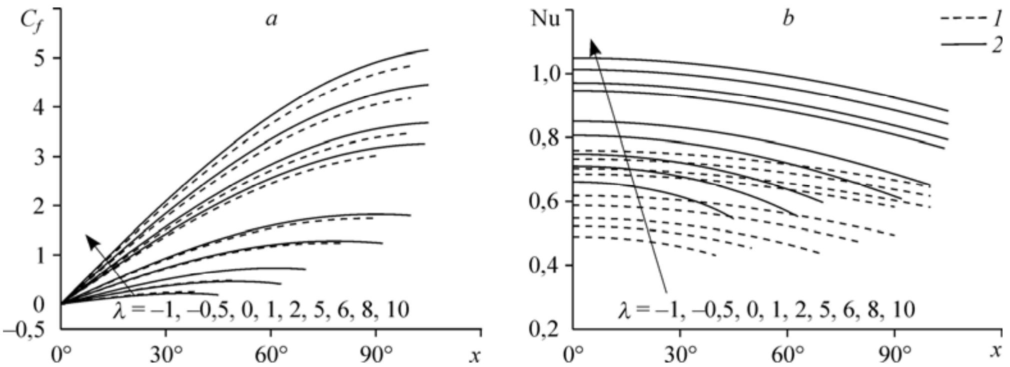

Рис. 3. Изменение поверхностного трения C_f и числа Нуссельта Nu в зависимости от параметра кривизны x для K = 0,2 (вязкоупругие жидкости) при Pr = 1 и различных значениях λ. R_d = 0 (*1*), 0,5 (*2*).

Рисунки 3*a*, 3*b* представляют графики коэффициента поверхностного трения C_f и числа Нуссельта Nu для вязкоупругой жидкости при $K = 0,2$. Кривые соответствуют разным значениям параметра смешанной конвекции λ в отсутствии и в присутствии эффектов излучения. Наличие излучения уменьшает поверхностное трение для $\lambda < 0$, но для $\lambda > 0$ его воздействие увеличивает поверхностное трение. Число Нуссельта Nu возрастает из-за влияния излучения для различных значений параметра смешанной конвекции λ в обоих случаях $(\lambda < 0)$ и $(\lambda > 0)$. Рисунки также показывают, что существует критическое значение $\lambda = \lambda_c(K)$, зависящее от параметра вязкоупругости, ниже которого решение пограничного слоя не представляется возможным. Такие же эффекты упоминались в работе [1] для ньютоновской жидкости. При достаточном охлаждении цилиндра $(\lambda < 0)$ естественная конвекция начинается в верхней точке торможения потока $(x \approx \pi)$, поток же, направленный вверх, не может преодолеть движение жидкости вниз рядом с цилиндром под действием сил плавучести, которые противостоят развитию пограничного слоя.

Рисунки 4*a*, 4*b* показывают влияние излучения для $K = 1$, $\mathrm{Pr} = 1$ и $\lambda = -1,4$ на коэффициент поверхностного трения C_f и число Нуссельта Nu соответственно. Для $\lambda < 0$ коэффициент поверхностного трения снижается с увеличением значения параметра проводимости излучения R_d, но, что примечательно, для $\lambda > 0$ коэффициент поверхностного

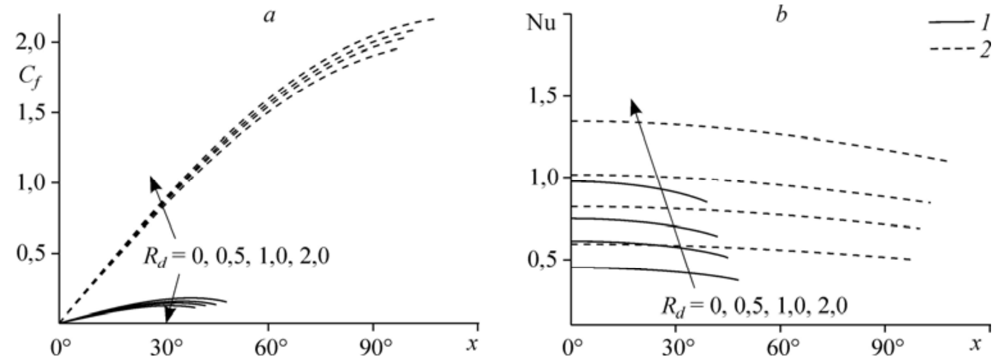

Рис. 4. Изменение поверхностного трения C_f и числа Нуссельта Nu в зависимости от параметра кривизны x для различных значений R_d при Pr = 1 и K = 1 с λ = –1 (*1*) (охлажденный цилиндр), 4 (*2*) (нагретый цилиндр).

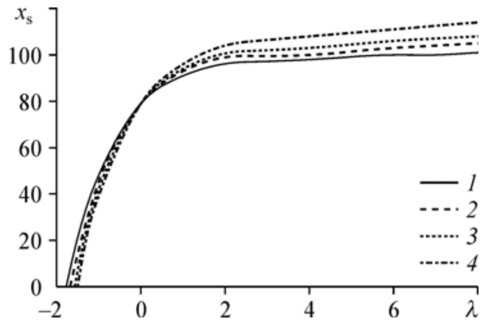

Рис. 5. Изменение положения точки отрыва пограничного слоя x_s с для Pr = 1 и K = 0,2. R_d = 0 (*1*), 0,5 (*2*), 1 (*3*), 2 (*4*).

трения увеличивается с увеличением значения параметра проводимости излучения R_d. С другой стороны, с увеличением R_d число Нуссельта Nu увеличивается в обоих случаях: охлажденного и нагретого цилиндра, т.е. при $\lambda < 0$ и $\lambda > 0$.

На рис. 5 изменение положения точки отрыва пограничного слоя x_s в зависимости от λ показано для Pr = 1, K = 0,2 и для различных значений параметра проводимости излучения R_d : $R_d = 0,\ 0,5,\ 1$ и 2. Показано, что для разных значений R_d существуют некоторые критические значения $\lambda = \lambda_0 (< 0)$, ниже которых решения пограничного слоя не существует. Замечено также, что за счет увеличения параметра проводимости излучения R_d критическое значение $\lambda = \lambda_0$ увеличивается, а отрыв пограничного слоя задерживается.

Влияние параметра проводимости излучения R_d на развитие линий тока и изотерм показано на рис. 6 и 7 для $K = 1$, $R_d = 0,\ 0,5$, Pr = 1 и $\lambda = 2$. Рисунок 6*a* иллюстрирует, что без действия излучения (т.е. $R_d = 0$) величина $\psi_{\max}$ в пределах расчетной области составляет 8,6 вблизи точки отрыва пограничного слоя $(x \approx 1,5)$. Вместе с тем, рис. 6*b* показывает, что для $R_d = 0,5$ величина $\psi_{\max}$ примерно равна 9,0 вблизи точки отрыва пограничного слоя. Таким образом, приходим к выводу, что тепловое излучение приводит к увеличению потока в пограничном слое. Рисунки 7*a* и 7*b* иллюстрируют значительное увеличение толщины пограничного слоя за счет теплового излучения. То же явление наблюдалось на рис. 8 и 9 для случая K = 1, $R_d = 0,\ 0,5$, Pr = 7 и $\lambda = 2$. Из таблицы видно, что коэффициент поверхностного трения C_f и число Нуссельта Nu возрастают при увеличении значения параметра проводимости излучения R_d.

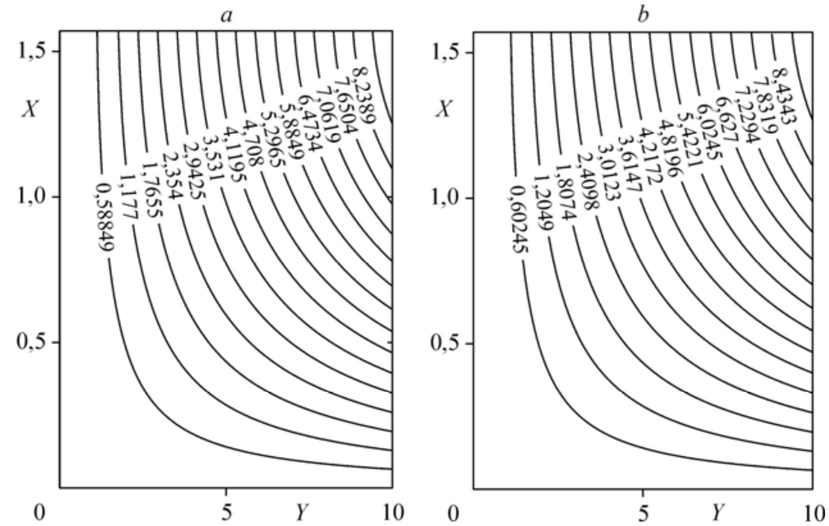

Рис. 6. Линии тока для R_d = 0 (*a*), 0,5 (*b*) при K = 1, Pr = 1 и λ = 2.

Таблица

Значения коэффициента поверхностного трения C_f и числа Нуссельта Nu для различных значений параметра проводимости излучения R_d при Pr =1, λ = 2, K = 0,2

x	R_d = 0,0		R_d = 0,5		R_d = 1,0		R_d = 2,0	
	C_f	Nu	C_f	Nu	C_f	Nu	C_f	Nu
0°	0	0,6187	0	0,8508	0	1,0461	0	1,3749
10°	0,3160	0,6171	0,3253	0,8487	0,3311	1,0435	0,3384	1,3716
20°	0,6211	0,6123	0,6396	0,8422	0,6512	1,0357	0,6659	1,3615
30°	0,9047	0,6042	0,9324	0,8315	0,9499	1,0228	0,9720	1,3448
40°	1,1574	0,5931	1,1944	0,8166	0,2177	1,0048	1,2472	1,3217
50°	1,3711	0,5789	1,4174	0,7977	1,4465	0,9820	1,4834	1,2923
60°	1,5394	0,5618	1,5950	0,7750	1,6299	1,9546	1,6742	1,2571
70°	1,6581	0,5419	1,7230	0,7230	1,7637	0,9229	1,8152	1,2164
80°	1,7253	0,5195	1,7993	1,7993	1,8458	0,8872	1,9045	1,1708
90°	1,7416	0,4947	1,8245	1,6864	1,8765	0,8481	1,9522	1,1208
100°	–	–	–	–	–	–	1,9311	1,0671

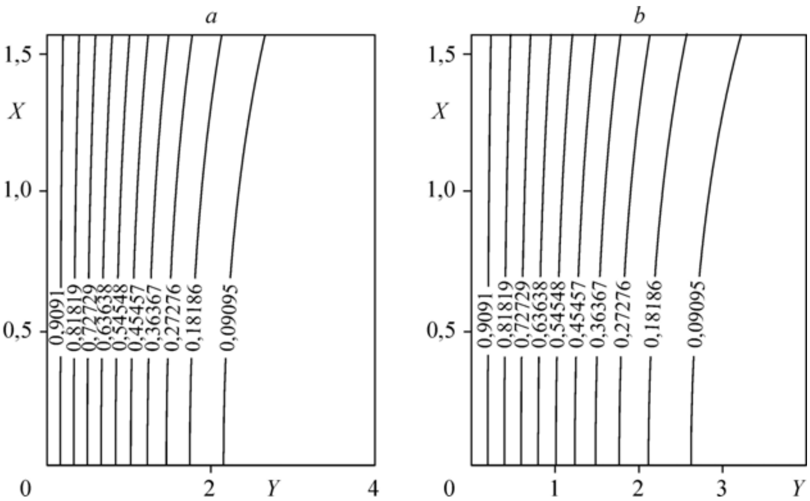

Рис. 7. Изотермы для R_d = 0 (*a*), 0,5 (*b*) при K = 1, Pr = 1 и λ = 2.

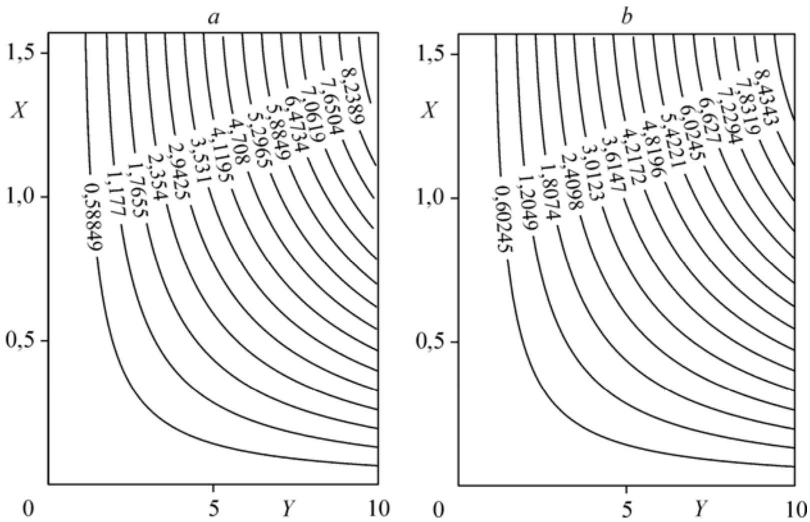

Рис. 8. Линии тока для R_d = 0 (*a*), 0,5 (*b*) при K = 1, Pr = 7 и λ = 2.

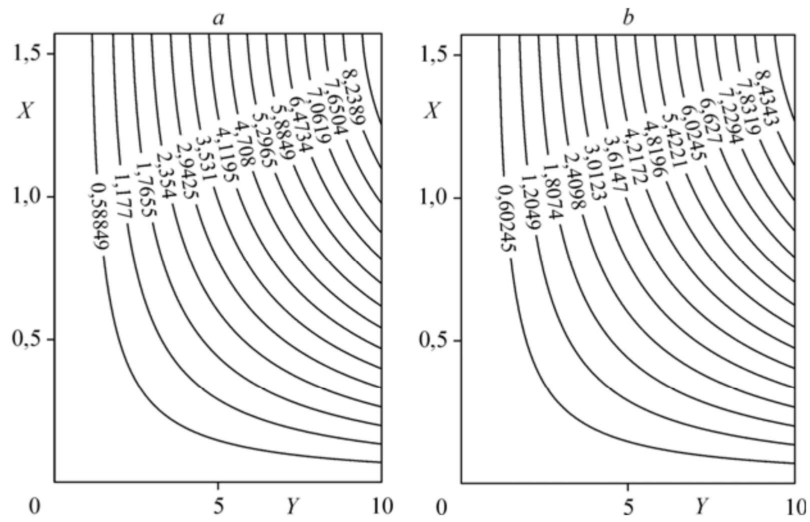

Рис. 9. Изотермы для $R_d = 0$ (*a*), 0,5 (*b*) при $K = 1$, $\mathrm{Pr} = 7$ и $\lambda = 2$.

Также отмечается, что коэффициент поверхностного трения C_f увеличивается вдоль поверхности цилиндра от нижней точки торможения до точки отрыва, а значение числа Нуссельта Nu уменьшается вдоль поверхности цилиндра от нижней точки торможения до точки отрыва.

Заключение

Изучено влияние излучения на смешанное конвективное течение пограничного слоя вязкоупругой жидкости через изотермический горизонтальный круглый цилиндр с постоянной температурой поверхности. Основные уравнения пограничного слоя для течения и теплообмена преобразуются в безразмерную нелинейную систему дифференциальных уравнений в частных производных, которые затем решаются численно с помощью метода Келлера. Обсуждено влияние параметра проводимости излучения R_d на поток, теплообмен и положение точки отрыва пограничного слоя x_s на поверхности цилиндра. Настоящее исследование позволяет сделать следующие выводы:

– излучение увеличивает поверхностное трение C_f для нагретого цилиндра ($\lambda > 0$), но уменьшает его для охлажденного цилиндра ($\lambda < 0$);

– излучение увеличивает число Нуссельта Nu в обоих случаях, когда $\lambda > 0$ и $\lambda < 0$;

– увеличение значения параметра проводимости излучения R_d приводит к увеличению значения и поверхностного трения C_f и числа Нуссельта Nu;

– увеличение параметра проводимости излучения R_d приводит к затягиванию отрыва пограничного слоя x_s.

Список литературы

1. **Merkin J.H.** Mixed convection from a horizontal circular cylinder // Int. J. Heat Mass Transfer. 1977. Vol. 20. P. 73–77.
2. **Badr H.M.** A theoretical study of laminar mixed convection from a horizontal cylinder in a cross stream // Int. J. Heat Mass Transfer. 1983. Vol. 26. P. 639–653.
3. **Anwar I., Amin S., Pop I.** Mixed convection boundary layer flow of a viscoelastic fluid over a horizontal circular cylinder // Int. J. Non-Linear Mech. 2008. Vol. 43. P. 814–821.
4. **Dunn J.E., Rajagopal K.R.** Fluids of differential type: critical review and thermodynamic analysis // Int. J. Eng. Sci. 1995. Vol. 33. P. 689–729.

5. **Ariel P.D.** Stagnation point flow of a viscoelastic fluid towards a moving plate // Int. J. Eng. Sci. 1995. Vol. 33. P. 1679–1687.
6. **Rajagopal K.R., Renardy M., Renardy Y., Wineman A.S.** Flow of viscoelastic fluids between plates rotating about distinct axes // Rheol. Acta. 1986. Vol. 25. P. 459–467.
7. **Rajagopal K.R.** Flow of viscoelastic fluids between rotating disks // Theor. Comput. Fluid Dyn. 1992. Vol. 3. P. 185–206.
8. **Cortell R.A.** Note on flow and heat transfer of a viscoelastic fluid over a stretching sheet // Int. J. Non-Linear Mech. 2006. Vol. 41. P. 78–85.
9. **Abel M.S., Khan S.K., Prasad K.V.** Study of visco-elastic fluid flow and heat transfer over a stretching sheet with variable viscosity // Int. J. Non-Linear Mech. 2002. Vol. 37. P. 81–88.
10. **Hayat T., Abbas Z., Javed T.** Mixed convection flow of a micropolar fluid over a nonlinear stretching sheet // Physics Letters A. 2008. Vol. 372, No. 5. P. 637–647.
11. **Sajid M., Abbas Z., Javed T., Ali N.** Boundary layer flow of an Oldroyed B fluid in the Region of stagnation point over a stretching sheet // Canadian J. Physics. 2010. Vol. 88. P. 635–640.
12. **Kasim A.R.M., Muhammad N.F., Shafie S., Pop I.** Constant heat flux solution for mixed convection boundary layer viscoelastic fluid // Int. J. Heat Mass Transfer. 2013. Vol. 49. P. 163–171.
13. **Hossain M.A., Takhar H.S.** Radiation effects on mixed convection along a vertical plate with uniform surface temperature // Int. J. Heat Mass Transfer. 1996. Vol. 31. P. 243–248.
14. **Hossain M.A., Alim M.A., Rees D.** The effect of radiation on free convection from a porous vertical plate // Int. J. Heat Mass Transfer. 1999. Vol. 42. P. 181–191.
15. **Raptis A., Perdikis C., Takhar H.S.** Effect of thermal radiation on MHD flow // Appl. Math. Comp. 2004. Vol. 153. P. 645–649.
16. **Sajid M., Hayat T.** Influence of thermal radiation on the boundary layer flow due to an exponentially stretching sheet // Int. Commun. Heat and Mass Transfer. 2008. Vol. 35. P. 347–356.
17. **Hayat T., Abbas Z., Sajid M., Asghar S.** The influence of thermal radiation on MHD flow of a second-grade fluid // Int. J. Heat Mass Transf. 2007. Vol. 50. P. 931–941.
18. **Molla M.M., Saha S.C., Khan M.A.I., Hossain M.A.** Radiation effects on natural convection laminar flow from a horizontal circular cylinder // Desalination and Water Treatment. 2011. Vol. 30. P. 89–97.
19. **Garg V.K., Rajagopal K.R.** Stagnation point flow of a non-Newtonian fluid // Mech. Res. Commun. 1990. Vol. 17. P. 415–421.
20. **Rosseland S.** Theoretical Astrophysics. London: Oxford University Press, 1936.
21. **Cebeci T., Bradshaw P.** Physical and Computational Aspects of Convective Heat Transfer. New York: Springer, 1984. 487 p.
22. **Keller H.B., Cebeci T.** Numerical methods in boundary layer theory // Annual Rev. Fluid Mech. 1978. Vol. 10. P. 417–433.

Статья поступила в редакцию 31 августа 2015 г.