О НЕЛИНЕЙНОЙ КОНВЕРСИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ИОННО-ЗВУКОВЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЛАЗМЫ

В. А. Липеровский, В. Н. Цытович

(Москва)

В работе авторов [1] была рассмотрена самосогласованная задача о генерации ионно-звуковых колебаний плазмы интенсивными ленгмюровскими колебаниями (случайные фазы), причем возбуждение ионнозвуковых колебаний сопровождается в одномерном приближении появлением сателлитов в спектре ленгмюровских колебаний, отстоящих от исходной частоты на частоты порядка ω_{0i}. В последнее время интерес к указанному вопросу сильно возрос в связи с экспериментальными исследованиями [2], показавшими, что подобное возбуждение действительно имеет место. При этом имеется качественное совпадение экспериментальных результатов с предсказаниями одномерной теории (даже без учета магнитного поля) в характере распределения сателлитов в плазме в зависимости от отношения уровней низкочастотных и высокочастотных колебаний. Результаты [2] заставляют более подробно проанализировать вопрос о развитии и распределении генерируемых сателлитов с учетом линейного поглощения ионнозвуковых волн, которым пренебрегалось в [1] и который при определенных условиях становится существенным. Выявление условий, при которых это поглощение существенно, представляет интерес и в более широком плане, поскольку механизм конверсии слабо поглощающихся ленгмюровских волн в хорошо поглощаемые ионнозвуковые мог бы обеспечить интенсивное поглощение ленгмюровских колебаний достаточно большой амплитуды за времена, много меньшие времени соударений [1]. В связи с этим ниже рассмотрена также самосогласованная задача о превращении поперечных высокочастотных волн $\omega \gg \omega_0$ в ионнозвуковые колебания при (оказавшейся наиболее вероятной, чем прямой процесс) многоступенчатой конверсии, когда поперечная волна генерирует при распаде ленгмюровскую [3], а затем ленгмюровская — ионнозвуковую. Расчет проведен с учетом поглощения ионнозвуковых волн и в одномерном приближении [2].

1. В процессе распада продольной ленгмюровской волны на ленгмюровскую (сателлит) и звуковую учет линейного поглощения звуковой волны в некоторых случаях может быть существен. Это поглощение связано с электронами, движущимися в фазе со звуковой волной, и может быть учтено в уравнениях для числа ионнозвуковых волн N^s работы [1] путем добавления члена (см., например, [4])

$$-\beta_\Lambda N^s, \qquad \beta_\Lambda = \left(\frac{\pi}{2}\,\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} \omega_s$$

Линейное поглощение звука качественно меняет картину распадного процесса с инкрементом γ, если $\beta \gg {}^1/_2\, \gamma N^l$, т. е.

$$\frac{Wl}{m_e n_0 v_e^2} \ll \frac{8\sqrt{2\pi}}{3}\left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{3/2} \frac{k_s \Delta k}{k_0^2} \tag{1.1}$$

$$\gamma = \frac{\omega_0^2 k_0}{8 m_e n_0 v_e^2}, \quad k_0 = \frac{1}{3\lambda_e}\left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2}, \quad W^l = N_1{}^l(0)\,\omega_0 \Delta k, \quad \lambda_e = \frac{v_e}{\omega_0}$$

Здесь W^l — энергия плазменных волн в начальный момент, N^l — число волн спектра с $k_1 > k_0$ (необходимое условие распада), ширина спектра $\Delta k_1 \ll 4\,k_0$, волновое число генерируемых при распаде звуковых волн $k_s = 2\,(k_1 - k_0)$.

При выполнении (1.1) число ионнозвуковых волн в процессе распада быстро достигает значения, определяемого равенством поглощения и генерации

$$\beta_\Lambda N^s = {}^1/_2 N_1{}^l N_2{}^l, \qquad N_2{}^l \equiv N^l(k_2), \qquad k_2 = k_1 - k_s$$

после чего изменение N^s адиабатически следует за изменением числа ленгмюровских квантов, N^l и N^s остается малым.

Поэтому в нелинейных уравнениях для N^l можно всюду пренебречь N^s по сравнению с N^l, и из них сразу следует, что в конечном состоянии вся энергия целиком перекачана к одному последнему сателлиту, который уже не способен распадаться.

---

[1] Естественно речь идет о колебаниях, для которых поглощение Ландау пренебрежимо мало $v_ф^l \gg v_e$.

[2] Роль неодномерности для распада поперечных волн в ленгмюровские обсуждается в [3] и приводит к критерию $\Delta\theta \ll (\omega_0 / \omega)^{3/2}$.

Для иллюстрации хода такого процесса приведем решение соответствующих нелинейных уравнений в случае двух сателлитов

$$N_0(t) = N_0(0)\left(\frac{N_1(0)\,N_2(0)}{N_0^2(0)}\,e^{N_0(0)\gamma t}+1\right)\left(\frac{N_1(0)}{N_0(0)}\,e^{N_0(0)\gamma t}+1\right)^{-1}$$

$$N_1(t) = N_1(0)\,e^{N_0(0)\gamma t}\left[\left(\frac{N_1(0)}{N_0(0)}\,e^{N_0(0)\gamma t}+1\right)\left(\frac{N_1(0)\,N_2(0)}{N_0^2(0)}\,e^{N_0(0)\gamma t}+1\right)\right]^{-1}$$

$$N_2(t) = N_2(0)\left(\frac{N_1(0)}{N_0(0)}\,e^{N_0(0)\gamma t}+1\right)\left(\frac{N_1(0)\,N_2(0)}{N_0^2(0)}\,e^{N_0(0)\gamma t}+1\right)^{-1} \qquad (1.2)$$

Отметим, что характерное время (инкремент) распадного процесса при условии сильного затухания не меняется, а меняется лишь распределение энергии по сателлитам. *При* выполнении неравенства, обратного (1.1), следуют результаты [1].

2. Рассмотрим более детально процесс распада с большим количеством $n-1$ красных сателлитов в условиях неравенства, обратного (1.1). Уравнение для сателлита с номером i и связанных с ним двух линий ионнозвуковых волн, соответствующих распаду и слиянию, позволяют получить для квазиравновесных состояний

$$N_i = \frac{N_i^l(\infty)}{N_1^l(0)}, \qquad N_2 = \frac{N_1(1-N_1)}{1-3N_1}, \qquad N_{i+1} = \frac{N_i(N_i-3N_{i-1})}{3N_i-5N_{i-1}} \quad (i \geqslant 2) \qquad (2.1)$$

Здесь N_1 определяется уравнением

$$1 = N_1 + \frac{N_1(1-N_1)}{1-3N_1} + \sum_{i=3}^{n}\frac{N_{i-1}(N_{i-1}-3N_{i-2})}{3N_{i-1}-5N_{i-2}} \qquad (2.2)$$

Например, для двух сателлитов из (2.1) имеем $N_1 = {}^2/_{14}$, $N_2 = {}^3/_{14}$, $N_3 = {}^9/_{14}$. Для пяти сателлитов $N_1 = 0.060$, $N_2 = 0.075$, $N_3 = 0.085$, $N_4 = 0.110$, $N_5 = 0.165$, $N_6 = 0.505$. Уже отсюда видно, что максимальное количество квантов продольных волн будет соответствовать последним «головным» двум—трем сателлитам — «фронту», распространяющемуся в k-пространстве. За «последними» сателлитами («фронтом») остается «хвост» — мало интенсивных «начальных» сателлитов, число квантов в каждом из которых постепенно уменьшается. По порядку величины скорость распространения «фронта» или «максимального» сателлита в k-пространстве

$$\frac{\Delta k}{\Delta t} \sim \frac{4k_0}{\tau} = 3k_0\gamma N_1^l(0) \qquad (2.3)$$

Эта скорость уменьшается по мере уменьшения интенсивности «головных» сателлитов. Такой процесс прекратится при достижении последним «головным» сателлитом k_0, где в результате будет скапливаться вся энергия волн. Учет поглощения ионно-звуковых волн усугубит картину процесса в направлении более полной перекачки энергии к «головному» сателлиту и уменьшения уровня «хвостовых» сателлитов до нуля.

3. Следует заметить, что распад спектра ленгмюровских волн в безграничной плазме представляет интерес также для более сложного процесса, в котором этот спектр генерируется. Примером такого процесса может служить многоступенчатая конверсия высокочастотных поперечных волн ($\omega \gg \omega_0$) в звуковые [1]. Такой процесс возможен в неизотермической плазме при условии $v_e \gg c\sqrt{m_e/9\,m_i}$. Для распадов поперечных волн используем одномерные уравнения работы [3]. При таком распаде генерируются релятивистские плазменные волны с $k^l = \omega_0/c$. Если уровень генерируемых N_1^l настолько высок, что затуханием ионного звука можно пренебречь и отношение инкрементов для распадов $l \to s + l'$ и $t \to l + t'$

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \frac{8\pi^2}{3}\left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2}\frac{c^3}{v_e^3} \gg 1 \qquad (3.1)$$

то для начальной задачи легко получить, что двуступенчатый распад $t \to l + t' \to s + l' + t'$, если ограничиться одним ленгмюровским сателлитом, идет с инкрементом, в четыре раза меньшим инкремента распада $t \to l + t'$ [3].

Такое уменьшение инкремента объясняется тем, что с относительной точностью α/γ в каждый момент времени течения медленного распадного процесса $t \to l + t'$ система линий находится в квазистационарном состоянии относительно распадного быстрого процесса $l \to l' + s$, при котором в квазистационарном состоянии лишь $^1/_4$ первоначального количества квантов остается в основной линии, а $^3/_4$ — в первом продольном сателлите.

[1] Аналогичная задача с фиксированной фазой рассмотрена в работе [5].

Наличие большого числа продольных сателлитов еще сильнее замедлит рассматриваемый многоступенчатый распад. Условие (3.1) имеет место в наиболее интересном случае, практически при $\omega_0 / \omega \lesssim 10^{-2}$ (учитывая, что $v_e > c\ (m_e / 9m_i)^{1/2}$).

В менее интересном случае

$$\frac{8\pi^2}{3}\left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2}\frac{c^3}{v_e^3} < \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \ll 1$$

наоборот, $t \rightarrow l + t'$ распад происходит быстрее и дальнейшие распады $l \rightarrow s + l'$ на темпе первого процесса не сказываются.

В случае двухступенчатого распада при условии (1.1), когда существенно затухание ионного звука, процесс распада, идущий вначале по закону (например, для N_2^t числа волн первого поперечного сателлита)

$$N_2^t = N_1^t(0) - \sqrt{N_1^{t^2}(0) - 2N_1^t(0)\, N_2^t(0) \exp\left(N_s^t(0)\, \beta t\right)}, \qquad \beta = \alpha\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^3 \tag{3.2}$$

до достаточно малых значений N_2^t, определяющихся уравнением

$$N_2^t = \frac{\alpha}{\beta} N_2^l(0)\left(\frac{2N_2^t(0) - N_1^t(0)}{2N_2^t - N_1^t(0)}\right)^{\gamma/2\alpha} \tag{3.3}$$

далее фактически приостанавливается, поскольку при соответствующем уровне N_2^l второго сателлита все генерируемые кванты первого продольного сателлита N_1^l практически сразу распадаются.

4. Кратко остановимся на результатах рассмотрения граничных квазистационарных одномерных задач, что представляет интерес, поскольку достаточный для проявления нелинейных эффектов уровень продольных волн в плазме может создаваться какими-либо источниками на границе, как, например, в [2].

Положим, что при $x = 0$ в плазму входит поток продольных волн. Используя те же уравнения [1, 3] с заменой оператора $\partial(\ldots) / \partial t \rightarrow V\partial(\ldots) / \partial x$ (где $V = \partial\omega / \partial k$ — групповая скорость), получим, что характерная длина распада в случае одного ленгмюровского сателлита имеет порядок

$$x_0 = \frac{3v_e\lambda_e k_0}{2\gamma N_1^l(0)} = 12\lambda_e^2 \Delta k\, \frac{m_e n_0 v_e^2}{\langle W^l \rangle} \tag{4.1}$$

В качестве иллюстрации приведем для этого случая некоторые решения нелинейных уравнений, определяющие пространственные распределения числа волн $N^l(x)$.

При условии (1.1) сильного затухания ионного звука имеем:

а) Если $k_2 < 0$ кванты сателлита летят назад, кванты основной линии — вперед. На бесконечности в квазистационарном случае должно быть $\partial N^l / \partial x = 0$ и, следовательно, $N_1^l N_2^l = 0$, что разумно, например, при $N_2^l = 0$, $N_1^l \neq 0$. Поэтому заданы $N_1^l(0)$ и $N_1\ (\infty)$. Решение имеет вид

$$k_1 N_1^l + k_2 N_2^l = k_1 N_1^l(\infty)$$

$$N_1^l(x) = N_1^l(\infty)\left\{1 - \left(1 - \frac{N_1^l(0)}{N_1^l(0)}\right)\exp\frac{\gamma N_1^l(\infty)\, x}{3\lambda_e v_e k_2}\right\} \tag{4.2}$$

б) Если $k_2 > 0$ — кванты сателлита летят вперед $N_1^l(0) \neq 0$, «затравка» $N_2^l(0) \ll N_1^l(0)$, то

$$N_1^l(x) = N_1^l(0)\left(1 + \frac{k_1 N_1^l(0)}{k_2 N_2^l(0)}\right)\exp\left(-\frac{\gamma N_1^l(0)\, x}{3v_e\lambda_e k_2}\right) \times$$

$$\times\left[1 + \frac{k_1 N_1^l(0)}{k_2 N_2^l(0)}\exp\left(-\frac{\gamma N_1^l(0)\, x}{3v_e\lambda_e k_2}\right)\right]^{-1} \tag{4.3}$$

Когда затухание несущественно, имеем:

а) Если $k_2 < 0$, заданы, например, $N^s(0) = 0$, $N_1^l(0) \neq 0$ полный поток $k_1 N_1^l(0) + k_2 N_2^l(0) = 0$, то

$$N^s(x) = \frac{k_1}{2k_0}\left(N_1^l(0) - N_1^l(x)\right)$$

$$N^l(x) = N_1^l(0)\left[2 - \exp\left(\tfrac{1}{2} N_1^l(0)\gamma^* x\right)\right]^{-1}, \quad \gamma^* = \frac{\omega_0^3 k_0}{12 m_e n_0 v_e^4 k_2} \tag{4.4}$$

б) Если $k_2 > 0$ и $N^s(0) = 0$, $N^l(0) \neq 0$, «затравка» $\Delta \sim N_2{}^l(0) \ll N_1{}^l(0)$, то

$$N_1{}^l(x) = \frac{N_1{}^l(0) + \Delta + \dfrac{k_1\Delta}{4k_0 - k_1}\exp(\gamma^* N_1{}^l(0)\,x)}{1 + \dfrac{4k_0\Delta}{(4k_0 - k_1)\,N_1{}^l(0)}\exp(\gamma^* N_1{}^l(0)\,x)} \qquad \left(\gamma^* = \frac{(4k_0 - k_1)\,\gamma}{6k_0 v_e \lambda_e k_2}\right) \tag{4.5}$$

Подчеркнем, что зависимость длины нелинейной перекачки x_0 от затухания является слабой. При рассмотрении задачи о многоступенчатом $t \to t' + l \to t' + l' + s$ распаде — п. 3 в зависимости от координаты в квазистационарном случае при $k_2 < 0$ длина нелинейной перекачки увеличивается в $(k_1 + 2k_0) / k_1$ раз, а при $k_2 > 0$ в $4k_0 / k_1$ раз по сравнению с длиной перекачки при одноступенчатом $t \to t' + l$ распаде.

Поступила 3 VIII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Л и п е р о в с к и й В. А., Ц ы т о в и ч В. Н., О распадах продольных ленгмюровских колебаний плазмы на ионно-звуковые, ПМТФ, 1965, № 5.
2. Ф е д о р ч е н к о В. Д., М у р а т о в В. И., Р у т к е в и ч Б. Н. Обмен энергией между высокочастотными и низкочастотными колебаниями в плазме. Ядерный синтез, 1964, т. 4, № 4, стр. 300.
3. Ц ы т о в и ч В. Н. Нелинейная генерация плазменных волн пучком поперечных волн. Ж. техн. физ., 1965, № 5.
4. С и л и н В. П., Р у х а д з е А. А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. Госатомиздат, 1961.
5. Д а н и л к и н И. С. О нелинейном взаимодействии трех волн с квазистационарной фазой в однородной изотропной плазме без столкновений. Ж. техн. физ., 1966, № 5.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕОДНОРОДНОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА

И. А. Жвания, Р. Я. Кучеров, Л. Э. Рикенглаз

(Сухуми)

В ряде теоретических работ по изучению стационарных состояний плазмы была показана возможность существования стационарных периодических решений самосогласованной задачи [1-5].

Выяснение вопроса об устойчивости этих решений представляет большие математические трудности ввиду неоднородности невозмущенного состояния. В работах [6,7] была рассмотрена сравнительно простая задача о колебаниях плотности заряда в электронных пучках с переменной скоростью. Было найдено, что в определенной области частот волна может нарастать вдоль направления движения пучка.

Периодическая структура плазмы возникает часто в ограниченном объеме, поэтому представляет интерес выяснить, является ли возникающая неустойчивость абсолютной или конвективной. С этой целью в настоящей работе решена задача о развитии возмущения в неоднородном периодическом электронном пучке.

Рассмотрим одномерную задачу о прохождении электронного пучка с постоянной плотностью потока частиц j через однородный ионный фон. В пренебрежении трением стационарное состояние системы описывается уравнениями

$$j = nV, \quad {}^1\!/_2 mV^2 - e\varphi = {}^1\!/_2 mV_{\min}^2 - e\varphi_{\min}, \quad d^2\varphi / dx^2 = 4\pi e(n - N) \tag{1}$$

Здесь n, V, e, m — плотность, скорость, заряд и масса электронов соответственно, N — плотность ионов, φ — потенциал. Выбрав начало отсчета в точке минимума потенциала и положив $\varphi_{\min} = 0$, будем искать решение уравнения Пуассона, удовлетворяющее условиям

$$\varphi(0) = 0, \qquad \varphi'(0) = 0 \tag{2}$$

Легко видеть, что решение в бесконечном пространстве будет периодическим для всех значений $\alpha \equiv NV_{\min} / j$ кроме $\alpha = 1$.