УДК 519.632

Решение вырожденной задачи Неймана методом конечных элементов

М.И. Иванов[1], И.А. Кремер[1,2], М.В. Урев[1,2]

[1]Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

[2]Новосибирский национальный исследовательский государственный университет (НГУ), ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090

E-mails: ivanov@sscc.ru (Иванов М.И.), kremer@sscc.ru (Кремер И.А.), mih.urev2010@yandex.ru (Урев М.В.)

Иванов М.И., Кремер И.А., Урев М.В. Решение вырожденной задачи Неймана методом конечных элементов // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние.— Новосибирск, 2019.— Т. 22, № 4.— С. 437–451.

В работе рассматриваются вопросы решения вырожденной задачи Неймана для уравнения диффузии методом конечных элементов. Сначала выводится и исследуется расширенная обобщенная постановка задачи Неймана в пространстве Соболева $H^1(\Omega)$. Затем формулируется дискретный аналог этой задачи с использованием стандартных конечно-элементных аппроксимаций пространства $H^1(\Omega)$. Предлагается итерационный метод решения соответствующей СЛАУ. На примерах решения модельных задач обсуждаются численные свойства предложенного алгоритма.

DOI: 10.15372/SJNM20190404

Ключевые слова: *вырожденная задача Неймана, условия согласования, ортогонализация правой части, конечные элементы.*

Ivanov M.I., Kremer I.A., Urev M.V. A solution of the degenerate Neumann problem by the finite element method // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci.— Novosibirsk, 2019.— Vol. 22, № 4.— P. 437–451.

This paper deals with the solution of the degenerate Neumann problem for the diffusion equation by the finite element method. First, an extended generalized formulation of the Neumann problem in the Sobolev space $H^1(\Omega)$ is derived and investigated. Then a discrete analogue of this problem is formulated using standard finite element approximations of the space $H^1(\Omega)$. An iterative method for solving the corresponding SLAE is proposed. Some examples of solving the model problems are used to discuss the numerical peculiarities of the algorithm proposed.

Keywords: *degenerate Neumann problem, matching conditions, orthogonalization of the right-hand side, finite elements.*

Введение

В работе рассматриваются вопросы конечно-элементного решения краевой задачи Неймана в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с Липшиц-непрерывной границей Γ для стационарного уравнения диффузии:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\varepsilon \nabla u) = f & \text{в } \ \Omega, \\ (\varepsilon \nabla u, \ \mathbf{n}) = g & \text{на } \ \Gamma. \end{cases} \tag{1}$$

Используются следующие обозначения: u — искомая величина, ε — положительная в Ω функция, определяющая материальные свойства среды, $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к области Ω, определенная почти всюду на Γ. Здесь и далее векторные величины выделяются жирным шрифтом. Скобками $(\cdot,\cdot)$ обозначается скалярное произведение векторов в $\mathbb{R}^3$. Стандартные операции векторного анализа ∇ и div, исходя из контекста, понимаются как в обычном смысле, так и в смысле теории распределений. Решение задачи (1) определяется с точностью до постоянного слагаемого, поэтому мы вводим ограничение, обеспечивающие его единственность:

$$\int_\Omega u\,d\mathbf{x} = 0. \tag{2}$$

Необходимым условием существования решения является выполнение тождества

$$\int_\Omega f\,d\mathbf{x} + \int_\Gamma g\,d\sigma = 0. \tag{3}$$

В работе [1] задача (1), (3) формулируется в обобщенном виде в фактор-пространстве Соболева $H^1(\Omega)/\,\mathbb{R}$, устанавливается факт существования решения $\tilde{u} \in H^1(\Omega)/\,\mathbb{R}$ и приводится оценка его непрерывной зависимости от входных данных f и g. Условие (2) позволяет однозначно определить представителя класса $u \in \tilde{u}$. Так, в работе [2] вводится замкнутое в $H^1(\Omega)$ подпространство

$$H(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega) : \int_\Omega u\,d\mathbf{x} = 0 \right\},$$

и задача Неймана рассматривается в следующем варианте: найти функцию $u \in H(\Omega)$ такую, что

$$\int_\Omega \varepsilon\ \nabla u\,\nabla v\,d\mathbf{x} = \int_\Omega fv\,d\mathbf{x} + \int_\Gamma gv\,d\sigma \quad \forall v \in H(\Omega). \tag{4}$$

Исследование данной постановки опирается на неравенство Пуанкаре и лемму Лакса–Мильграма.

Для формулировки дискретного аналога задачи (4) методом конечных элементов требуется построить предельно плотную последовательность конечномерных подпространств $\{V_h \subset H(\Omega),\ h > 0\}$. Если при фиксированном значении параметра h известен набор линейно независимых базисных функций в V_h, то стандартным образом осуществляется переход к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) [3]. Здесь возникает основная сложность, суть которой в следующем: с одной стороны, теория и практика использования метода конечных элементов дает различные варианты выбора линейно независимых базисных функций для построения аппроксимаций пространства $H^1(\Omega)$, с другой стороны, все такие наборы базисных функций становятся линейно зависимыми в подпространстве $H(\Omega)$, а их использование для решения задачи (4) приводит к формированию вырожденных СЛАУ.

Для решения СЛАУ с вырожденными матрицами применяются итерационные методы вариационного типа [4, с. 298–307]. В теории известно, что они сходятся, а при выполнении дискретного аналога условия разрешимости (3) и выборе начального приближения из подпространства $H(\Omega)$ будут давать решение задачи (4). Однако такие методы чувствительны к накоплению ошибок округлений и, как правило, используются в комбинации с операторами ортогонального проектирования в подпространство решений [5–7].

Рассматриваются различные варианты регуляризации задачи (4) с одновременным снятием ограничения (2) и определением решения во всем пространстве $H^1(\Omega)$. При таком подходе в левую часть уравнения задачи (4) добавляется возмущение с параметром штрафа. Вид возмущения выбирается из соображений положительной определенности билинейной формы задачи, а близость решений исходной и возмущенной задач в идеале обеспечивается малостью параметра штрафа [8–10].

Следующая возможность заключается в том, что решение задачи Неймана сводится к поиску стационарной точки функции Лагранжа в пространстве $H^1(\Omega)\times\mathbb{R}$. В результате применения такого подхода формируется система уравнений седлового типа, которая содержит ограничение на решение (2) в явном виде. Общая теория задач с седловой точкой хорошо развита и приводится в монографиях [1, 11], а с численными методами их решения можно ознакомиться в обзорной работе [12]. Развитие общих методов в применении к задаче Неймана обсуждается в [10, 13].

В данной работе будет показано, что некоторый расширенный вариант задачи Неймана можно получить непосредственно из седловой системы уравнений. Аналогичный прием авторы применяли для решения уравнений Максвелла в пространстве соленоидальных функций [14, 15]. По форме, как и для регуляризированных постановок, в этом случае появляется дополнительное слагаемое, гарантирующее положительную определенность соответствующей билинейной формы во всем пространстве $H^1(\Omega)$. В отличие от [10] видоизменяется и правая часть задачи. Мы обсудим различные аспекты решения предложенного варианта задачи методом конечных элементов.

Дальнейшее изложение работы строится следующим образом. В первом пункте приводится вывод расширенной постановки задачи Неймана непосредственно из седловой системы уравнений, устанавливаются ее взаимосвязи с исходной задачей (4). Во втором пункте рассматривается соответствующая конечно-элементная система уравнений, предлагается способ ее решения. В третьем пункте на примерах решения модельных задач обсуждаются численные свойства предложенного алгоритма.

Если не оговаривается специально, то далее предполагается, что область Ω является объединением конечного числа многогранников Ω_i, а функция ε принимает постоянные значения в подобластях Ω_i: $\varepsilon\,|_{\Omega_i}=\varepsilon_i$, $0<\varepsilon_0\le\varepsilon_i\le\varepsilon_{\max}$. Для обозначения скалярного произведения, нормы и полунормы в гильбертовых пространствах $H^s(\Omega)$, $s\ge 0$, используются обозначения $(\cdot,\cdot)_{s,\Omega}$, $\|\cdot\|_{s,\Omega}$ и $|\cdot|_{s,\Omega}$, случай $s=0$ соответствует пространству $L_2(\Omega)$. Отношение двойственности и сопряженные пространства обозначаются как $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и $H^s(\Omega)'$. Единичная в области Ω функция обозначается e:

$$\|e\|_{1,\Omega}=\|e\|_{0,\Omega}=M^{1/2}, \tag{5}$$

здесь $M=\mathrm{mes}\,(\Omega)$ — мера области Ω.

1. Расширенная постановка задачи Неймана

Для получения расширенной постановки задачи Неймана во всем пространстве $H^1(\Omega)$ воспользуемся приемом, предложенным в работе [14]. С этой целью определим билинейные формы $a\,(\cdot,\cdot)\colon H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)\to\mathbb{R}$ и $b\,(\cdot,\cdot)\colon H^1(\Omega)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

$$a\,(u,v)=\int_\Omega \varepsilon\,\nabla u\,\nabla v\,d\mathbf{x}\quad \forall\,u,v\in H^1(\Omega),$$

$$b\,(u,r)=r\int_\Omega u\,d\mathbf{x}\quad \forall\,u\in H^1(\Omega),\ \forall\,r\in\mathbb{R}.$$

Форма $a(\cdot,\cdot)$ непрерывна на $H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)$, но не является $H^1(\Omega)$-эллиптичной, форма $b(\cdot,\cdot)$ непрерывна. В данных обозначениях функция $u\in H^1(\Omega)$ удовлетворяет условию (2), если

$$b(u,r)=0 \quad \forall\, r\in\mathbb{R}. \tag{6}$$

Множество всех таких функций совпадает с подпространством $H(\Omega)$, определенным выше. Введем функционал $F\in H^1(\Omega)'$:

$$\langle F,v\rangle=(f,v)_{0,\Omega}+(g,\operatorname{tr}v)_{0,\Gamma} \quad \forall\, v\in H^1(\Omega), \tag{7}$$

где tr: $H^1(\Omega)\to H^{1/2}(\Gamma)$ — оператор следа. Условие разрешимости (3) принимает вид

$$\langle F,e\rangle=0. \tag{8}$$

Задачу (1) с ограничением (2) будем решать методом множителей Лагранжа, суть которого заключается в поиске стационарной точки функционала $J(\cdot,\cdot)$: $H^1(\Omega)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

$$J(v,r)=a(v,v)-2\langle F,v\rangle+b(v,r) \quad \forall\, v\in H^1(\Omega),\ \forall\, r\in\mathbb{R}.$$

В отличие от (4) в результате такого подхода формируется система уравнений седлового типа, которая определяет решение во всем пространстве $H^1(\Omega)$ и в явном виде включает ограничение на решение (6). Таким образом, требуется определить функцию $u\in H^1(\Omega)$ и множитель Лагранжа $p\in\mathbb{R}$ такие, что

$$\begin{cases} a(u,v)+\ b(v,p)=\langle F,v\rangle & \forall\, v\in H^1(\Omega),\\ b(u,r)=0 & \forall\, r\in\mathbb{R}. \end{cases} \tag{9}$$

Заметим, что данная система уравнений может быть решена для более широкого, чем (8), набора правых частей. Действительно, верна следующая теорема.

Теорема 1. *Для всех $F\in H^1(\Omega)'$ решение $(u,p)\in H^1(\Omega)\times\mathbb{R}$ задачи* (9) *существует и единственно, причем*

$$\|u\|_{1,\Omega}\le\frac{1}{C_1}\|F\|_{H^1(\Omega)'},$$
$$|p|\le\frac{1}{M^{1/2}}\|F\|_{H^1(\Omega)'}\left(1+C_1\right),$$

где константа $C_1>0$ не зависит от F.

Доказательство. Непосредственно из неравенства Пуанкаре следует $H(\Omega)$-эллиптичность формы $a(\cdot,\cdot)$:

$$a(u,u)=\int_\Omega\varepsilon\nabla u\,\nabla \mathrm{u}\,d\mathbf{x}\ge\varepsilon_0\int_\Omega(\nabla u)^2\,d\mathbf{x}$$
$$=\varepsilon_0\left(\int_\Omega(\nabla u)^2\,d\mathbf{x}+\left(\int_\Omega u\,d\mathbf{x}\right)^2\right)\ge C_1\|u\|_{1,\Omega} \quad \forall\, u\in H(\Omega).$$

С учетом (5) получаем, что форма $b(\cdot,\cdot)$ удовлетворяет “inf–sup”-условию:

$$\sup_{v\in H^1(\Omega)}\frac{|b(v,r)|}{\|v\|_{1,\Omega}}\ge\frac{b(r,r)}{\|r\|_{1,\Omega}}=\frac{r^2M}{|r|\,M^{1/2}}=|r|\,M^{1/2}, \quad r\in\mathbb{R}.$$

Таким образом, выполнены достаточные условия разрешимости седловой системы уравнений [1, 11] и верны соответствующие оценки устойчивости. □

Поскольку форма $a(\cdot,\cdot)$ обращается в ноль на постоянных в области Ω функциях, то из первого уравнения системы (9) можно выразить множитель Лагранжа $p \in \mathbb{R}$:

$$b(e,p) = \langle F, e\rangle, \quad p = \frac{\langle F, e\rangle}{M}.$$

Второе уравнение (9) позволяет связать искомые величины. Для произвольного параметра $\beta > 0$ имеем

$$b(u,1) - \beta p M = -\beta\langle F, e\rangle.$$

Теперь по аналогии с [14] из первого уравнения системы (9) исключаем множитель Лагранжа и получаем расширенную постановку задачи Неймана относительно одной неизвестной функции u во всем пространстве $H^1(\Omega)$:

$$a(u,v) + \frac{1}{\beta M}\langle B, u\rangle\langle B, v\rangle = \langle F, v\rangle - \frac{1}{M}\langle F, e\rangle\langle B, v\rangle \quad \forall\, v \in H^1(\Omega). \tag{10}$$

Здесь использовано следующее определение функционала $B \in H^1(\Omega)'$:

$$\langle B, v\rangle = \int_\Omega v\, d\mathbf{x} = b(v,1) \quad \forall\, v \in H^1(\Omega).$$

Теперь покажем, что задача (10) поставлена корректно, а именно, имеет место теорема.

Теорема 2. *Для всех $F \in H^1(\Omega)'$ и $\beta > 0$ решение $u \in H^1(\Omega)$ задачи (10) существует и единственно, причем*

$$\|u\|_{1,\Omega} \le \frac{1}{C_2}\|F\|_{H^1(\Omega)'},$$

где константа $C_2 > 0$ может зависеть от параметра β, но не зависит от F.

Доказательство. Левая часть тождества (10) определяет $H^1(\Omega)$-эллиптичную билинейную форму, что является простым следствием неравенства Пуанкаре:

$$\begin{aligned} a(u,u) + \frac{1}{\beta M}\langle B, u\rangle^2 &\ge \varepsilon_0 \int_\Omega (\nabla u)^2\, d\mathbf{x} + \frac{1}{\beta M}\left(\int_\Omega u\, d\mathbf{x}\right)^2 \\ &\ge \min\left\{\frac{\varepsilon_0}{2}; \frac{1}{\beta M}\right\}\left(\int_\Omega (\nabla u)^2\, d\mathbf{x} + \int_\Omega (\nabla u)^2\, d\mathbf{x} + \left(\int_\Omega u\, d\mathbf{x}\right)^2\right) \\ &\ge \min\left\{\frac{\varepsilon_0}{2}; \frac{1}{\beta M}\right\}\left(|u|^2_{1,\Omega} + C_p(\Omega)\|u\|^2_{0,\Omega}\right) \ge C_3\|u\|^2_{1,\Omega} \quad \forall\, u \in H^1(\Omega), \end{aligned}$$

где $C_p(\Omega)$ — константа из неравенства Пуанкаре и

$$C_3 = \min\left\{\frac{\varepsilon_0}{2}; \frac{1}{\beta M}\right\}\min\{1; C_p(\Omega)\}.$$

Форма в левой части тождества (10) непрерывна на $H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)$:

$$a\,(u,v)+\frac{1}{\beta M}\,\langle B,u\rangle\,\langle B,v\rangle\le\varepsilon_{\max}\left|\int_\Omega\nabla u\,\nabla v\,d\mathbf{x}\right|+\frac{1}{\beta M}\left|\int_\Omega u\,d\mathbf{x}\right|\left|\int_\Omega v\,d\mathbf{x}\right|$$

$$\le C_4\|u\|_{1,\Omega}\|v\|_{1,\Omega}\quad\forall\,u,v\in H^1(\Omega),$$

где $C_4=\varepsilon_{\max}+\dfrac{1}{\beta}$. Линейная форма в правой части тождества (10) ограничена в $H^1(\Omega)$:

$$\left|\langle F,v\rangle-\frac{1}{M}\langle F,e\rangle\,\langle B,v\rangle\right|\le\left|\,\langle F,v\rangle\,\right|+\frac{1}{M^{1/2}}\left|\,\langle F,e\rangle\,\right|\|v\|_{1,\Omega}\le 2\,\|F\|_{H^1(\Omega)'}\|v\|_{1,\Omega}\quad\forall\,v\in H^1(\Omega).$$

Ссылка на лемму Лакса–Мильграма завершает доказательство. □

Отметим, что для всех $F\in H^1(\Omega)'$, вне зависимости от выполнения условия (8), правая часть расширенной постановки задачи Неймана обращается в ноль на постоянных в области Ω функциях:

$$\langle F,e\rangle-\frac{1}{M}\langle F,e\rangle\,\langle B,e\rangle=\langle F,e\rangle-\langle F,e\rangle=0. \tag{11}$$

Основной результат данного пункта отвечает на вопрос о близости решений задач (10) и (4) для случая, когда функционал $F\in H^1(\Omega)'$ определяется формулой (7). Сформулируем следующий результат.

Теорема 3. *При выполнении условия* (3), *для любого значения параметра* $\beta>0$, *решение задачи* (10) *является одновременно решением* (4) *и наоборот.*

Доказательство. Пусть $u\in H^1(\Omega)$ является решением задачи (10). Сначала покажем, что $u\in H(\Omega)$, для этого в тождестве (10) используем единичную функцию e в качестве пробной. С учетом замечания (11) получим

$$\frac{1}{\beta M}\,\langle B,u\rangle\,\langle B,e\rangle=\langle F,e\rangle-\frac{1}{M}\langle F,e\rangle\,\langle B,e\rangle=0.$$

Таким образом,

$$\langle B,u\rangle=0\quad\text{и}\quad u\in H(\Omega).$$

Для всех пробных функций $v\in H(\Omega)$ тождество (10) принимает вид

$$a\,(u,v)=\langle F,v\rangle\,,$$

что в точности совпадает с (4).

В другую сторону — пусть $u\in H(\Omega)$ является решением задачи (4) и выполняется соотношение (3):

$$\langle B,u\rangle=0,\qquad\langle F,e\rangle=0.$$

Приведем тождество (4) к виду (10). Для произвольной функции $v\in H^1(\Omega)$ воспользуемся представлением

$$v=(v-C_v)+C_v,$$

где $C_v=\frac{1}{M}\,\langle B,v\rangle\in\mathbb{R}$, $(v-C_v)\in H(\Omega)$, тогда

$$a\,(u,v) + \frac{1}{\beta M}\,\langle B,u\rangle\,\langle B,v\rangle = a\,(u, v - C_v) = \langle F, v - C_v\rangle$$
$$= \langle F,v\rangle - \frac{1}{M}\langle F,e\rangle\,\langle B,v\rangle \quad \forall\, v \in H^1(\Omega).$$

В силу теоремы 2 получается, что функция $u \in H(\Omega)$ не только удовлетворяет тождеству, но и является единственным решением задачи (10). $\square$

Теперь вместо задачи (4) в подпространстве $H(\Omega)$ можно решать эквивалентную ей задачу (10) во всем пространстве $H^1(\Omega)$. Билинейная форма в левой части расширенной задачи Неймана $a_\beta\,(\cdot,\cdot) : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, такая что

$$a_\beta\,(u,v) = a\,(u,v) + \frac{1}{\beta M}\,\langle B,u\rangle\,\langle B,v\rangle \quad \forall\, u,v \in H^1(\Omega),$$

определяет скалярное произведение и эквивалентную норму пространства $H^1(\Omega)$:

$$C_3(v,v)_{1,\Omega} \le a_\beta\,(v,v) \le C_4(v,v)_{1,\Omega} \quad \forall\, v \in H^1(\Omega), \tag{12}$$

где значения констант C_3 и C_4 определены при доказательстве теоремы 2.

В следующем пункте рассмотрим алгоритм численного решения расширенной задачи Неймана методом конечных элементов.

2. Решение расширенной задачи Неймана методом конечных элементов

Для численного решения задачи (10) применим конформный метод конечных элементов. Будем использовать стандартные предельно плотные конечномерные аппроксимации пространства решений $\left\{V_h \subset H^1(\Omega);\ h > 0\right\}$:

$$\lim_{h\to 0}\ \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{1,\Omega} = 0 \quad \forall\, u \in H^1(\Omega). \tag{13}$$

Подпространства V_h формируются из кусочно-полиномиальных функций на конечно-элементных сетках T_h:

$$V_h = \left\{v_h \in H^1(\Omega);\ \ v_h\,|_K \in P_k(K) \ \ \forall\, K \in T_h\right\}.$$

Здесь $P_k(K)$ — множество полиномов степени $\le k$, определенных на сеточных элементах $K \in T_h$ таких, что

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{K \in T_h} \overline{K}.$$

Параметр $h > 0$ характеризует размеры сеточных элементов:

$$h = \max_{K \in T_h}\{\operatorname{diam} K\}.$$

В дальнейшем будем считать, что T_h является семейством регулярных квазиравномерных сеток по h [3], для каждого значения h разбиение T_h согласовано с границами разрыва функции ε.

Конечно-элементный аналог задачи (10) формулируется в следующем виде. Требуется найти функцию $u_h \in V_h$ такую, что

$$a\left(u_h, v_h\right) + \frac{1}{\beta M}\left\langle B, u_h\right\rangle\left\langle B, v_h\right\rangle = \left\langle F, v_h\right\rangle - \frac{1}{M}\left\langle F, e\right\rangle\left\langle B, v_h\right\rangle \quad \forall\, v_h \in V_h. \tag{14}$$

Свойства билинейной формы $a_\beta\left(\cdot,\cdot\right)$, установленные в теореме 2, обеспечивают существование и единственность такого решения в подпространстве V_h. Ввиду предельной плотности включений $V_h \subset H^1(\Omega)$ и в соответствии с леммой Сеа можно гарантировать сходимость решений дискретных задач (14) к обобщенному решению расширенной задачи Неймана (10). Порядок сходимости устанавливается в предположении дополнительной регулярности обобщенного решения и сводится к локальной оценке ошибки интерполяции. Следующий вариант оценки сходимости является следствием более общего результата, представленного в [3, теорема 3.2.1], и приводится здесь без доказательства.

Теорема 4. *Пусть $u \in H^1(\Omega)$ — решение задачи* (10) *— обладает дополнительной регулярностью в подобластях Ω_i : $u\,|_{\Omega_i} \in H^{k+1}(\Omega_i)$, $k \geq 1$. Пусть $u_h \in V_h$ есть решение дискретной задачи* (14), *тогда*

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq Ch^k \sum_i |u|_{k+1,\Omega_i},$$

здесь константа $C > 0$ не зависит от h и функции u.

При фиксированном параметре h сформируем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), соответствующую задаче (14). Для этих целей введем линейно независимый базис пространства V_h:

$$V_h = \operatorname{span}\left\{\varphi_i;\ i = 1, 2, \ldots, N\right\}.$$

Представление

$$u_h = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i \quad \forall\, u_h \in V_h \tag{15}$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между элементами пространств $u_h \in V_h$ и $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^N$, где $\mathbf{U} = \left\{u_i;\ i = 1, 2, \ldots, N\right\}^\top$. Верхний индекс $\top$ в определении вектора $\mathbf{U}$ обозначает операцию транспонирования. Обозначим через $\left(\cdot,\cdot\right)_N$ скалярное произведение в $\mathbb{R}^N$, тогда

$$|u_h|^2_{1,\Omega} = \left(\mathbf{SU}, \mathbf{U}\right)_N, \qquad \|u_h\|^2_{0,\Omega} = \left(\mathbf{MU}, \mathbf{U}\right)_N.$$

Элементы матриц жесткости $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ и масс $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ вычисляются соответствующим образом:

$$\mathbf{S} = \left\{\left(\nabla\varphi_i, \nabla\varphi_j\right)_{0,\Omega};\ \ i, j = 1, 2, \ldots, N\right\}, \qquad \mathbf{M} = \left\{\left(\varphi_i, \varphi_j\right)_{0,\Omega};\ \ i, j = 1, 2, \ldots, N\right\}.$$

Задача (14) записывается в $\mathbb{R}^N$ в следующем виде:

$$\left(\mathbf{A} + \frac{1}{\beta M}\mathbf{B}^\top\mathbf{B}\right)\mathbf{U} = \mathbf{G}. \tag{16}$$

Здесь вектора $\mathbf{G}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^N$ и матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ определены как

$$\mathbf{G} = \left\{ \langle F, \varphi_i \rangle - \frac{1}{M} \langle F, e \rangle \langle B, \varphi_i \rangle \,; \quad i = 1, 2, \ldots, N \right\}^{\top},$$
$$\mathbf{B} = \Big\{ \langle B, \varphi_i \rangle \,; \quad i = 1, 2, \ldots, N \Big\},$$
$$\mathbf{A} = \big\{ a\big(\varphi_i, \varphi_j\big); \quad i, j = 1, 2, \ldots, N \big\}.$$

Заметим, что матрица $\mathbf{B}^{\top}\mathbf{B}$ является плотной, но ее произведение на вектор эффективно реализуется за $\mathcal{O}(N)$ арифметических операций:

$$\mathbf{B}^{\top}\mathbf{B}\mathbf{U} = C_{\mathbf{U}}\mathbf{B}^{\top},$$

где $C_{\mathbf{U}} = \mathbf{B}\mathbf{U} \in \mathbb{R}$.

Далее предложим алгоритм решения задачи (16). Для это установим свойства матрицы $\Big(\mathbf{A} + \frac{1}{\beta M}\mathbf{B}^{\top}\mathbf{B}\Big)$.

Теорема 5. *Матрица $\Big(\mathbf{A} + \frac{1}{\beta M}\mathbf{B}^{\top}\mathbf{B}\Big)$ симметрична и положительно определена. Матрицы $\Big(\mathbf{A} + \frac{1}{\beta M}\mathbf{B}^{\top}\mathbf{B}\Big)$ и $\Big(\mathbf{A} + \frac{1}{\beta}\mathbf{M}\Big)$ эквивалентны по спектру, т. е. существуют константы $\alpha_2 > \alpha_1 > 0$, не зависящие от параметра h, такие что $\forall\, \mathbf{U} \in \mathbb{R}^N$*

$$\alpha_1 \left(\left(\mathbf{A} + \frac{1}{\beta}\mathbf{M} \right) \mathbf{U}, \mathbf{U} \right)_N \le \left(\left(\mathbf{A} + \frac{1}{\beta M}\mathbf{B}^{T}\mathbf{B} \right) \mathbf{U}, \mathbf{U} \right)_N \le \alpha_2 \left(\left(\mathbf{A} + \frac{1}{\beta}\mathbf{M} \right) \mathbf{U}, \mathbf{U} \right)_N .$$

Доказательство. Ввиду представления (15) и очевидного тождества

$$\left(\left(\mathbf{A} + \frac{1}{\beta M}\mathbf{B}^{T}\mathbf{B} \right) \mathbf{U}, \mathbf{V} \right)_N = a_\beta\left(u_h, v_h\right) \quad \forall\, \mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathbb{R}^N$$

симметричность и положительная определенность матрицы $\Big(\mathbf{A} + \frac{1}{\beta M}\mathbf{B}^{\top}\mathbf{B}\Big)$ являются простым следствием свойств (12) билинейной формы $a_\beta\left(\cdot, \cdot\right)$. Приведем значения констант эквивалентности:

$$\left(\left(\mathbf{A} + \frac{1}{\beta}\mathbf{M} \right) \mathbf{U}, \mathbf{U} \right)_N = a\left(u_h, u_h\right) + \frac{1}{\beta}(u_h, u_h)_{0,\Omega},$$
$$C_6 \|u_h\|^2_{1,\Omega} \le a\left(u_h, u_h\right) + \frac{1}{\beta}(u_h, u_h)_{0,\Omega} \le C_7 \|u_h\|^2_{1,\Omega}.$$

Здесь константы C_6 и C_7 принимают следующие значения:

$$C_6 = \min\left\{\varepsilon_0; \frac{1}{\beta}\right\}, \qquad C_7 = \max\left\{\varepsilon_{max}; \frac{1}{\beta}\right\},$$

откуда сразу следует, что

$$\alpha_1 = \frac{C_3}{C_7}, \qquad \alpha_2 = \frac{C_4}{C_6}.$$

□

Данная теорема гарантирует, что для решения СЛАУ (16) можно применять метод сопряженных градиентов с различными вариантами переобусловливания [4]. Если в качестве переобусловливателя использовать матрицу $\mathbf{P} = \Big(\mathbf{A} + \frac{1}{\beta}\mathbf{M}\Big)$, то можно ожидать, что число внешних итераций переобусловленного метода сопряженных градиентов не будет зависеть от величины шага сетки, а число β рассматривать в качестве итерационного параметра и использовать его для ускорения сходимости алгоритма. Далее мы обсудим вопросы численного решения расширенной задачи Неймана (16) и свойства предложенного алгоритма.

3. Численные эксперименты

Рассмотрим численное решение двух краевых задач с известными непрерывными аналитическими решениями. Задачи будем решать на последовательности вложенных сеток, составленных из тетраэдров, с использованием лагранжевых элементов второго порядка [3]. Относительную погрешность и порядок сходимости численного решения к аналитическому будем анализировать в сеточных $L_2(\Omega)$- и $H^1(\Omega)$-нормах:

$$\delta_0^2 = \frac{\|\Pi_h u - u_h\|_{0,\Omega}^2}{\|\Pi_h u\|_{0,\Omega}^2} = \frac{\big(\mathbf{M}\,(\mathbf{u}-\mathbf{U})\,,\mathbf{u}-\mathbf{U}\big)_N}{(\mathbf{M}\mathbf{u},\mathbf{u})_N},$$
$$\delta_1^2 = \frac{\|\Pi_h u - u_h\|_{1,\Omega}^2}{\|\Pi_h u\|_{1,\Omega}^2} = \frac{\big(\,(\mathbf{S}+\mathbf{M})\,(\mathbf{u}-\mathbf{U})\,,\mathbf{u}-\mathbf{U}\big)_N}{\big(\,(\mathbf{S}+\mathbf{M})\,\mathbf{u},\mathbf{u}\big)_N},$$

здесь

$$\Pi_h u = \sum_{i=1}^{N} u\,(\mathbf{x}_i)\,\varphi_i, \quad \mathbf{u} = \big\{u\,(\mathbf{x}_i)\,;\; i=1,2,\ldots,N\big\}^\top.$$

Во всех примерах для решения расширенной задачи Неймана (16) применяем переобусловленный метод сопряженных градиентов. В качестве критерия остановки внешнего итерационного процесса используем условие малости относительной невязки

$$\left(\frac{(\mathbf{r},\mathbf{r})_N}{(\mathbf{G},\mathbf{G})_N}\right)^{1/2} \le \epsilon_{\text{ext}} = 10^{-10}, \qquad \mathbf{r} = \left(\mathbf{A} + \frac{1}{\beta M}\mathbf{B}^\top\mathbf{B}\right)\mathbf{U} - \mathbf{G}.$$

Для обращения переобусловливателя $\mathbf{P}$ используем метод сопряженных градиентов с SSOR-переобусловливанием [16, § 3.4] (SSOR CG) и в общем случае с более грубым критерием остановки $\epsilon_{\text{int}} \ge \epsilon_{\text{ext}}$.

В первом примере рассмотрим задачу об определении потенциала электрического поля от точечного заряда в пространстве $\mathbb{R}^3$, заполненном неоднородным диэлектриком:

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_1 & \text{при} \quad z > 0, \\ \varepsilon_2 & \text{при} \quad z < 0. \end{cases}$$

Если заряд e находится в точке $P = (0,0,2)$, то потенциал u во всем пространстве определяется с точностью до константы C_u и выражается формулами [17, с. 114]:

$$u = C_u + \begin{cases} \dfrac{e}{\varepsilon_1}\left[\dfrac{1}{R_+} + \dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\,\dfrac{1}{R_-}\right] & \text{при} \quad z > 0, \\ \dfrac{e}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\,\dfrac{2}{R_+} & \text{при} \quad z < 0, \end{cases} \tag{17}$$

здесь

$$R_+ = \sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}, \qquad R_- = \sqrt{x^2+y^2+(z+2)^2}.$$

Задачу (1) решаем в области $\Omega = (-1,1)^3 \subset \mathbb{R}^3$, краевые условия вычисляем непосредственно из (17), а значения константы C_u определяем численным образом из условия (2). В нашем случае для параметров среды $\varepsilon_1 = 1$ и $\varepsilon_2 = 2$ получаем, что $C_u = 0.36552172$. Данные о точности численного решения представлены в таблице 1.

Таблица 1. Относительная погрешность решения задачи, первый пример

погрешность \ h	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32	1/64
δ_0	5.0215 E−02	1.1179 E−02	2.8207 E−03	7.0842 E−04	1.7733 E−04	4.4615 E−05
δ_1	4.5343 E−01	1.2952 E−01	6.5947 E−02	3.3140 E−02	1.6591 E−02	8.2984 E−03

Можно сделать вывод, что численное решение сходится к аналитическому со вторым порядком в $L_2(\Omega)$-норме и линейно в $H^1(\Omega)$-норме.

В следующей серии экспериментов определим чувствительность алгоритма к параметру β. Будем варьировать параметр в большом диапазоне значений $10^{-2} \le \beta \le 10^6$ и следить за общим количеством внутренних итераций, потребовавшихся для решения всей задачи (табл. 2). Относительная точность решения внутренней задачи во всех случаях составляет $\epsilon_{\text{int}} = 10^{-10}$.

Таблица 2. Чувствительность алгоритма к параметру β, первый пример

β \ h	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32	1/64
10^{-2}	486 (54)	627 (57)	880 (55)	1344 (48)	2397 (47)	4608 (48)
10^{-1}	180 (15)	336 (16)	608 (16)	1072 (16)	1904 (16)	3330 (15)
1	126 (7)	231 (7)	399 (7)	707 (7)	1281 (7)	2345 (7)
10	105 (5)	180 (5)	330 (5)	570 (5)	1025 (5)	1905 (5)
10^2	66 (3)	156 (4)	276 (4)	484 (4)	876 (4)	1200 (3)
10^3	72 (3)	126 (3)	219 (3)	384 (3)	690 (3)	1287 (3)
10^4	**50 (2)**	**88 (2)**	**152 (2)**	**268 (2)**	**480 (2)**	**898 (2)**
10^5	55 (2)	90 (2)	158 (2)	280 (2)	502 (2)	936 (2)
10^6	56 (2)	94 (2)	166 (2)	290 (2)	522 (2)	968 (2)

Здесь в скобках отображено количество внешних итераций, а жирным шрифтом для каждого столбца выделено минимальное число внутренних итераций. Анализ данной таблицы позволяет сделать несколько выводов. Алгоритм чувствителен к значению параметра β, для каждой сетки (в столбце) имеется некоторое оптимальное значение, которое позволяет сократить число внутренних итераций, а следовательно, и общее время решения задачи. Примечательно, что для различных сеток оптимальные значения параметра β совпадают, поэтому для экономии ресурсов поиск наилучшего варианта достаточно производить на грубых сетках, а результаты такого поиска применять на мелких сетках. Анализ таблицы по строкам показывает, что для фиксированных параметров итерационного алгоритма количество внешних итераций почти не зависит от величины шага сетки.

Надо признать, что даже для оптимального значения β общее время численного решения расширенной задачи Неймана в два раза превосходит время решения стандартной эллиптической задачи в $H^1(\Omega)$ с матрицей $\mathbf{P} = \left(\mathbf{A} + \frac{1}{\beta}\mathbf{M}\right)$. Например, для $h = 1/32$ и $\beta = 10^4$ при одинаковой относительной точности решения $\epsilon_{\text{int}} = \epsilon_{\text{ext}} = 10^{-10}$ стандартная задача решается за 240 итераций в отличие от 480 итераций для расширенной задачи Неймана. В следующей серии экспериментов попробуем это число уменьшить, в качестве параметра оптимизации будем варьировать точность решения внутренней задачи ϵ_{int}. Результаты экспериментов представлены в табл. 3. Здесь n_{int} — общее число внутренних итераций, затраченных на обращение $\mathbf{P}$, N_{ext} — количество внешних итераций.

Таблица 3. Чувствительность алгоритма к параметру ϵ_{int}, первый пример

ϵ_{int}	10^{-10}	10^{-9}	10^{-8}	10^{-7}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}
n_{int}	480	460	440	414	**390**	540	495	584	798
N_{ext}	2	2	2	2	2	3	3	4	6

Из данной таблицы видно, что при $\epsilon_{\text{int}} = 10^{-6}$ число внутренних итераций удается уменьшить до $n_{\text{int}} = 390$, что все же остается существенно больше 240.

В следующей серии экспериментов разберем вопрос об условии совместности (3) и его влиянии на решение расширенной задачи Неймана (14). С этой целью рассмотрим решение задачи об электрическом потенциале u в равномерно заряженном однородном шаре:

$$\Omega = \left\{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 : \ |\mathbf{r}| \le 10\right\}, \quad \mathbf{r} = (x, y, z)\,, \ |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Если установить значения параметров $\varepsilon = 1$, $f = -1$, $g = 10/3$, то решением задачи (1)–(3) является функция

$$u = \frac{1}{6}|\mathbf{r}|^2 - 10, \quad \mathbf{r} \in \Omega.$$

Несложно проверить, что

$$\int_\Omega u\,d\mathbf{x} = 0, \qquad -\int_\Omega 1\,d\mathbf{x} + \int_\Gamma \frac{10}{3}\,d\sigma = 0.$$

Данный пример интересен тем, что расчетная область не является многогранником и не совпадает с сеточной:

$$\Omega_h \subset \Omega, \qquad \Gamma_h \ne \Gamma.$$

В такой ситуации условие (3) нарушается. Основная информация о решении задачи Неймана на различных сетках представлена в табл. 4.

Таблица 4. Условие совместности, второй пример

h	1	1/2	1/4	1/8
δ_0	1.7772 E−2	5.2705 E−3	1.4238 E−3	3.6970 E−4
δ_1	5.9719 E−2	2.5863 E−2	1.2364 E−2	6.1091 E−3
δ_c	−2.8100 E+01	−7.1100 E+00	−1.7900 E+00	−4.4333 E−01
$\Delta_{\min}/\Delta_{\max}$	−6.93/ − 6.85	−1.73/ − 1.71	−0.433/ − 0.428	−0.108/ − 0.107
Δ	−6.811	−1.704	−0.428	−0.106

В первых трех строках приведены данные о сетках и об относительных погрешностях решений, в четвертой строке — величина

$$\delta_c = -\int_{\Omega_h} 1\,d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_h} \frac{10}{3}\,d\sigma.$$

Становится понятно, что расширенная постановка (14) позволяет получать качественное решение даже при нарушении условия совместности. Здесь ключевой является процедура ортогонализации правой части:

$$\langle F, e\rangle - \frac{1}{M}\langle F, e\rangle\langle B, e\rangle = 0.$$

В противном случае, если в качестве правой части, например, как в работе [10], использовать только $\langle F, e\rangle$ без ортогонализации, то численное решение сдвигается относительно точного на величину от $\Delta_{\min}$ до $\Delta_{\max}$:

$$\Delta_{\min} \leq u - u_h \leq \Delta_{\max}.$$

Данный эффект объясняется тем, что, с одной стороны,

$$a\left(u_h, e\right) + \frac{1}{\beta M}\langle B, u_h\rangle\langle B, e\rangle = \frac{1}{\beta}\int_{\Omega_h} u_h\,d\mathbf{x},$$

а, с другой стороны,

$$\langle F, e\rangle = \delta_c,$$

откуда получаем

$$\int_{\Omega_h} u_h\,d\mathbf{x} = \beta\delta_c.$$

Если предположить, что $u_h - u = \Delta$, то

$$M\Delta = \int_{\Omega_h} \Delta\,d\mathbf{x} = \int_{\Omega_h} \left(u_h - u\right)\,d\mathbf{x} \approx \int_{\Omega_h} u_h\,d\mathbf{x} = \beta\delta_c.$$

При $\beta = 1000$ значения $\Delta_{\min}$ и $\Delta_{\max}$ приведены в табл. 4 и вполне согласуются с предсказанной величиной $\Delta \approx \beta\delta_c/M$. Эта ошибка может быть уменьшена за счет параметра β, но тогда сходимость итерационного алгоритма будет хуже, о чем свидетельствуют данные табл. 2. Таким образом, можно сделать вывод, что ортогонализация правой части в расширенной постановке Неймана (14) существенно улучшает свойства численного решения в случае нарушения условия (8) на дискретном уровне.

4. Заключение

В работе предложен и обоснован алгоритм конечно-элементного решения вырожденной задачи Неймана. Получена и исследована соответствующая расширенная обобщенная постановка во всем пространстве функций $H^1(\Omega)$, установлена ее связь с исходной постановкой. С помощью стандартного метода конечных элементов сформирована расширенная система линейных уравнений и исследованы ее свойства. Предложен двухуровневый итерационный метод решения данной системы уравнений. На примерах численного решения модельных задач рассмотрена возможность оптимизации параметров с целью увеличения скорости сходимости предложенного алгоритма, изучен вопрос о свойствах численного решения при нарушении условия совместности на дискретном уровне.

Литература

1. **Girault V., Raviart P.-A.** Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations. — Springer-Verlag, 1986.
2. **Михлин С.Г.** Вариационные методы в математической физике. — М.: Наука, 1970.
3. **Сьярле Ф.** Метод конечных элементов для эллиптических задач. — М.: Мир, 1980.
4. **Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.** Матрицы и вычисления. — М.: Наука, 1984.
5. **Steigemann M., Fulland M.** On the computation of the pure Neumann problem in 2-dimensional elasticity // Int. J. Fract. — 2007. — Vol. 146. — P. 265–277.
6. **Nepomnyaschikh S.V.** Schwarz alternating method for solving the singular Neumann problem // Soviet J. Numer. Anal. and Math. Model. — 1990. — Vol. 5, № 1. — P. 69–78.
7. **Lee Y.J., Wu J., Xu J., Zikatanov L.** A sharp convergence estimate for the method of subspace corrections for singular system of equations // Mathematics of Computation — 2008. — Vol. 77, № 262. — P. 831–850.
8. **Dai X.** Finite element approximation of the pure Neumann problem using the iterative penalty method // Applied Mathematics and Computation — 2007. — Vol. 186. — P. 1367–1373.
9. **Savenkov E., Andrä H., Iliev O.** An Analysis of One Regularization Approach for Solution of Pure Neumann Problem. — Kaiserslautern, 2008. — (Berichte des Faruenhofer ITWM; 137).
10. **Bochev P., Lehoucq R.B.** On finite element solution of the pure Neumann problem // SIAM Rev. — 2005. — Vol. 47, № 1. — P. 50–66.
11. **Brezzi F., Fortin M.** Mixed and Hybrid Finite Element Methods. — New-York: Springer Verlag, 1991.
12. **Benzi M., Golub G.H., Liesen J.** Numerical solution of saddle point problems // Acta Numerica — 2005. — Vol. 14. — P. 1–137.
13. **Kergrenea K., Prudhommea S., Chamoinb L., Laforest M.** Approximation of constrained problems using the PGD method with application to pure Neumann problems // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. — 2017. — Vol. 317. — P. 507–525.
14. **Кремер И.А., Урев М.В.** Метод регуляризации стационарной системы Максвелла в неоднородной проводящей среде // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2009. — Т. 12, № 2. — С. 161–170. Перевод: Kremer I.A., Urev M.V. A regularization method for stationary Maxwell equations in an inhomogeneous conducting medium // Numerical Analysis and Applications. — 2009. — Vol. 2, № 2. — P. 131–139.
15. **Кремер И.А., Урев М.В.** Решение методом конечных элементов регуляризированной задачи для стационарного магнитного поля в неоднородной проводящей среде // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2010. — Т. 13, № 1. — С. 33–49. Перевод: Kremer I.A., Urev M.V. Solution of a regularized problem for a stationary magnetic field in a nonhomogeneous conducting medium by a finite element method // Numerical Analysis and Applications. — 2010. — Vol. 3, № 1. — P. 25–38.
16. **Ортега Дж.** Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем. — М.: Мир, 1991.
17. **Тамм И.Е.** Основы теории электричества. М.: Наука, 1976.

Поступила в редакцию 18 марта 2019 г.
Принята к печати 25 июля 2019 г.

Литература в транслитерации

1. **Girault V., Raviart P.-A.** Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations. — Springer-Verlag, 1986.
2. **Mikhlin S.G.** Variacionnye metody v matematicheskoy fizike. — M.: Nauka, 1970.
3. **S'yarle F.** Metod konechnykh elementov dlya ellipticheskikh zadach. — M.: Mir, 1980.
4. **Voevodin V.V., Kuznecov Yu.A.** Matricy i vychisleniya. — M.: Nauka, 1984.
5. **Steigemann M., Fulland M.** On the computation of the pure Neumann problem in 2-dimensional elasticity // Int. J. Fract. — 2007. — Vol. 146. — P. 265–277.
6. **Nepomnyaschikh S.V.** Schwarz alternating method for solving the singular Neumann problem // Soviet J. Numer. Anal. and Math. Model. — 1990. — Vol. 5, № 1. — P. 69–78.
7. **Lee Y.J., Wu J., Xu J., Zikatanov L.** A sharp convergence estimate for the method of subspace corrections for singular system of equations // Mathematics of Computation — 2008. — Vol. 77, № 262. — P. 831–850.
8. **Dai X.** Finite element approximation of the pure Neumann problem using the iterative penalty method // Applied Mathematics and Computation — 2007. — Vol. 186. — P. 1367–1373.
9. **Savenkov E., Andrä H., Iliev O.** An Analysis of One Regularization Approach for Solution of Pure Neumann Problem. — Kaiserslautern, 2008. — (Berichte des Faruenhofer ITWM; 137).
10. **Bochev P., Lehoucq R.B.** On finite element solution of the pure Neumann problem // SIAM Rev. — 2005. — Vol. 47, № 1. — P. 50–66.
11. **Brezzi F., Fortin M.** Mixed and Hybrid Finite Element Methods. — New-York: Springer Verlag, 1991.
12. **Benzi M., Golub G.H., Liesen J.** Numerical solution of saddle point problems // Acta Numerica — 2005. — Vol. 14. — P. 1–137.
13. **Kergrenea K., Prudhommea S., Chamoinb L., Laforest M.** Approximation of constrained problems using the PGD method with application to pure Neumann problems // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. — 2017. — Vol. 317. — P. 507–525.
14. **Kremer I.A., Urev M.V.** Metod regulyarizacii stacionarnoy sistemy Maksvella v neodnorodnoy provodyaschey srede // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2009. — T. 12, № 2. — S. 161–170. Perevod: Kremer I.A., Urev M.V. A regularization method for stationary Maxwell equations in an inhomogeneous conducting medium // Numerical Analysis and Applications. — 2009. — Vol. 2, № 2. — P. 131–139.
15. **Kremer I.A., Urev M.V.** Reshenie metodom konechnykh elementov regulyarizirovannoy zadachi dlya stacionarnogo magnitnogo polya v neodnorodnoy provodyaschey srede // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2010. — T. 13, № 1. — S. 33–49. Perevod: Kremer I.A., Urev M.V. Solution of a regularized problem for a stationary magnetic field in a nonhomogeneous conducting medium by a finite element method // Numerical Analysis and Applications. — 2010. — Vol. 3, № 1. — P. 25–38.
16. **Ortega Dzh.** Vvedenie v parallel'nye i vektornye metody resheniya lineynykh sistem. — M.: Mir, 1991.
17. **Tamm I.E.** Osnovy teorii elektrichestva. M.: Nauka, 1976.