УДК 539.374

ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА МЕЖДУ ДВУМЯ КОНЦЕНТРИЧЕСКИМИ СФЕРАМИ

С. Ф. Кузнецов, А. Д. Чернышов

Воронежская государственная технологическая академия, 394017 Воронеж

Рассматривается движение вязкопластической среды между двумя концентрическими сферами при вращении одной из них с постоянной угловой скоростью. Для решения поставленной задачи используется эвристический итерационный метод. Определена граница возникающих застойных зон и показана особенность ее формы. Получены зависимости характеристик течения от параметра среды.

Исследованию вращения тел в вязкопластической среде посвящен целый ряд работ. Задача о стационарном вращении простейших осесимметричных тел (цилиндра, конуса, сферы) в неограниченной среде рассмотрена в [1–5]. В работе [6] с использованием принятых в теории пограничного слоя приближений исследовано стационарное вращение произвольного выпуклого осесимметричного тела. В [7] рассмотрено течение вязкопластической среды между двумя соосными конусами. Решение задачи о течении вязкопластической среды, примыкающей к вращающемуся с переменной угловой скоростью цилиндру, дано в [8].

В настоящей работе рассматривается движение вязкопластической среды между двумя концентрическими сферами при вращении одной из них с постоянной угловой скоростью. Подобное вращение имеет место, например, в ротационных вискозиметрах при исследовании вязкопластических материалов.

Для решения задач вязкопластического течения известны вариационный [9, 10] и эвристический [11] методы. Применение вариационного метода для решения таких задач весьма эффективно, но при наличии неизвестных границ, подобных застойным зонам, это представляет некоторые трудности. Поэтому для решения поставленной задачи используется эвристический метод. Преимущество его перед другими методами численного решения состоит в том, что на каждом шаге итерационного процесса решается краевая задача для одного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Получено поле скоростей, по которому найдены характеристики течения. Определена граница застойных зон при различных значениях параметра Сен-Венана и показана особенность ее формы.

1. Постановка задачи. В сферической системе координат рассматривается стационарное движение несжимаемой вязкопластической среды между двумя концентрическими сферами при отсутствии внешних сил. Внешняя сфера радиуса R_2 находится в покое, а внутренняя сфера радиуса R_1 вращается с постоянной угловой скоростью ω_0.

В случае вращения тела отлична от нуля лишь одна компонента скорости течения среды $V_\varphi = V(r,\theta)$. Уравнения состояния вязкопластической среды в области вязкого течения имеют вид [12]

$$\sigma_{ij} = \Big(2\mu + \frac{\sqrt{2}\tau_0}{(\varepsilon_{kl}\varepsilon_{kl})^{1/2}}\Big)\varepsilon_{ij} - p\delta_{ij}, \qquad p = -\sigma_{ii}/3,$$

где σ_{ij} — тензор напряжений, ε_{ij} — тензор скоростей деформаций, μ — коэффициент 28
вязкости, τ_0 — предел текучести.

В рассматриваемом случае отличны от нуля компоненты тензора скоростей деформаций и тензора напряжений:

$$\varepsilon_{\theta\varphi} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{r}\,\frac{\partial V}{\partial \theta} - \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r}V\Big), \quad \varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r}\Big), \quad \sigma_{\theta\varphi} = \Big(2\mu + \frac{\tau_0}{(\varepsilon_{\theta\varphi}^2 + \varepsilon_{r\varphi}^2)^{1/2}}\Big)\varepsilon_{\theta\varphi},$$
$$\sigma_{r\varphi} = \Big(2\mu + \frac{\tau_0}{(\varepsilon_{\theta\varphi}^2 + \varepsilon_{r\varphi}^2)^{1/2}}\Big)\varepsilon_{r\varphi}, \qquad \sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta} = -p. \tag{1.1}$$

Скорость течения среды V связана с угловой скоростью ω соотношением $V = r\omega(r,\theta)\sin\theta$, что позволяет переписать формулы (1.1) в виде

$$\varepsilon_{\theta\varphi} = \omega_\theta\frac{\sin\theta}{2}, \quad \varepsilon_{r\varphi} = r\omega_r\frac{\sin\theta}{2}, \quad \sigma_{\theta\varphi} = \Big(\mu\sin\theta + \frac{\tau_0}{(\omega_\theta^2 + r^2\omega_r^2)^{1/2}}\Big)\omega_\theta,$$
$$\sigma_{r\varphi} = \Big(\mu\sin\theta + \frac{\tau_0}{(\omega_\theta^2 + r^2\omega_r^2)^{1/2}}\Big)r\omega_r, \qquad \sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta} = -p. \tag{1.2}$$

Запишем уравнения равновесия вязкопластической среды в сферической системе координат:

$$\frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial\sigma_{\theta\varphi}}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial\sigma_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{1}{r}(3\sigma_{r\varphi} + 2\sigma_{\theta\varphi}\operatorname{ctg}\theta) = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial\theta} = 0.$$

Отсюда следует, что $p = p(\varphi)$ и $dp/d\varphi = \mathrm{const}$. Из условия периодичности давления $p(\varphi) = p(\varphi + 2\pi)$ получаем $dp/d\varphi = 0$, поэтому

$$\frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial\sigma_{\theta\varphi}}{\partial\theta} + \frac{1}{r}(3\sigma_{r\varphi} + 2\sigma_{\theta\varphi}\operatorname{ctg}\theta) = 0. \tag{1.3}$$

Подставив значения компонент тензора напряжений (1.2) в (1.3), получим дифференциальное уравнение движения несжимаемой вязкопластической среды в сферических координатах

$$\mu\Big(r\omega_{rr} + 4\omega_r + \frac{1}{r}\omega_{\theta\theta} + \frac{3\omega_\theta\operatorname{ctg}\theta}{r}\Big) +$$
$$+\frac{\tau_0}{\sin\theta}\Big(\frac{r\omega_\theta^2\omega_{rr} + 4\omega_r\omega_\theta^2 + 3r^2\omega_r^3 + r\omega_r^2\omega_{\theta\theta} - 2r\omega_r\omega_\theta\omega_{r\theta}}{(\omega_\theta^2 + r^2\omega_r^2)^{3/2}} + \frac{2\omega_\theta\operatorname{ctg}\theta}{r(\omega_\theta^2 + r^2\omega_r^2)^{1/2}}\Big) = 0. \tag{1.4}$$

Это уравнение справедливо лишь в области вязкого течения, внутри которой выполняется условие $\operatorname{grad}V \neq 0$.

Если внутреннюю сферу вращать с малой угловой скоростью, то она будет вовлекать в движение небольшую часть вязкопластической среды, внешняя граница Γ которой заранее неизвестна. Внутренняя граница Γ_0 области течения — поверхность вращающейся сферы; внешняя граница Γ имеет сложную форму и должна быть определена в ходе решения задачи. За границей среда ведет себя как твердое тело, и эта область носит название застойной зоны.

В точках, принадлежащих застойным зонам, имеет место равенство

$$\operatorname{grad}V = 0. \tag{1.5}$$

Для точек, лежащих на границе застойных зон, условие (1.5) можно записать следующим образом [13]:

22

$$\frac{\partial V}{\partial n} = 0,$$

где n — нормаль к границе застойных зон.

Учитывая изложенное выше и физическую картину явления, получим граничные условия

$$\omega\Big|_{\Gamma_0} = \omega_0, \qquad \omega\Big|_{\Gamma} = 0, \qquad \frac{\partial \omega}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = 0. \tag{1.6}$$

Таким образом, функция ω будет решением краевой задачи (1.4), (1.6) для нелинейного дифференциального уравнения в частных производных.

Перейдем к безразмерным переменным. Для этого угловую скорость отнесем к величине ω_0, линейные размеры — к радиусу внутренней сферы R_1.

Краевая задача (1.4), (1.6) в безразмерных переменных примет вид

$$r\omega_{rr} + 4\omega_r + \frac{1}{r}\,\omega_{\theta\theta} + \frac{3\omega_\theta \operatorname{ctg}\,\theta}{r} +$$
$$+\frac{1}{H\sin\theta}\left(\frac{r\omega_\theta^2\omega_{rr} + 4\omega_r\omega_\theta^2 + 3r^2\omega_r^3 + r\omega_r^2\omega_{\theta\theta} - 2r\omega_r\omega_\theta\omega_{r\theta}}{(\omega_\theta^2 + r^2\omega_r^2)^{3/2}} + \frac{2\omega_\theta \operatorname{ctg}\,\theta}{r(\omega_\theta^2 + r^2\omega_r^2)^{1/2}}\right) = 0; \tag{1.7}$$

$$\omega\Big|_{\Gamma_0} = 1, \qquad \omega\Big|_{\Gamma} = 0, \qquad \frac{\partial \omega}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = 0, \tag{1.8}$$

где $H = \mu\omega_0/\tau_0$ — безразмерный параметр. Величина $S = H^{-1}$ носит название параметра Сен-Венана.

2. Метод решения. Для решения краевой задачи (1.7), (1.8) воспользуемся итерационным методом [11]. Приведем его краткое описание. В уравнении (1.7) от переменных $(r,\, \theta)$ перейдем к переменным $(\xi,\, \eta)$ с помощью замены

$$\xi = \xi(r, \theta), \qquad \eta = \eta(r, \theta). \tag{2.1}$$

При введении переменной ξ производными от ω по η и смешанными производными можно пренебречь по сравнению с остальными членами, так как согласно методу [11] переменная ξ подобрана таким образом, что изменение ω вдоль линии $\xi = \mathrm{const}$ должно быть малым. Тогда функция ω будет решением краевой задачи для обыкновенного линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$(\xi_\theta^2 + r^2\xi_r^2)\omega_{\xi\xi} + (r^2\xi_{rr} + 4r\xi_r + \xi_{\theta\theta} + 3\xi_\theta \operatorname{ctg}\,\theta)\omega_\xi + \frac{1}{H\sin\theta}((r^2\xi_\theta^2\xi_{rr} + 4r\xi_r\xi_\theta^2 + 3r^3\xi_r^3 +$$
$$+r^2\xi_r^2\xi_{\theta\theta} - 2r^2\xi_r\xi_\theta\xi_{r\theta})(\xi_\theta^2 + r^2\xi_r^2)^{-3/2} + 2\xi_\theta \operatorname{ctg}\,\theta(\xi_\theta^2 + r^2\xi_r^2)^{-1/2}) = 0; \tag{2.2}$$

$$\omega\Big|_{\xi=1} = 1, \qquad \omega\Big|_{\xi=0} = 0. \tag{2.3}$$

Переменная η при интегрировании уравнения (2.2) играет роль параметра. Нулевое приближение в (2.1) обозначим через ξ^0. Решив задачу (2.2), (2.3), найдем $\omega^0(\xi^0, \eta)$. Обозначив $\omega^0(\xi^0, \eta)$ через ξ^1, для нахождения следующего приближения решим краевую задачу, аналогичную задаче (2.2), (2.3), с переменными (ξ^1, η). Так же поступаем на последующих итерациях.

Наиболее легко реализуемый итерационный процесс получается, если на каждом шаге полагать $\eta = \theta$. При таком выборе переменной η после обратного перехода от переменных $(\xi,\, \eta)$ к переменным $(r,\, \theta)$ уравнение (2.2) останется линейным дифференциальным уравнением 27

$$\omega_{rr} + \left(4r\xi_r^2 - \frac{\xi_{rr}\xi_\theta^2}{\xi_r} + \xi_r\xi_{\theta\theta} + 3\xi_r\xi_\theta \operatorname{ctg}\,\theta\right)(\xi_\theta^2 + r^2\xi_r^2)^{-1}\omega_r + \frac{1}{H\sin\theta}\,((r^2\xi_\theta^2\xi_{rr} + 4r\xi_r\xi_\theta^2 + 3r^3\xi_r^3 +$$

$$+r^2\xi_r^2\xi_{\theta\theta} - 2r^2\xi_r\xi_\theta\xi_{r\theta})(\xi_\theta^2 + r^2\xi_r^2)^{-3/2} + 2\xi_\theta \operatorname{ctg}\theta(\xi_\theta^2 + r^2\xi_r^2)^{-1/2})\xi_r^2(\xi_\theta^2 + r^2\xi_r^2)^{-1} = 0; \qquad (2.4)$$

$$\omega\Big|_{\Gamma_0} = 1, \qquad \omega\Big|_{\Gamma} = 0. \qquad (2.5)$$

Переменная θ входит в (2.4) в качестве параметра.

Для решения задачи применяется схема, основанная на использовании метода Эйткена [14], которая улучшает сходимость итерационного процесса. Итерационный метод, предложенный в [11], применялся для решения задач антиплоской деформации вязкопластической среды в условиях чистого сдвига, реализованного в [15].

Хотя метод, описанный в настоящей работе, используется для решения другого класса задач, нежели исследованные в [15], алгоритмы их реализации во многом схожи, так как в их основе лежит прием, предложенный в [11]. Однако существует ряд отличий в реализации этих методов. Так, краевая задача при фиксированных значениях θ решалась баллистическим методом, а не сведением ее к двум задачам Коши [15]. Кроме того, отличие состоит в определении формы границы застойной зоны, которое приводится ниже.

3. Течение среды между двумя концентрическими сферами. Применим описанный метод для решения краевой задачи (2.4), (2.5). Для нахождения нулевого приближения положим

$$\xi^0 = \frac{R_* - r}{R_* - R_1}, \qquad \eta = \theta,$$

где $r = R_*(\theta)$ — уравнение контура внешней границы Γ области течения.

Как отмечено выше, форма границы, разделяющей застойную зону и область течения, заранее неизвестна. Для определения ее начальной формы используем следующий прием. Положив в уравнении (1.7) $\omega_\theta = \omega_{\theta\theta} = \omega_{r\theta} = 0$, получим уравнение с граничными условиями

$$\omega_{rr} + \frac{4}{r}\omega_r - \frac{3}{Hr^2\sin\theta} = 0, \quad \omega\Big|_{r=R_1} = 1, \quad \omega\Big|_{r=R_*} = 0, \quad \frac{\partial\omega}{\partial r}\Big|_{r=R_*} = 0.$$

Решая эту задачу методом вариации произвольных постоянных, получим формулу распределения скоростей

$$\omega = \frac{1}{3H\sin\theta}\Big(\frac{R_*^3}{r^3} + 3\ln\frac{r}{R_*} - 1\Big),$$

где радиус зоны распространения течения R_* является решением трансцендентного уравнения

$$\frac{R_*^3}{R_1} - 3\ln\frac{R_*}{R_1} = 1 + 3H\sin\theta. \qquad (3.1)$$

В качестве начальной формы контура Γ, ограничивающего снаружи область течения, можно принять R_* — решение уравнения (3.1). Внутри области течения должно выполняться условие $\omega_r < 0$. Решение задачи (2.4), (2.5) при фиксированных значениях θ находится баллистическим методом.

Если течение частично достигнет границы внешней сферы, то для нахождения распределения скоростей нужно решить новую краевую задачу без условия обращения в нуль скоростей скольжения на соответствующей части границы внешней сферы. После нахождения распределения скоростей необходимо на границе области течения Γ проверить выполнение условия $\partial\omega/\partial r = 0$ и для уточнения формы границы провести деформацию ее контура.

33

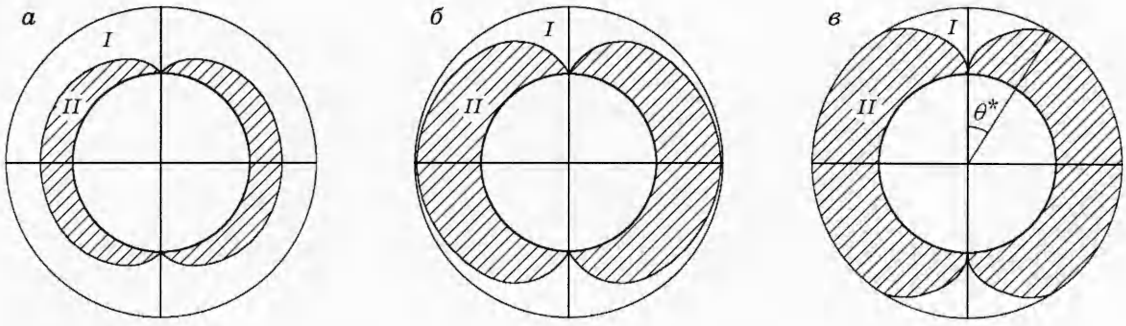

Рис. 1

Момент сил трения, действующих на поверхности внутренней сферы, равен

$$M = 2\pi \int\limits_0^\pi \sigma_{r\varphi}\Big|_{\Gamma_0} R_1^3 \sin^2\theta \, d\theta,$$

где $\sigma_{r\varphi} = (1/(\omega_\theta^2 + r^2\omega_r^2)^{1/2} + H\sin\theta) r\omega_r$ — касательное напряжение.

Из полученного решения можно сделать следующие выводы. Форма поверхности застойной зоны I качественно зависит от величины параметра Сен-Венана H. Так, при малых угловых скоростях, когда H меньше некоторого значения H^*, область течения среды II находится между внутренней сферой и застойной зоной, которая не касается внешней сферы (рис. 1,*а*). Вне этой области среда находится в жестком недеформированном состоянии. При увеличении значения параметра H граница застойной зоны приближается к внешней сфере и при $H = H^*$ впервые касается внешней сферы на экваторе (рис. 1,*б*). При $H > H^*$ застойная зона разделяется на две симметричные части — «северную» и «южную» (рис. 1,*в*). Граница каждой части определяется углом θ^*.

На рис. 2 приведена зависимость угла θ^* от параметра H. При увеличении H угол θ^* уменьшается, т. е. размеры застойной зоны сокращаются. Следует отметить, что при любом значении параметра H застойная зона всегда примыкает к полюсам внешней сферы и имеет конусообразную форму, обращенную от внешней сферы к внутренней. Вершина этого конуса касается полюса внутренней сферы (рис. 1,*в*). Таким образом, в данном случае застойная зона существует всегда, при любом конечном значении H в окрестности 17

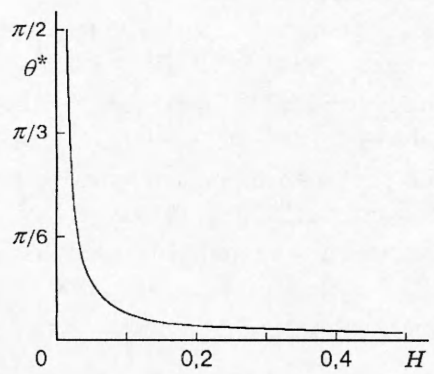

Рис. 2

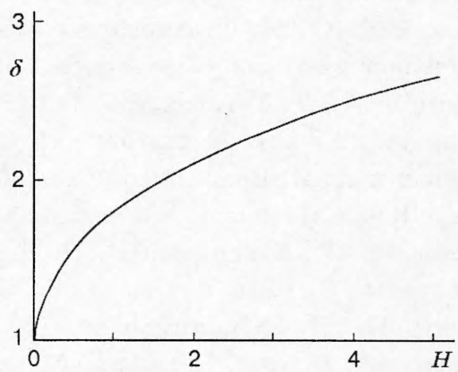

Рис. 3

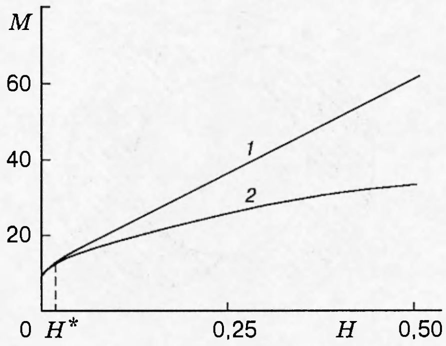

Рис. 4

полюсов внешней неподвижной сферы.

В случае отсутствия внешней сферы придем к задаче о вращении сферы в неограниченной вязкопластической среде. На рис. 3 дана зависимость максимального радиуса области течения δ в экваториальной плоскости, т. е. при $\theta^* = \pi/2$, от параметра H.

На рис. 4 приведена зависимость момента M, приложенного к внутренней сфере, от параметра H для случая ограниченной и неограниченной среды (линии *1* и *2* соответственно). При значениях $H \leqslant H^*$ эти линии совпадают, а при $H > H^*$ момент трения при наличии внешней сферы больше, чем в случае вращения сферы в неограниченной среде.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Астрахан И. М.** Круговое вращательное движение вязкопластичной жидкости в пограничном слое на круговом цилиндре // Изв. вузов. Нефть и газ. 1960. № 7. С. 85–90.
2. **Астрахан И. М.** Некоторые решения уравнений пограничного слоя в вязкопластичной жидкости // Тр. Моск. ин-та нефтехим. и газовой пром-сти. 1964. Вып. 46. С. 94–100.
3. **Аббасов А. А.** Гидродинамические исследования вопросов движения вязких и вязкопластичных жидкостей. Баку: Изд-во АН АзССР, 1967.
4. **Гуткин А. М.** Движения вязкопластической среды в зазоре между двумя вращающимися конусами // Коллоид. журн. 1955. Т. 17, № 6. С. 421–423.
5. **Колбовский Ю. Я., Шанин Н. П.** Стационарное вращение твердой сферы в нелинейно-вязкопластичной среде // Машины и технология переработки каучуков, полимеров и резиновых смесей: Межвуз. сб. науч. тр. Ярославль, 1984. С. 26–29.
6. **Колбовский Ю. Я.** Стационарное вращение произвольного осесимметричного тела в неограниченной вязкопластичной среде // Прикл. механика. 1983. Т. 19, № 2. С. 68–72.
7. **Чернышов А. Д.** Установившееся движение вязкопластической среды между двумя соосными конусами и внутри двугранного угла // ПМТФ. 1970. № 5. С. 93–99.
8. **Сафрончик А. И.** Вращение цилиндра с переменной угловой скоростью в вязкопластичной среде // Прикл. математика и механика. 1959. Т. 23, вып. 6. С. 1051–1056.
9. **Мосолов П. П., Мясников В. П.** Вариационные методы в теории течений вязкопластической среды // Прикл. математика и механика. 1965. Т. 29, вып. 3. С. 468–492.
10. **Мосолов П. П., Мясников В. П.** Вариационные методы в теории течений жестко-вязкопластических тел. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1971.
11. **Чернышов А. Д.** Об одном эвристическом методе решения нелинейных задач эллиптического типа для двусвязных областей // Прикл. математика и механика. 1978. Т. 42, вып. 2. С. 321–326.

12. **Ивлев Д. Д., Быковцев Г. И.** Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971.
13. **Емельянов Е. М., Чернышов А. Д.** Об образовании жестких зон в вязкопластической среде // ПМТФ. 1974. № 3. С. 143–148.
14. **Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И.** Вычислительные методы. М.: Наука, 1977. Т. 2.
15. **Резунов А. В., Чернышов А. Д.** Задача о чистом сдвиге вязкопластической среды между двумя некоаксиальными круговыми цилиндрами // ПМТФ. 1979. № 4. С. 135–141.

Поступила в редакцию 6/VIII 1996 г.,
в окончательном варианте — 14/III 1997 г.