УДК 532.591+517.948

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ СДВИГОВЫХ ПОТОКОВ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В КАНАЛЕ

А. А. Чесноков

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: chesnokov@hydro.nsc.ru

Рассматривается задача о распаде произвольного разрыва для уравнений, описывающих сдвиговые плоскопараллельные движения идеальной жидкости в узком канале. Исследован класс частных решений, соответствующий движениям жидкости с кусочно-постоянной завихренностью. В этом классе установлено существование автомодельных решений, описывающих все возможные нестационарные конфигурации волн, возникающих в результате нелинейного взаимодействия заданных сдвиговых потоков.

Ключевые слова: сдвиговые потоки, длинные волны, распад произвольного разрыва, гиперболичность.

Введение. Многие математические модели распространения длинноволновых возмущений в сдвиговых (завихренных) потоках жидкости и газа сводятся к нелинейным интегродифференциальным уравнениям. Качественный анализ различных моделей теории длинных волн проведен в [1] на основе развитого В. М. Тешуковым обобщения понятия гиперболичности и метода характеристик для систем уравнений с операторными коэффициентами [2]. Результаты исследований показывают как отличия данных моделей от дифференциальных гиперболических систем (в частности, наличие непрерывного спектра характеристических скоростей), так и аналогичные свойства. В процессе эволюции решений нелинейных обобщенно-гиперболических интегродифференциальных уравнений могут возникнуть сильные разрывы, что приводит к необходимости корректной формулировки уравнений движения в виде законов сохранения и анализу задачи о распаде произвольного разрыва (задачи Римана).

В данной работе рассматривается задача о распаде произвольного разрыва для нелинейных уравнений, описывающих сдвиговое движение с кусочно-постоянной завихренностью в узком канале. В этом классе получено и исследовано автомодельное решение. Показано, что в области взаимодействия сдвиговых потоков движение жидкости имеет существенно двумерный нестационарный характер. Это выражается в формировании струйного движения вдоль линии раздела потоков, направленного в зависимости от отношения завихренностей к верхней или нижней границе канала. Аналогичная постановка задачи изучена В. М. Тешуковым для модели со свободной границей [3] при определенных ограничениях на начальные данные, обусловленных выполнением условий сильной нелинейности характеристик. В настоящей работе построено решение задачи о взаимодействии сдвиговых потоков без ограничений на их завихренности и проанализированы соответствующие

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 04-01-00253) и гранта Президента РФ по государственной поддержке молодых российских ученых (грант № МК-1734.2005.1).

волновые конфигурации, включающие либо простую волну, либо простую волну и сильный разрыв. В случае взаимодействия потоков с произвольными монотонными по глубине профилями скорости предложена дискретизация интегродифференциальных уравнений и выведены дифференциальные законы сохранения.

1. Постановка задачи. Уравнения плоскопараллельного движения идеальной несжимаемой жидкости в канале имеют вид

$$u_t + uu_x + vu_y + \rho^{-1}p_x = 0, \qquad \varepsilon^2(v_t + uv_x + vv_y) + \rho^{-1}p_y = -g,$$
$$u_x + v_y = 0, \qquad v(t,x,0) = 0, \qquad v(t,x,h_0) = 0.$$

Здесь безразмерные переменные t, x, y, u, v, p — время, декартовы координаты, компоненты вектора скорости и давление; постоянные ρ, g, h_0 — плотность, ускорение свободного падения и глубина канала (без ограничения общности эти константы можно положить равными единице); ε — отношение вертикального масштаба к горизонтальному, которое считается малым. В приближенной теории членами порядка ε^2 можно пренебречь, вследствие чего давление по глубине распределяется гидростатично: $p = g\rho(h_0 - y) + \rho p^*(t,x)$ (ρp^* — безразмерное давление на верхней крышке канала). В результате получаем следующую интегродифференциальную модель:

$$u_t + uu_x + vu_y + p^*_x = 0, \qquad v = -\int_0^y u_x(t,x,y')\,dy', \qquad \int_0^{h_0} u_x(t,x,y')\,dy' = 0. \tag{1}$$

Последнее уравнение системы (1) означает, что расход жидкости в канале

$$Q(t) = \int_0^{h_0} u(t,x,y)\,dy$$

не зависит от переменной x. Более того, при отсутствии источников расход $Q(t)$ можно считать равным нулю, поскольку уравнения (1) допускают преобразование перехода в неинерциальную систему координат

$$X = x - f(t), \qquad U = u - f'(t), \qquad P^* = p^* + xf''(t) \tag{2}$$

с произвольной функцией $f(t)$.

Из (1) следует, что функции $u_0(t,x)$ и $u_1(t,x)$ (скорости на верхней и нижней границах канала) удовлетворяют уравнениям

$$u_{0t} + u_0u_{0x} + p^*_x = 0, \qquad u_{1t} + u_1u_{1x} + p^*_x = 0. \tag{3}$$

Используя любое из уравнений (3), можно исключить давление p^* из системы (1) и привести интегродифференциальную модель к эволюционному виду. Тогда для определения относительной скорости $w(t,x,y) = u(t,x,y) - u_1(t,x)$ получаем уравнение

$$w_t + (w^2/2 + wu_1)_x + vw_y = 0, \tag{4}$$

где

$$v = -yu_{1x} - \int_0^y w_x(t,x,y')\,dy', \qquad u_1 = h_0^{-1}\Big(Q(t) - \int_0^{h_0} w(t,x,y)\,dy\Big).$$

Для решения уравнения (4) необходимо задать расход жидкости в канале $Q(t)$ и начальное распределение относительной скорости $w(0,x,y)$, такое что $w(0,x,h_0) = 0$. Далее будем считать, что расход $Q = 0$ (в силу преобразования (2) это не ограничивает общности). Начальные данные для уравнения (4) зададим в виде

$$w\big|_{t=0} = \begin{cases} u^r(y) - u^r(h_0), & x > 0, \\ u^l(y) - u^l(h_0), & x < 0, \end{cases} \tag{5}$$

где $u^r(y)$, $u^l(y)$ — произвольные заданные функции, удовлетворяющие условию

$$Q = \int\limits_0^{h_0} u^r(y)\,dy = \int\limits_0^{h_0} u^l(y)\,dy = 0. \tag{6}$$

Начальные данные (5) являются обобщением классической постановки задачи Римана для интегродифференциального уравнения (4). Решение задачи (4), (5) описывает нестационарные волновые конфигурации, образующиеся при взаимодействии заданных сдвиговых потоков, заполняющих канал.

В ряде случаев для анализа характеристических свойств и формулировки систем законов сохранения моделей теории длинных волн целесообразно использовать смешанные эйлерово-лагранжевы переменные [4]. В уравнениях (1) переход к этим координатам осуществляется путем замены переменной $y = \Phi(t,x,\lambda)$ ($\Phi(t,x,\lambda)$ — решение задачи Коши):

$$\Phi_t + u(t,x,\Phi)\Phi_x = v(t,x,\Phi), \qquad \Phi(0,x,\lambda) = \Phi_0(x,\lambda) \qquad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1).$$

Замена переменных обратима при условии $\Phi_\lambda \neq 0$. Для определения функций $\Phi_\lambda = u(t,x,\lambda)$ и $\Phi_\lambda = H(t,x,\lambda)$ имеем систему дифференциальных уравнений с дополнительным интегральным условием

$$\begin{gathered} (u-u_1)_t + ((u^2 - u_1^2)/2)_x = 0, \qquad H_t + (uH)_x = 0, \\ \int\limits_0^1 H\,d\lambda = h_0 \qquad (u_1 = u(t,x,1)). \end{gathered} \tag{7}$$

В работе [5] система уравнений (7) приведена к эволюционному виду

$$\begin{gathered} w_t + (w^2/2 + wu_1)_x = 0, \qquad H_t + (uH)_x = 0, \\ u_1 = -\Big(\int\limits_0^1 H\,d\lambda\Big)^{-1} \int\limits_0^1 wH\,d\lambda, \qquad u = w + u_1 \end{gathered} \tag{8}$$

и исследована на основе обобщения понятий характеристик и гиперболичности для систем с операторными коэффициентами [1]. Для течений с монотонным по глубине профилем скорости ($u_\lambda \neq 0$) получено характеристическое уравнение

$$\chi(k) = -\frac{1}{\omega_1(u_1 - k)} + \frac{1}{\omega_0(u_0 - k)} + \int\limits_0^1 \Big(\frac{1}{\omega}\Big)_\lambda \frac{d\lambda}{u - k} = 0, \tag{9}$$

установлено существование непрерывного характеристического спектра $k(t,x) = u(t,x,\lambda)$ и сформулированы условия гиперболичности

$$\Delta \arg(\chi^+/\chi^-) = 0, \qquad \chi^\pm \neq 0.$$

Здесь $\omega = u_\lambda/H$; комплексные функции $\chi^\pm(u(\lambda))$ — предельные значения $\chi(k)$ из верхней и нижней полуплоскостей на отрезке $[u_0, u_1]$; приращение аргумента функции χ^+/χ^-

вычисляется при изменении λ от 0 до 1; нижние индексы 0 и 1 означают, что функции берутся при $\lambda = 0$, 1 соответственно.

Для определения разрывных решений модели сдвигового движения жидкости в канале используем систему законов сохранения (7). Первое уравнение представляет собой локальный закон сохранения относительного импульса, второе — локальный закон сохранения массы, последнее уравнение является замыкающим. Первые два уравнения системы (7) совпадают с предложенными в [6, 7] законами сохранения для описания разрывных решений уравнений вихревой мелкой воды, моделирующих распространение длинноволновых возмущений в слое жидкости со свободной границей. Условия на разрыве, соответствующие законам сохранения (7), имеют вид

$$[(u-D)^2-(u_1-D)^2]=0, \qquad [(u-D)H]=0, \qquad [Q]=0. \tag{10}$$

Из уравнений (10) следует соотношение $[\omega] = [u_\lambda/H] = 0$ (завихренность при переходе через разрыв сохраняется).

2. Уравнение двухслойного движения с кусочно-постоянной завихренностью. Рассмотрим задачу (1) с начальными данными вида (5), в которых

$$u^r(y)=\omega_1 y+u_0^r, \qquad u^l(y)=\omega_2 y+u_0^l,$$

ω_i, u_0^r, u_0^l — постоянные. Используя формулу (6), определим скорости на нижней и верхней крышках канала:

$$u_0^l=-\omega_2 h_0/2, \qquad u_0^r=-\omega_1 h_0/2, \qquad u_1^l=\omega_2 h_0/2, \qquad u_1^r=\omega_1 h_0/2. \tag{11}$$

Решение уравнений (1) в области взаимодействия потоков (область $ABCF$ на рис. 1) представим в виде

$$u(t,x,y)=\begin{cases} \Omega_1 y+u_0(t,x), & 0\leqslant y\leqslant h(t,x),\\ \Omega_2(y-h_0)+u_1(t,x), & h(t,x)\leqslant y\leqslant h_0; \end{cases} \tag{12}$$

$$v(t,x,y)=\begin{cases} -yu_{0x}, & 0\leqslant y\leqslant h(t,x),\\ (h-y)u_{1x}-hu_{0x}, & h(t,x)\leqslant y\leqslant h_0. \end{cases} \tag{13}$$

Для случая, представленного на рис. 1,*а* (рис. 1,*б*), $\Omega_1=\omega_1$, $\Omega_2=\omega_2$ ($\Omega_1=\omega_2$, $\Omega_2=\omega_1$). Конфигурации, показанные на рис. 1,*а* (рис. 1,*б*), реализуются при положительных (отрицательных) завихренностях ω_i. Отметим, что достаточно рассмотреть один из этих

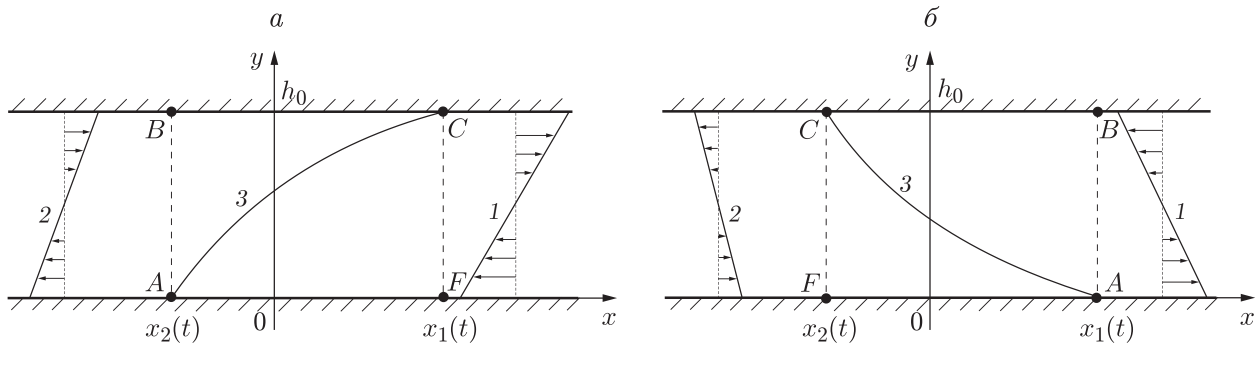

Рис. 1. Двухслойное движение жидкости с положительными (*а*) и отрицательными (*б*) кусочно-постоянными завихренностями:
1 — профиль скорости потока с завихренностью ω_1; *2* — то же с завихренностью ω_2; *3* — линия раздела потоков с завихренностями ω_1 и ω_2

случаев, так как в силу симметрии относительно центральной линии канала они сводятся друг к другу соответствующей заменой переменных.

Используя представление решения (12) и условие непрерывности скорости на границе раздела потоков с постоянными завихренностями Ω_1 и Ω_2, можно выразить u_1 через u_0 и h:

$$u_1(t,x) = (\Omega_1 - \Omega_2)h(t,x) + u_0(t,x) + \Omega_2 h_0. \tag{14}$$

В силу (13) и условия $v(t,x,h_0) = 0$ имеем уравнение $(h_0 - h)u_{1x} + hu_{0x} = 0$, проинтегрировав которое с учетом (14) получаем

$$u_0 = \frac{\Omega_1 - \Omega_2}{2h_0}\, h^2 - (\Omega_1 - \Omega_2)h + a(t). \tag{15}$$

Расход жидкости в канале равен нулю:

$$Q = \int\limits_0^{h_0} u\,dy = a(t)h_0 + \frac{\Omega_2 h_0^2}{2} = 0,$$

поэтому $a(t) \equiv -\Omega_2 h_0/2$. Для построения решения необходимо удовлетворить кинематическому условию $h_t + u(t,x,h)h_x = v(t,x,h)$ на линии раздела $y = h(t,x)$ потоков с разными постоянными завихренностями. С учетом (12), (13) это условие принимает вид

$$h_t + (\Omega_1 h + u_0)h_x + hu_{0x} = 0.$$

С использованием (15) последнее уравнение приводится к скалярному закону сохранения

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \qquad \varphi(h) = \frac{\Omega_1 - \Omega_2}{2h_0} h^3 + \Big(\Omega_2 - \frac{\Omega_1}{2}\Big)h^2 - \frac{\Omega_2 h_0}{2}\, h. \tag{16}$$

Таким образом, построение решения задачи о движении двухслойной жидкости с кусочно-постоянной завихренностью сведено к интегрированию уравнения (16). В зависимости от завихренностей ω_1 и ω_2 в начальный момент времени ($t = 0$) либо $h = h_0$ при $x > 0$ и $h = 0$ при $x < 0$, либо $h = 0$ при $x > 0$ и $h = h_0$ при $x < 0$.

Условие сильной нелинейности характеристики уравнения (16) заключается в выпуклости функции $\varphi(h)$ для всех $h \in (0, h_0)$. Введем обозначение $\alpha_0 = \Omega_1/\Omega_2$. Тогда условие $\varphi''(h) \neq 0$ принимает вид

$$2^{-1} < \alpha_0 < 2. \tag{17}$$

Неравенство (17) означает, что параметр $\alpha = \omega_1/\omega_2$ принадлежит интервалу $(1/2, 2)$.

3. Простая волна взаимодействия потоков. При выполнении неравенства (17) существует непрерывное решение рассматриваемой задачи, задаваемое простой волной. Учитывая инвариантность уравнения (16) и начальных данных (5) относительно равномерного растяжения переменных x и t, решение ищем в виде автомодельной простой волны $h = h(k)$ ($k = x/t$). Получаем уравнение $(\varphi'(h) - k)h'(k) = 0$, в силу которого

$$k = \varphi'(h) = \frac{3(\Omega_1 - \Omega_2)}{2h_0}\, h^2 + (2\Omega_2 - \Omega_1)h - \frac{\Omega_2 h_0}{2} \tag{18}$$

при $h'(k) \neq 0$. Решение характеристического уравнения (9) дает такой же результат.

Из формул (11) следует, что $u_1^r - u_0^l = u_1^l - u_0^r$, поэтому справедливо одно из двух неравенств: $u_1^r > u_0^l$ (см. рис. 1,*а*) или $u_0^r > u_1^l$ (см. рис. 1,*б*). Используя ω_i, эти неравенства можно записать в виде $\omega_1 + \omega_2 > 0$ или $\omega_1 + \omega_2 < 0$. При этом характеристический корень k в области взаимодействия потоков изменяется от u_0^l до u_1^r или от u_1^l до u_0^r. В силу замечания о симметрии течения относительно средней линии канала достаточно рассмотреть случай $\omega_1 + \omega_2 > 0$, при этом начальные данные для уравнения (16) имеют вид

$$h(0,x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ h_0, & x > 0. \end{cases} \tag{19}$$

Дифференцируя (18), находим выражения для первой и второй производных функции $h(k)$:

$$h'(k) = \Big(\frac{3(\Omega_1 - \Omega_2)}{h_0}\, h(k) + 2\Omega_2 - \Omega_1\Big)^{-1}, \qquad h''(k) = -\frac{3(\Omega_1 - \Omega_2)}{h_0}\,(h'(k))^3. \tag{20}$$

Из (20) следует, что при $\Omega_i > 0$ выполняется неравенство $h'(k) > 0$, причем в случае $0 < \Omega_2 < \Omega_1$ функция $h(k)$ выпукла вверх, а в случае $0 < \Omega_1 < \Omega_2$ — выпукла вниз.

Пусть $0 < \omega_2 < \omega_1$, $\omega_1/\omega_2 = \alpha < 2$ и $\Omega_1 = \omega_1$, $\Omega_2 = \omega_2$. Другие случаи анализируются аналогично. Решая уравнение (16), определяем линию $y = h(k)$ ($k = x/t \in (u_0^l, u_1^r)$), разделяющую потоки с разными завихренностями:

$$h(k) = -\frac{(2\omega_2 - \omega_1)h_0}{3(\omega_1 - \omega_2)} + \sqrt{\frac{(2\omega_2 - \omega_1)^2 h_0^2}{9(\omega_1 - \omega_2)^2} + \frac{h_0(2k + \omega_2 h_0)}{3(\omega_1 - \omega_2)}} \tag{21}$$

(выбираем ветвь решения со знаком “плюс” перед квадратным корнем, так как $\omega_1 > \omega_2$ и $h'(k) > 0$). Подставляя функцию $h(x/t)$ в формулы (15), (14) и используя представление решения (12), (13), определяем поле скоростей (u, v) в волне взаимодействия потоков. Давление на верхней границе канала p^* находится путем интегрирования любого из уравнений (3). Следует отметить, что границы области взаимодействия потоков движутся с характеристической скоростью. Действительно, при $h \to 0$ ($h \to h_0$) характеристический корень $k \to u_0^l = x_2'(t)$ ($k \to u_1^r = x_1'(t)$).

Для качественного анализа решения найдем значения функций $h(k)$, $u_{1,2}(k)$, $\bar{u}(k)$ и их первых производных в точках A и C (при $k = u_0^l,\ u_1^r$):

$$h(u_0^l) = 0, \quad h(u_1^r) = h_0, \quad u_0(u_0^l) = u_0^l, \quad u_0(u_1^r) = u_0^r, \quad u_1(u_0^l) = u_1^l, \quad u_1(u_1^r) = u_1^r.$$

Из первой формулы (20) следует

$$h'(u_0^l) = -(\omega_1 - 2\omega_2)^{-1}, \qquad h'(u_1^r) = (2\omega_1 - \omega_2)^{-1}.$$

Учитывая связь между производными

$$u_0' = ((\omega_1 - \omega_2)h/h_0 - \omega_1 + \omega_2)h', \quad u_1' = (\omega_1 - \omega_2)h' + u_0', \quad \bar{u}' = \omega_1 h' + u_0',$$

находим значения функций $u_{1,2}'(k)$, $\bar{u}(k)$ в точках A и C:

$$\begin{aligned} &u_0'(u_0^l) = \frac{\alpha - 1}{\alpha - 2}, \qquad u_1'(u_0^l) = 0, \qquad \bar{u}'(u_0^l) = \frac{1}{2 - \alpha}, \\ &u_0'(u_1^r) = 0, \qquad u_1'(u_1^r) = \frac{\alpha - 1}{2\alpha - 1}, \qquad \bar{u}'(u_1^r) = \frac{\alpha}{2\alpha - 1}. \end{aligned} \tag{22}$$

4. Траектории движения частиц. Интегральные кривые $x = x(t)$, $y = y(t)$ системы дифференциальных уравнений $x'(t) = u(k, y)$, $y'(t) = v(t, x, y) = t^{-1}V(k, y)$ ($k = x/t$) задают траектории движения частиц. Перейдем в плоскость переменных (k, y) и выполним замену переменной $s = \ln(t/t_0)$. Тогда уравнения для определения траекторий принимают вид

$$\frac{dk}{ds} = u(k, y) - k, \qquad \frac{dy}{ds} = V(k, y). \tag{23}$$

Рассмотрим область $ACF = \{(k,y)\colon u_0^l < k < u_1^r,\ 0 < y < h(k)\}$ (см. рис. 1), в которой согласно представлению решения (12), (13)

$$u(k,y) = \omega_1 y + u_0(k), \qquad V(k,y) = -y u_0'(k).$$

Особыми точками системы (23) являются точки $A = (u_0^l, 0)$ и $C = (u_1^r, h_0)$. Используя (22), выполним линеаризацию уравнений (23) в окрестности точки A:

$$\frac{dk}{ds} = \omega_1 y - \frac{k - u_0^l}{2-\alpha}, \qquad \frac{dy}{ds} = \frac{\alpha - 1}{2-\alpha}\, y.$$

Собственные значения матрицы коэффициентов

$$\lambda_1 = -(2-\alpha)^{-1} < 0, \qquad \lambda_2 = (2-\alpha)(\alpha-1) > 0$$

вещественные и разных знаков ($1 < \alpha < 2$), поэтому особая точка A является седлом. Уравнения (23), линеаризованные в окрестности точки C, имеют вид

$$\frac{dk}{ds} = \omega_1(y - h_0) - (k - u_1^r), \qquad \frac{dy}{ds} = -h_0 u_0''(u_1^r)(k - u_1^r).$$

Полагая $k = u_1^r$ в формуле

$$u_0''(k) = \frac{\omega_1 - \omega_2}{h_0}\,(h'(k))^2 + \Big(\frac{\omega_1 - \omega_2}{h_0}\, h(k) - \omega_1 + \omega_2\Big) h''(k)$$

и учитывая (21), (20), найдем $u_0''(u_1^r)$:

$$u_0''(u_1^r) = \frac{\alpha(\alpha-1)}{\omega_1 h_0 (2\alpha - 1)^2}.$$

Вычисление характеристических корней матрицы правой части системы (23), линеаризованной в окрестности точки C, дает

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}\Big(1 \mp \frac{1}{2\alpha - 1}\Big) < 0.$$

Следовательно, особая точка C — узел.

Рассмотрим область $ABC = \{(k,y)\colon u_0^l < k < u_1^r,\ h(k) < y < h_0\}$ (см. рис. 1), в которой функции $u - k$ и V имеют вид

$$u - k = u_1(k) + \omega_2(y - h_0) - k, \qquad V = -(y - h(k)) u_1'(k) - h(k) u_0'(k)$$

и обращаются в нуль в точках $A = (u_0^l, 0)$ и $C = (u_1^r, h_0)$. Линеаризуя систему (23) в окрестности особой точки A, имеем

$$\frac{dk}{ds} = -(k - u_0^l) + \omega_2 y, \qquad \frac{dy}{ds} = \frac{\alpha - 1}{\omega_2(\alpha-2)^2}\,(k - u_0^l).$$

Вычисление характеристических корней матрицы коэффициентов правой части линеаризованной системы показывает, что корни

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}\Big(1 \mp \frac{\alpha}{2-\alpha}\Big)$$

вещественные и разных знаков. Поэтому точка A является седлом. Линеаризуя уравнения (23) в окрестности особой точки C, получаем

$$\frac{dk}{ds} = \frac{\alpha}{1 - 2\alpha}\,(k - u_1^r) + \omega_2(y - h_0), \qquad \frac{dy}{ds} = \frac{\alpha - 1}{1 - 2\alpha}\,(y - h_0).$$

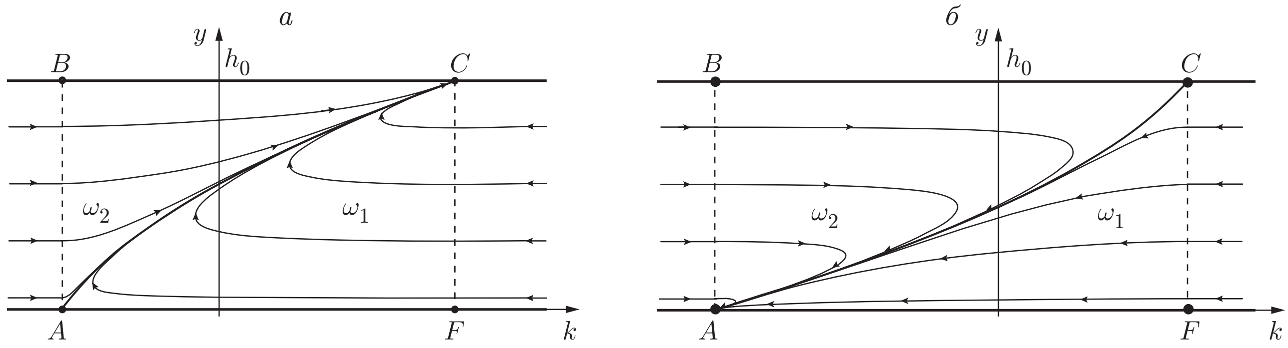

Рис. 2. Траектории движения частиц в автомодельной простой волне: *а* — $0 < \omega_2 < \omega_1$; *б* — $0 < \omega_1 < \omega_2$

Собственные значения матрицы коэффициентов

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}\Big(1 \mp \frac{1}{2\alpha - 1}\Big) < 0$$

вещественные и одного знака. Следовательно, точка C — узел.

Результаты численного интегрирования уравнений (23) иллюстрируют установленный характер особенностей в точках A и C (рис. 2,*а*). В случае $0 < \omega_1 < \omega_2$, $1/2 < \alpha < 1$ точки $A = (u_0^l, 0)$, $C = (u_1^r, h_0)$ также являются особыми для системы уравнений (23), описывающих траектории движения частиц. При этом точка A является узлом, а точка C — седлом (рис. 2,*б*). Вдоль линии раздела потоков с разными завихренностями формируется струйное движение, имеющее существенно двумерный характер.

5. Дискретизация уравнений (8), дифференциальные законы сохранения. Уравнения сдвигового движения жидкости в канале являются интегродифференциальными, что не позволяет применить к ним методы, развитые для численного расчета дифференциальных систем законов сохранения. Следуя [7], разобьем отрезок $[0, 1]$ на N интервалов ($0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_{N-1} < \lambda_N = 1$) и введем обозначения

$$y_i = \Phi(t, x, \lambda_i), \qquad \eta_i = y_i - y_{i-1}, \qquad u_i = u(t, x, \lambda_i),$$
$$\omega_i = (u_i - u_{i-1})/\eta_i, \qquad u_{ci} = (u_i + u_{i-1})/2.$$

Интегрируя по λ уравнения системы (8), имеем

$$\Big(\int\limits_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i} H\,d\lambda\Big)_t + \Big(\int\limits_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i} uH\,d\lambda\Big)_x = 0, \qquad (u_i - u_{i-1})_t + ((u_i^2 - u_{i-1}^2)/2)_x = 0,$$

$$u_N = -\Big(\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i} H\,d\lambda\Big)^{-1}\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i} wH\,d\lambda.$$

Учитывая, что $H\,d\lambda = dy$, и применяя кусочно-линейную аппроксимацию профиля скорости по глубине

$$u = \omega_i(y - y_{i-1}) + u_{i-1}, \qquad y \in [y_{i-1}, y_i],$$

получим систему $2N$ дифференциальных уравнений для определения величин $(\eta_1, \ldots, \eta_N, \omega_1\eta_1, \ldots, \omega_N\eta_N)$:

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u_{ci}\eta_i) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial t}(\omega_i\eta_i) + \frac{\partial}{\partial x}(u_{ci}\omega_i\eta_i) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, N), \qquad (24)$$

$$u_{ci} = u_0 + \frac{\omega_i\eta_i}{2} + \sum_{j=1}^{i-1} \omega_j\eta_j, \qquad u_0 = -\Big(\sum_{i=1}^{N} \eta_i\Big)^{-1} \sum_{i=1}^{N} \eta_i \Big(\frac{\omega_i\eta_i}{2} + \sum_{j=1}^{i-1} \omega_j\eta_j\Big).$$

Уравнения (24), полученные путем дискретизации интегродифференциальных законов сохранения (8), описывают многослойное движение идеальной жидкости в канале с кусочно-линейным профилем скорости по глубине в каждом из N слоев. Следствием системы является уравнение $(\eta_1 + \ldots + \eta_N)_t = 0$. Если $\eta_1 + \ldots + \eta_N = h_0 = \mathrm{const}$ при $t = 0$, то глубина канала равна h_0 во все моменты времени. Численное решение системы (24) можно получить на основе методов, развитых для решения гиперболических уравнений [8].

Следует отметить, что уравнение (16), используемое для описания двухслойного движения жидкости, является частным случаем системы (24). Действительно, рассмотрим случай $N = 2$ с начальными данными

$$\eta_i(0, x) = \begin{cases} 2^{-1}(1 + (-1)^i)h_0, & x < 0, \\ 2^{-1}(1 + (-1)^{i+1})h_0, & x > 0, \end{cases}$$

$$\omega_i\eta_i\Big|_{t=0} = \eta_i(0, x)\Omega_i \qquad (\Omega_i = \mathrm{const}, \quad h_0 = \mathrm{const}, \quad i = 1, 2).$$

Тогда в силу (24) при взаимодействии потоков завихренность в слоях сохраняет постоянные значения $\omega_i = \Omega_i$, поэтому третье и четвертое уравнения для определения $\omega_1\eta_1$ и $\omega_2\eta_2$ совпадают с первыми двумя уравнениями для нахождения η_1 и η_2. С учетом равенства $\eta_1 + \eta_2 = h_0$ и обозначения $\eta_1 = h$ первые два уравнения (24) преобразуются к закону сохранения (16).

6. Решение с сильным разрывом. Построение решения задачи о взаимодействии сдвиговых потоков с кусочно-постоянными завихренностями ω_i $(i = 1, 2)$ в канале сведено к интегрированию скалярного закона сохранения (16), в котором следует положить $\Omega_1 = \omega_1$ и $\Omega_2 = \omega_2$ при $\omega_1 + \omega_2 > 0$ или $\Omega_1 = \omega_2$ и $\Omega_2 = \omega_1$ при $\omega_1 + \omega_2 < 0$. В случае, если функция $\varphi(h)$ не является выпуклой, непрерывного решения уравнения (16), связывающего значения $h = h^-$ и $h = h^+$ $(h^- = 0,\ h^+ = h_0$ или $h^- = h_0,\ h^+ = 0)$, не существует.

Получим решение уравнения (16) с начальными данными (19) в виде комбинации автомодельной простой волны и сильного разрыва. Согласно общей теории гиперболических уравнений [9, 10] для получения устойчивого разрывного решения “невыпуклого” закона сохранения необходимо построить выпуклое расширение с учетом условий устойчивости разрыва [11]:

$$\begin{aligned} &\frac{\varphi(h) - \varphi(h^-)}{h - h^-} \geqslant D \qquad (h^- < h < h^+), \\ &\frac{\varphi(h) - \varphi(h^+)}{h - h^+} \leqslant D \qquad (h^+ < h < h^-). \end{aligned} \tag{25}$$

Как отмечено выше, достаточно рассмотреть случай $\Omega_1 + \Omega_2 > 0$, соответствующий начальным данным $h = h^- = 0$ при $x < 0$ и $h = h^+ = h_0$ при $x > 0$. Для этого используем первое неравенство (25) и построим “нижнее” выпуклое расширение (рис. 3) путем замены на участке $(0, h_*)$ (или (h_*, h_0)) кривой $\varphi = \varphi(h)$ отрезком прямой (штриховая линия). Угловой коэффициент штриховой прямой (рис. 3) равен скорости распространения разрыва D, длина отрезка, на котором кривая $\varphi = \varphi(h)$ заменяется отрезком прямой, равна амплитуде разрыва h_*.

Величины D и h_* определяются из решения системы уравнений $\varphi(h_*) = Dh_*$ и $\varphi'(h_*) = D$ (рис. 3,*а,б*):

$$D = \frac{\alpha_0^2\Omega_2 h_0}{8(1 - \alpha_0)}, \qquad h_* = \frac{(\alpha_0 - 2)h_0}{2(\alpha_0 - 1)} \qquad \Big(\alpha_0 = \frac{\Omega_1}{\Omega_2}\Big). \tag{26}$$

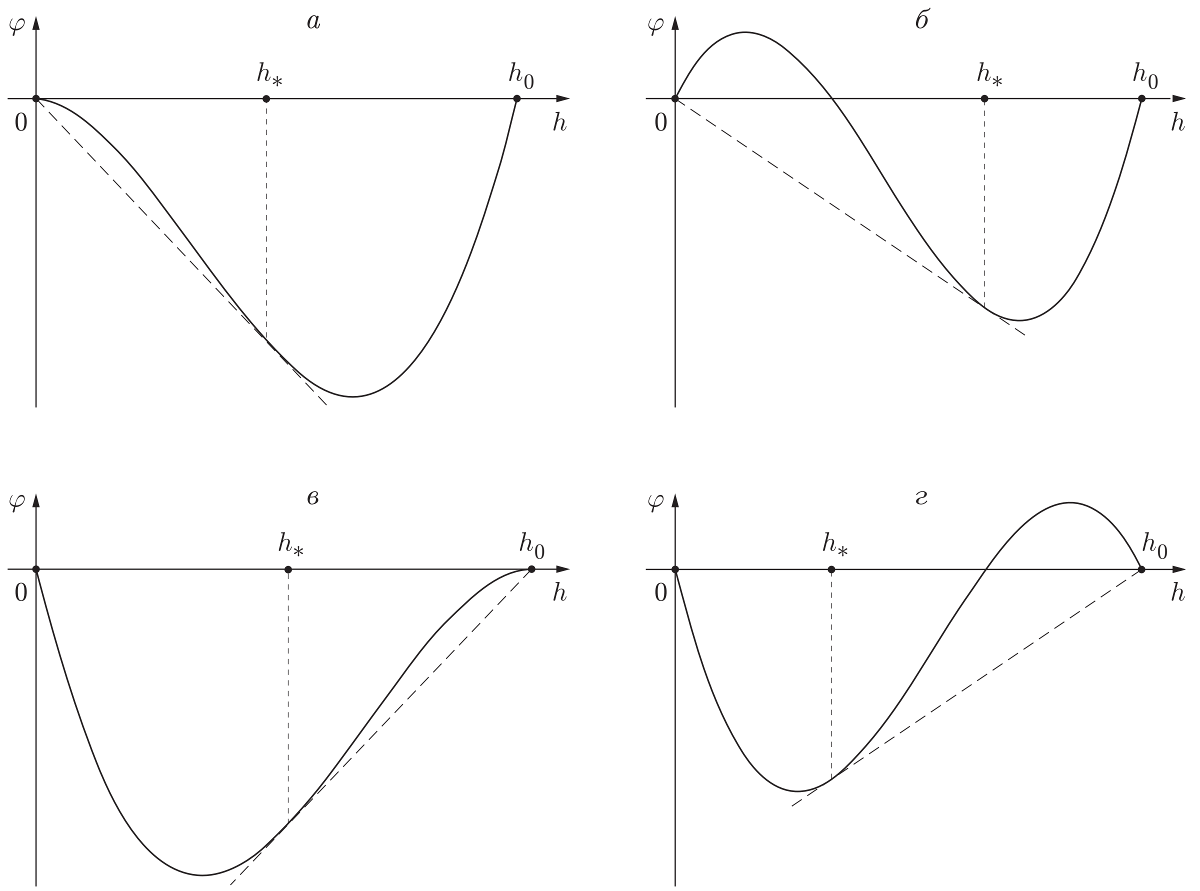

Рис. 3. Построение выпуклого расширения для закона сохранения (16) в случаях:
а — $0 < \Omega_2 < \Omega_1$, $\Omega_1/\Omega_2 > 2$; *б* — $\Omega_2 < 0 < \Omega_1$, $|\Omega_2| < \Omega_1$; *в* — $0 < \Omega_1 < \Omega_2$, $\Omega_1/\Omega_2 < 1/2$; *г* — $\Omega_1 < 0 < \Omega_2$, $|\Omega_1| < \Omega_2$

В случаях, представленных на рис. 3,*в,г*, скорость и амплитуда разрыва находятся аналогично из системы $\varphi(h_*) = D(h_* - h_0)$, $\varphi'(h_*) = D$.

Картина движений на плоскости событий (x, t) показана на рис. 4, где штриховой линией выделен сильный разрыв $x = Dt$, сплошные линии — "веер" характеристик простой волны, наклон которых меняется от D до u_1^r (рис. 4,*а*) либо от u_0^l до D (рис. 4,*б*).

Рассмотрим два случая, когда заданные постоянные завихренности ω_i удовлетворяют неравенствам:

1) $0 < \omega_2 < \omega_1$, $\omega_1/\omega_2 > 2$;

2) $\omega_2 < 0 < \omega_1$, $|\omega_2| < \omega_1$.

Случаи 1 и 2 исчерпывают все качественные особенности решения задачи о взаимодействии сдвиговых потоков в рамках используемой модели. При этом следует положить $\Omega_1 = \omega_1$, $\Omega_2 = \omega_2$, $\alpha_0 = \alpha = \omega_1/\omega_2$ и в качестве начальных данных для уравнения (16) взять функцию $h(x)$, равную нулю при $x < 0$ и равную h_0 при $x > 0$.

Разрывное решение 1. Решение уравнения (16) имеет вид

$$h(t,x) = \begin{cases} 0, & x < Dt, \\ \bar{h}(k), & Dt \leqslant x \leqslant \varphi'(h_0)t, \\ h_0, & x > \varphi'(h_0)t. \end{cases} \qquad (27)$$

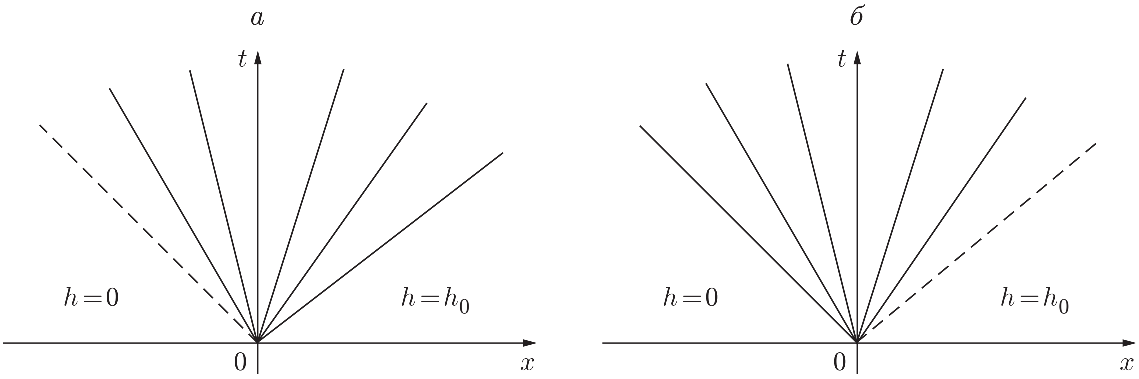

Рис. 4. Возможные волновые конфигурации: устойчивый разрыв (штриховая линия) и простая центрированная волна, примыкающая к фронту разрыва (сплошные линии):
а — $0 < \Omega_2 < \Omega_1$, $\Omega_1/\Omega_2 > 2$ или $\Omega_2 < 0 < \Omega_1$, $|\Omega_2| < \Omega_1$; *б* — $0 < \Omega_1 < \Omega_2$, $\Omega_1/\Omega_2 < 1/2$ или $\Omega_1 < 0 < \Omega_2$, $|\Omega_1| < \Omega_2$

Здесь скорость разрыва D задается первой формулой в (26); наклон характеристики $\varphi'(h_0)$, по которой простая волна примыкает к заданному сдвиговому потоку, равен $u_1^r = \omega_1 h_0/2$; функция $\bar{h}(k)$ задана формулой (21) при $k = x/t \in (D, \varphi'(h_0)]$. Используя известную функцию $h(t,x) = \bar{h}(x/t)$ и формулы (12)–(15), (3), нетрудно восстановить решение исходной задачи (4) (найти поле скоростей (u,v) и давление p). В решениях типа 1 отношение амплитуды разрыва к глубине канала $h_*/h_0 \in (0, 1/2)$ (величина h_* определяется второй формулой в (26), минимальное значение h_*/h_0 достигается при $\alpha \to 2$, максимальное — при $\alpha \to \infty$).

Соотношения на разрыве (10) в эйлеровых координатах принимают вид

$$[(u-D)^2 - (u_1 - D)^2] = 0, \qquad [(u-D)dy] = 0, \qquad [Q] = 0. \tag{28}$$

Горизонтальная компонента вектора скорости $u(k,y)$ за фронтом разрыва имеет вид

$$u(D+0, y^+) = u^+(y^+) = \begin{cases} \omega_1 y^+ + u_0^*, & 0 \leqslant y^+ \leqslant h_*, \\ \omega_2(y^+ - h_0) + u_1^*, & h_* \leqslant y^+ \leqslant h_0, \end{cases}$$

где

$$u_0^* = u_0(D+0) = -\frac{(3\alpha-4)\alpha\omega_2 h_0}{8(\alpha-1)}, \qquad u_1^* = u_1(D+0) = \frac{\alpha^2\omega_2 h_0}{8(\alpha-1)} = -D.$$

Перед разрывом $u(D-0, y) = u^l(y) = \omega_2 y + u_0^l$. Поэтому второе уравнение (28) имеет вид

$$(u^+(y^+) - D)\, dy^+ = (u^l(y) - D)\, dy.$$

Решая это уравнение с учетом $y^+(0) = h_*$, определяем функцию

$$y^+(y) = -\frac{\alpha-2}{2}\, h_* + \sqrt{\frac{\alpha-2}{2}\, h_* y + y^2 + \frac{\alpha^2 h_*^2}{4}} \qquad (0 \leqslant y \leqslant h_0), \tag{29}$$

задающую закон соответствия точек входа и выхода траекторий на фронте разрыва (при интегрировании учтено, что $u^l(y) - D > 0$, $u^+(y^+) - D > 0$, $h_* \leqslant y^+ \leqslant h_0$).

Траектории движения частиц в построенном разрывном решении при $\omega_1 = 10$, $\omega_2 = 1$, $h_0 = 1$ показаны на рис. 5. (Вид рис. 5 качественно не меняется при всех значениях ω_i, удовлетворяющих неравенствам в случае 1.) Согласно (29) сдвиговой поток с завихренностью

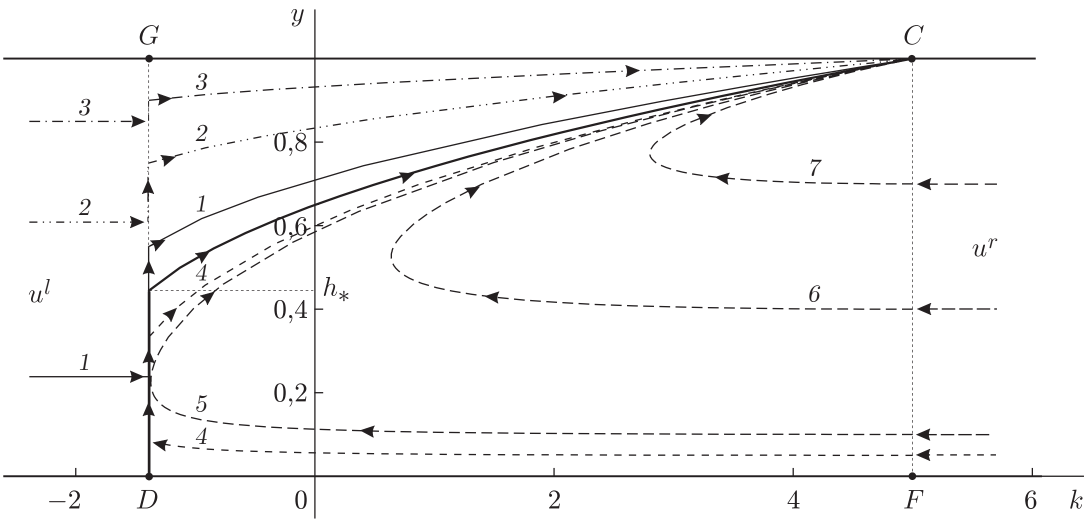

Рис. 5. Траектории движения частиц в разрывном решении 1 ($0 < \omega_2 < \omega_1$, $\omega_1/\omega_2 > 2$)

ω_2, занимающий перед разрывом $k = D - 0$ всю глубину канала $0 \leqslant y \leqslant h_0$, за разрывом занимает лишь его часть $h_* \leqslant y \leqslant h_0$ (траектории *1–3* на рис. 5). В области $M = \{(k, y)\colon D < k < u_1^r,\ 0 \leqslant y \leqslant h(k)\}$ частицы совершают возвратное относительно волны движение, т. е. величина $u - k$ меняет знак (траектории *4–7* на рис. 5). Следует отметить, что при $k = D$ величина $u^+(y) - D$ меняет знак при изменении y от 0 до h_*: $u^+(y_1) - D < 0$, если $y_1 \in [0, h_*/2)$; $u^+(y_2) - D > 0$, если $y_2 \in (h_*/2, h_*]$. Из решения уравнения

$$(u^+(y_1) - D)\, dy_1 = (u^+(y_2) - D)\, dy_2, \qquad y_2(0) = h_*$$

следует закон соответствия точек входа и выхода траекторий $y_2 = h_* - y_1$ в потоке с завихренностью ω_1 на фронте $k = D$. Построенное решение содержит особенность, в которой частицы приходят на линию разрыва из области $k > D$ и, изменив на разрыве эйлерову координату y и вектор скорости, возвращаются в область $k > D$.

По построению решения (см. рис. 5) скачок завихренности на разрыве равен нулю: $[\omega] = [u_y] = 0$. Из этого соотношения и условия $[(u - D)dy] = 0$ следует, что $[(u - D)^2 - (u_1 - D)^2] = 0$. Последнее уравнение (28) для полученного решения также выполнено, его проверка проводится непосредственными вычислениями.

Покажем, что при переходе через сильный разрыв поток энергии убывает. На гладких решениях уравнений (7) выполняется закон сохранения энергии слоя жидкости

$$\Big(\int\limits_0^1 u^2 H\, d\lambda\Big)_t + \Big(\int\limits_0^1 u^3 H\, d\lambda + 2p^* \int\limits_0^1 uH\, d\lambda\Big)_x = 0.$$

С учетом $Q = \int\limits_0^1 uH\, d\lambda = 0$ полная энергия слоя убывает, если

$$\Big[\int\limits_0^{h_0} u^2 (u - D)\, dy\Big] \leqslant 0.$$

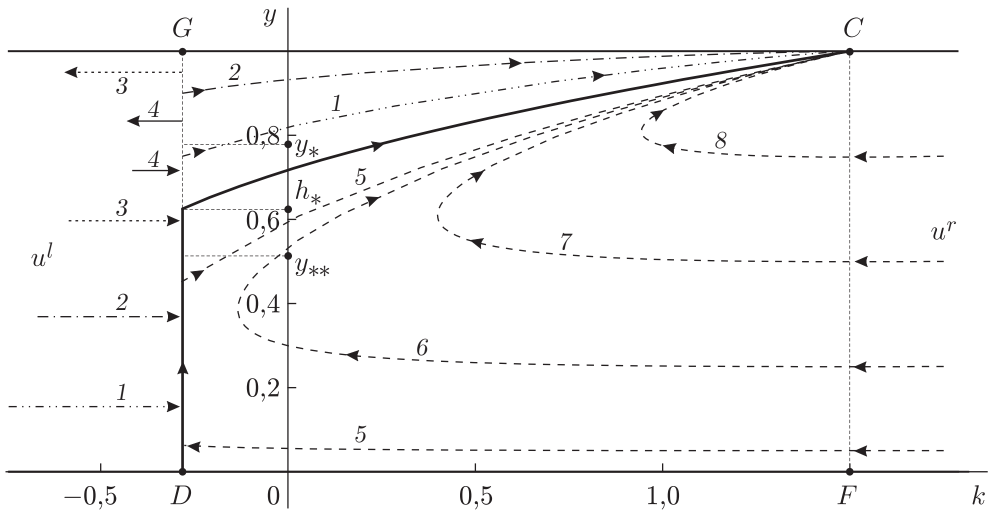

Рис. 6. Траектории движения частиц в разрывном решении 2 ($\omega_2 < 0 < \omega_1$, $|\omega_2| < \omega_1$)

В результате вычисления интегралов

$$e^l = \int\limits_0^{h_0} (u^l - D)(u^l)^2\,dy, \qquad e^+ = \int\limits_0^{h_0} (u^+ - D)(u^+)^2\,dy$$

при $\alpha > 2, \omega_2 > 0$ получаем неравенство $e^+ - e^l < 0$, выражающее убывание потока энергии на разрыве.

Разрывное решение 2. В случае выполнения неравенства $u^l - D \geqslant 0$ при $\alpha < -2(1+\sqrt{2})$ вид решения качественно соответствует разрывному решению 1. Пусть $-2(1+\sqrt{2}) < \alpha < -1$, т. е. величина $u^l - D$ меняет знак. Линия $y = h(t,x)$, разделяющая потоки с завихренностями ω_1 и ω_2, задается формулой (27). Следует отметить, что $u^l - D > 0$ при $y \in [0, y_*)$ и $u^l - D < 0$ при $y \in (y_*, h_0]$, где

$$y_* = 8^{-1}(1-\alpha)^{-1}(2-\alpha)^2 h_0.$$

Второе соотношение в (28) с учетом $y^+(0) = h_*$ приводится к дифференциальному уравнению

$$(y - y_*)\,dy = (y^+ - 2y_*)\,dy^+.$$

В результате интегрирования получаем закон соответствия точек входа и выхода траекторий на фронте разрыва

$$y^+(y) = \frac{2-\alpha}{2}\,h_* - \sqrt{y^2 - \frac{2-\alpha}{2}\,h_* y + \frac{\alpha^2 h_*^2}{4}} \qquad \Big(0 \leqslant y \leqslant y_{**} = \frac{\alpha^2 h_0}{4(1-\alpha)}\Big). \tag{30}$$

Зависимость (30) монотонна, и $y^+(y_{**}) = h_0$.

Траектории движения частиц в разрывном решении 2 при $\omega_1 = 3$, $\omega_2 = -1$, $h_0 = 1$ показаны на рис. 6. Частицы, находящиеся перед разрывом $k = D - 0$ в слое $y \in [0, y_{**}]$, за разрывом $k = D + 0$ занимают слой $[h_*, h_0]$ (линии *1, 2*). Частицы, занимающие при $k = D - 0$ слой $y \in (y_{**}, h_0]$, претерпевают разрыв (линии *3, 4*). На разрыве частицы из слоя $y_1 \in [y_{**}, y_*)$ при $k = D - 0$ переходят в слой $y_2 \in (y_*, h_0]$ при $k = D - 0$. Закон соответствия траекторий задается формулой $y_2(y_1) = h_0 + y_{**} - y_1$. Следует отметить, что $u^l(y_1) - D > 0$

и $u^l(y_2) - D < 0$. В области $M = \{(k,y)\colon D < k < u_1^r,\ 0 \leqslant y \leqslant h(k)\}$ происходит поворотное относительно волны движение (линии *5–8*), причем траектории, приходящие на разрыв $k = D$, претерпевают скачок (линия *5*). Проверка первого и третьего соотношений в (28) выполняется аналогично случаю 1.

Заключение. В рамках длинноволнового приближения решена задача о взаимодействии заполняющих канал сдвиговых потоков идеальной жидкости с кусочно-постоянными завихренностями. Установлено существование автомодельных решений, описывающих все возможные волновые конфигурации, включающие либо простую волну, либо сильный разрыв и простую волну. Предложена система дифференциальных уравнений для моделирования взаимодействия сдвиговых потоков с произвольными монотонными по глубине профилями скорости.

Автор выражает благодарность В. М. Тешукову за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ляпидевский В. Ю., Тешуков В. М.** Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
2. **Тешуков В. М.** О гиперболичности уравнений длинных волн // Докл. АН СССР. 1985. Т. 284, № 3. С. 555–562.
3. **Тешуков В. М.** Нестационарное взаимодействие равномерно завихренных потоков // ПМТФ. 1998. Т. 39, № 5. С. 55–66.
4. **Захаров В. Е.** Уравнения Бенни и квазиклассическое приближение в методе обратной задачи // Функцион. анализ и его прил. 1980. Т. 14, вып. 2. С. 15–24.
5. **Чесноков А. А.** Вихревые движения жидкости в узком канале // ПМТФ. 1998. Т. 39, № 4. С. 38–49.
6. **Тешуков В. М.** Гидравлический прыжок на сдвиговом течении идеальной несжимаемой жидкости // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 1. С. 11–20.
7. **Teshukov V., Russo G., Chesnokov A.** Analytical and numerical solutions of the shallow water equations for 2-D rotational flows // Math. Models Methods Appl. Sci. 2004. V. 14. P. 1451–1481.
8. **Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю.** Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
9. **Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.** Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978.
10. **Bressan A.** Hyperbolic systems of conservation laws. The one-dimensional Cauchy problem. Oxford: Oxford Univ. Press, 2002.
11. **Олейник О. А.** Об одном классе разрывных решений квазилинейных уравнений первого порядка // Науч. докл. высш. шк. Сер. Физ.-мат. науки. 1958. № 3. С. 91–98.

Поступила в редакцию 6/XII 2005 г.