

совокупности капель определяется как сумма $\epsilon = \sum \Delta \epsilon = \sum \epsilon_i g_i$; соответствующие значения 17,6 и 18,4% приведены в таблице.

Как видно из таблицы, значения ϵ_1 , полученные при экспериментах, и значения ϵ , вычисленные по предложенным формулам, достаточно близки (если учесть приближенность как экспериментального, так и расчетного метода определения ϵ). Это свидетельствует о применимости предложенного метода для приближенных расчетов испарения жидкостей при распылении их в турбулентных газовых струях.

Поступила 22 XI 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Дунский В. Ф., Яцков Ю. В. Об испарении в турбулентной свободной воздушно-капельной струе. — «Иж.-физ. журн.», 1971, т. 20, № 3, с. 423.
2. Дунский В. Ф., Яцков Ю. В. Испарение капель в турбулентной воздушной струе при кинетическом режиме. — ПМТФ, 1974, № 1, с. 112.
3. Дунский В. Ф., Никитин Н. В. Метод определения спектра размеров капелек при распылении жидкостей. — «Иж.-физ. журн.», 1967, т. 12, № 2, с. 254.
4. Грин Х., Лейн В. Аэрозоли-пыли, дымы и туманы. Л., «Химия», 1972.
5. Абрамович Г. Н. Теория турбулентных струй. М., Физматгиз, 1960.
6. Фукс Н. А. Испарение и рост капель в газообразной среде. М., Изд-во АН СССР, 1958.

УДК 532.135

К ГИДРОДИНАМИКЕ ЖИДКОСТИ С ДЕФОРМИРУЕМЫМИ И ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИМИ ЧАСТИЦАМИ

В. М. Связов

(Воронеж)

В связи с техническими применениями различных искусственно синтезированных структурных сред в последнее время усиливается интерес к гидродинамике жидкости с вращениями и микродеформациями частиц [1—9]. Впервые модель жидкости с деформируемой микроструктурой предложена в работе [4], ее термодинамический анализ проведен в [6], где модель жидкости строится при помощи методов термодинамики необратимых процессов. В работах [7, 8] на основе определяющих уравнений [6] предложена модель макро- и микронесжимаемой жидкости с вращениями и деформациями частиц.

Ниже в рамках системы уравнений, приведенных в статье [7], решается задача о вращении сферы в безграничной жидкости при различных граничных условиях для скоростей вращения и микродеформации частиц. Решение аналогичной задачи для микрополярной жидкости, моделирующей суспензию с твердыми частицами, получено в работе [9], для вязкой жидкости решение найдено Стоксом в [10].

1. Уравнения движения для макро- и микронесжимаемой изотермической жидкости в символической форме записи можно представить в виде [7]

$$(1.1) \quad \rho(\mathbf{f} - \mathbf{v}^*) - (\alpha_7 + \alpha_4) \nabla \times \nabla \times \mathbf{v} + 2\alpha_4 \nabla \times \boldsymbol{\omega} - 2(\alpha_7 - \alpha_8) \times \nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla p = 0;$$

$$\rho(2\mathbf{l} - \mathbf{b}) + 2\alpha_4(\nabla \times \mathbf{v} - 2\boldsymbol{\omega}) + \left(\gamma_1 + \frac{2}{3}\gamma_{10}\right) \nabla \nabla \cdot \boldsymbol{\omega} - \left(\gamma_3 + \frac{1}{2}\gamma_{10}\right) \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{\omega} + 2\left(\frac{1}{8}\gamma_{11} - a_{11}\right) \nabla \times \nabla \cdot \mathbf{v} = 0;$$

$$\begin{aligned}
& \rho (\mathbf{B}^s - \mathbf{b}^s) - \mathbf{P}^s + 2(\alpha_7 - \alpha_8) (\nabla \mathbf{v})^s - d\mathbf{v} - (1/3\gamma_{13} + 1/4\eta_{11}) \times \\
& \times (\nabla \times \nabla \times \mathbf{v})^s + 2 \left(a_{10} + \frac{11}{30} \gamma_{13} - \frac{1}{16} \eta_{11} \right) (\nabla \nabla \cdot \mathbf{v})^s + 2(a_{11} - \\
& - 1/8\gamma_{11}) [\nabla (\nabla \times \boldsymbol{\omega})]^s - \left(\frac{2}{3} a_{10} + \frac{2}{15} \gamma_{13} - \frac{1}{8} \eta_{11} \right) (\nabla \nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{U} + \\
& + (p' - \nabla \cdot \Phi) \mathbf{U} = 0, \quad \mathbf{U} \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \\
& \mathbf{I} - 2(\mathbf{I} \cdot \mathbf{v})^s + \mathbf{I} \times \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I} = 0, \quad \mathbf{P}^s = \pi_1 \mathbf{U} + \pi_2 \mathbf{I} + \\
& + \pi_3 \mathbf{I} \cdot \mathbf{I}, \quad w_{si} = v_{si} + E_{sir} \omega^r, \\
& \omega^{ik} = I^{is} (\dot{\omega}_{sk} + \omega_{sr} \omega_{rk}), \quad b^k = E^{ksl} \omega^{sl}, \quad b^{(ik)} = \omega^{(ik)}, \quad d = \delta_3 + \\
& + 2\alpha_7 - 4\alpha_8,
\end{aligned}$$

где \mathbf{v} , $\boldsymbol{\omega}$, \mathbf{v} — скорости поступательного, вращательного и микродеформационного движений; \mathbf{I} — момент инерции частиц; \mathbf{U} — единичная диада; ∇ — пространственный градиент; E^{ksl} — единичный антисимметричный тензор; ρ — плотность среды; α_4 — вязкость вращательного трения; α_7 — вязкость макро- и микродеформационного трения; $\gamma_1, \gamma_3, \gamma_{10}$ и $a_{10}, \eta_{11}, \gamma_{13}$ — вязкости моментных и двойных безмоментных напряжений; δ_3 — микровязкость; α_8, a_{11} и γ_{11} — вязкости девиаторного силового, векторного и псевдовекторного перекрестных эффектов; \mathbf{f} и \mathbf{B}^s — обычная и обобщенная объемные силы; π_1, π_2, π_3 — константы тензора микродавления \mathbf{P}^s ; $2\mathbf{I}$ — объемный момент; круглые и квадратные скобки, заключающие индексы у тензора, означают его симметрию и антисимметрию по ним; знаками \cdot и \times обозначено скалярное и векторное умножения; точка в положении верхнего индекса означает полную производную по времени; индексом s отмечены симметричные части диад; p, p' и Φ — неизвестные функции, появляющиеся вследствие макро- и микронесжимаемости жидкости; по немому индексу проводится суммирование.

Тензоры силовых напряжений t^{ik} , микронапряжений s^{ik} , моментных напряжений \mathcal{M}^{pl} и двойных безмоментных напряжений $\mu^{r(ik)}$ в декартовой системе координат определяются формулами [7]

$$\begin{aligned}
(1.2) \quad & t^{ik} = -p\delta^{ik} + 2\alpha_7 v_{(i,k)} - 2(\alpha_7 - \alpha_8) v_{ik}; \\
& s^{ik} = -(p + p')\delta^{ik} + 2\alpha_8 v_{(i,k)} + (\delta_3 - 2\alpha_8) v_{ik} + P_{(ik)}; \\
& 2\mathcal{M}^{pl} = (\gamma_1 - 1/3\gamma_{10}) \omega^{n,n} \delta^{pl} + (1/2\gamma_{10} + \gamma_3) \omega_{l,p} + (1/2\gamma_{10} - \\
& - \gamma_3) \omega_{p,l} + \gamma_{11} N_{(pl)} + 8a_{11} E^{plr} N_r; \\
& \mu^{r(ik)} = -\Phi^r \delta^{ik} + \gamma_{13} v_{(ik,r)} + 8a_{10} (N^{(i\delta^k)r} - 1/3 N^r \delta^{ik}) + \\
& + 2a_{11} (X^{(i\delta^k)r} - 1/3 X^r \delta^{ik}) + 1/4 \eta_{11} (E^{rif} N_{(fk)} + \\
& + E^{rkf} N_{(fi)}) + 1/4 \gamma_{11} (E^{rif} \omega_{(f,k)} + E^{rkf} \omega_{(f,i)}); \\
& t^{[ik]} = E^{ial} t^l; \quad t^l = \alpha_4 (E^{lks} v_{s,k} - 2\omega^l); \quad 2N_{kf} = E^{kqs} v_{fs,q}; \\
& 4N^l = 3/2 v^l = v_{rl,r}; \quad v_{(ik,r)} = v_{(ik,r)} - 3/5 v^{(r\delta^{ik})}.
\end{aligned}$$

Вязкостные коэффициенты из (1.1), (1.2) удовлетворяют неравенствам

$$(1.3) \quad \alpha_4, \alpha_7, \delta_3, \gamma_1, \gamma_{10}, \gamma_3, a_{10}, \eta_{11}, \delta_3 \alpha_7 - 2\alpha_8^2, \eta_{11} \gamma_{10} - \gamma_{11}^2, a_{10} \gamma_3 - 2a_{11}^2 \geq 0.$$

Заметим, что для решения системы двадцати уравнений (1.1) относительно двадцати неизвестных \mathbf{v} , $\boldsymbol{\omega}$, \mathbf{v} , p , $p' - \nabla \cdot \Phi$, \mathbf{I} кроме начальных условий необходимо иметь граничные условия. Для поступательной скорости примем условие прилипания $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$, где \mathbf{v}_0 — скорость границы.

Для скорости вращения частиц и скорости микродеформации граничные условия запишем в виде

$$(1.4) \quad \begin{aligned} 2s_4\omega^i - s_2\mathbf{E}^{ijk}v_{k,j} - 2s_8\omega_0^i + 2s_6n^r\mathcal{M}_{ri} &= 0, \\ s_1v_{(i,k)} - s_3v_{ik} + s_7v_{ik}^0 + s_5n^r\mu^{r(i,k)} &= 0, \end{aligned}$$

где n^r — нормаль к граничной поверхности.

Отметим, что условия (1.4) при $s_1=s_2=s_5=s_6=0$ и $s_3=s_4=s_7=s_8=1$ переходят в условия неуничтожаемости скоростей вращения и микродеформации [6] (условие А'). При дополнительном ограничении $s_7=0$ и при допущении, что ω_0^i совпадает со скоростью вращения границы, они представляют собой условия прилипания (условие А).

При $s_1=s_2=s_3=s_4=1$, $s_5=s_6=s_7=s_8=0$ они становятся условием Кондиффа—Дахлера и условием тождественности скоростей макро- и микродеформаций [3] (условие В). При $s_4=s_5=s_6=s_7=0$ и $s_1=s_2=s_3=s_8=1$ соотношения (1.4) являются условием отсутствия моментных напряжений на границе и условием тождественности скоростей макро- и микродеформаций (условие С), и, наконец, для $s_5=s_6=1$ и $s_1=s_2=s_3=s_4=s_7=0$ имеем условия отсутствия моментных и двойных безмоментных напряжений. В дальнейшем это условие рассматривать не будем.

При рассмотрении задачи о вращении сферы используем предельный случай системы уравнений (1.1), когда изменением тензора момента инерции во времени, обусловленным вращением и микродеформацией частиц, пренебрегаем. Не учитывается анизотропная инерция и наличие тензора микродавления. При решении задачи особое внимание уделяется учету влияния взаимодействия частиц микроструктуры жидкости, влиянием же изменения формы и ориентации частиц в потоке на решение задачи пренебрегается.

2. Рассмотрим в рамках уравнений (1.1) решение задачи о медленном вращении сферы радиуса R_0 в безграничной жидкости с постоянной угловой скоростью Ω вокруг оси Z . Решение задачи будем искать в сферической системе координат R, θ, φ . Градиент давления в поле течения положим равным нулю. Предположим также, что искомые величины не зависят от времени t и координаты φ . Все физические характеристики будем считать постоянными. Поля скоростей $\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}$ зададим в виде

$$(2.1) \quad \begin{aligned} v_\varphi(R, \theta) &= v_\varphi(R) \sin \theta, \quad \omega_r(R, \theta) = \omega_r(R) \cos \theta, \\ \omega_\theta(R, \theta) &= \omega_\theta(R) \sin \theta, \end{aligned}$$

$$v_{r\varphi}(R, \theta) = v_{r\varphi}(R) \sin \theta, \quad \omega_\varphi = v_r = v_\theta = v_{\varphi\varphi} = v_{\theta\theta} = v_{\theta\varphi} = 0.$$

Уравнения (1.1) при сформулированных выше предположениях и условия (2.1) в безразмерной форме принимают вид

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \frac{4\mu}{H} \left(\frac{V}{r} - \Omega_r \right) + d_3 \frac{df}{dr} + \frac{1}{L_1} \left(D\Omega_r - \frac{2}{r^2} \Omega_r - \frac{4}{r^2} \Omega_\theta \right) - 4\Gamma_3 \frac{n}{r} &= 0, \\ \frac{2\mu}{H} (BV + 2\Omega_\theta) + d_3 \frac{f}{r} - \frac{1}{L_1} \left(D\Omega_\theta - \frac{2}{r^2} \Omega_r \right) - 2\Gamma_3 \frac{1}{r^4} \frac{d}{dr} \left(r^4 \frac{dN_{r\varphi}}{dr} \right) &= 0, \\ DV + 2\mu h - 2HZ_1 n = 0, \quad CV - \mu_2 N_{r\varphi} + \Gamma_3 Ch + \\ &+ \frac{4}{L_2} Cn = 0, \quad h = B\Omega_\theta + \frac{1}{r} \Omega_r, \\ n = \frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} (r^3 N_{r\varphi}), \quad f = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \Omega_r) + \frac{2}{r} \Omega_\theta, \quad D = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \\ &- \frac{2}{r^2}, \quad B = \frac{d}{dr} + \frac{1}{r}, \quad C = \frac{d}{dr} - \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

При получении (2.2) были введены следующие обозначения:

$$VU = v_r, \quad \Omega_r U = \omega_r R_0, \quad \Omega_0 U = \omega_0 R_0, \quad U = R_0 \Omega, \quad N_{r\varphi} U = v_{r\varphi} R_0,$$

$$rR_0 = R,$$

$$L_{11} = 2L_2(s_{10} + 8/15\mu_9 + 1/16\mu_{66}), \quad L_{11} = 2L_1(0,5 + s_{310}),$$

$$d_3^* = \frac{2}{L_{11}}(s_{110} + 1/6 - s_{310}),$$

$$\Gamma_1 L_{11} = 2s_{11}, \quad 4\Gamma_2 L_{11} = s_{22}, \quad \Gamma_3 = \Gamma_1 - \Gamma_2, \quad s_{10}\gamma_{10} = a_{10}, \quad \gamma_1 =$$

$$= s_{110}\gamma_{10}, \quad \mu_4 = \mu_0 - 2\mu_1^2,$$

$$\mu_9\gamma_{10} = \gamma_{13}, \quad s_{22}\gamma_{10} = \gamma_{11}, \quad \mu_{66}\gamma_{10} = \eta_{11},$$

$$s_{11}\gamma_{10} = a_{11}, \quad s_{310}\gamma_{10} = \gamma_3, \quad \mu_2 = 2 + \mu_0 - 4\mu_1,$$

$$\mu_1\alpha_7 = \alpha_8, \quad 2R_0^2\alpha_7 = L_{11}\gamma_{10}, \quad \mu_0\alpha_7 = \delta_3, \quad M(\alpha_4 + \alpha_7) =$$

$$= \alpha_4, \quad H = 1 - M, \quad Z_1 = 1 - \mu_1.$$

Первые два уравнения из (2.2) преобразуем к виду

$$(2.3) \quad Df - \lambda_3^2 f = 0, \quad 2\mu[L(rV) + 2rh] - \frac{H}{L_1}L(rh) - 2\Gamma_3 L(rn) = 0,$$

$$L = \frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r^2}, \quad \lambda_3^2 = \frac{4\mu L_1}{H(d_3 L_1 + 1)}.$$

Решение уравнений (2.2), (2.3), затухающее на бесконечности, имеет вид

$$(2.4) \quad N_{r\varphi} = \sum_{k=1}^2 N_k \frac{1}{\sqrt{r}} K_{5/2}(R_k) + \frac{2Z_1 N_4}{\mu_2 r^3}, \quad V = - \sum_{k=1}^2 N_k \frac{n_k}{\sqrt{r}} K_{3/2}(R_k) -$$

$$- \frac{2}{3} \frac{N_4}{r},$$

$$\Omega_0 = - \sum_{k=1}^2 N_k \frac{n_k}{R_k} \left[K_{1/2}(R_k) + \frac{1}{R_k} K_{3/2}(R_k) \right] \sqrt{r} -$$

$$- \frac{N_3 \sqrt{r}}{R_3^2} K_{3/2}(R_3) - \frac{N_4}{3r^3},$$

$$\Omega_r = - \sum_{k=1}^2 N_k \frac{2m_k \sqrt{r}}{R_k^2} K_{3/2}(R_k) - \frac{N_3 \sqrt{r}}{R_3^2} \left[K_{1/2}(R_3) + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{R_3} K_{3/2}(R_3) \right] - \frac{2}{3} \frac{N_4}{r^3},$$

$$m_k = \frac{\lambda_k^2}{\Delta_k} \left[\frac{\lambda_k^2}{L_2} - \mu_2 + 2HZ_1^2 \right],$$

$$n_k = \frac{2}{\Delta_k} \left[HZ_1 \lambda_k^2 \Gamma_3 + \left(\frac{\lambda_k^2}{L_2} - \mu_2 \right) \mu \right],$$

$$\Delta_k = \lambda_k (\Gamma_3 \lambda_k^2 - 2\mu Z_1), \quad \Gamma_4 = 1 - 2\Gamma_3 L_1 L_2,$$

$$k_3 = \frac{k_0^2}{4} - k_1, \quad \Gamma_4 k_1 = 4\mu\mu_4 L_1 L_2,$$

$$\Gamma_4 k_0 = 4\mu L_1 + (2\mu Z_1^2 + \mu_4) L_2 - 8\mu Z_1 \Gamma_3 L_1 L_2,$$

$$\lambda_1 = \left(\frac{1}{2} k_0 + k_3^{1/2} \right)^{1/2}, \quad \lambda_2 = \left(\frac{1}{2} k_0 - k_3^{1/2} \right)^{1/2},$$

$$R_k = \lambda_k r, \quad R_3 = \lambda_3 r.$$

Здесь $K_{n+1/2}$ — модифицированная функция Бесселя полуцелого индекса. Постоянные интегрирования N_1, N_2, N_3, N_4 определяем из граничных условий. Для скорости V имеем

$$(2.5) \quad \sum_{k=1}^2 n_k N_k K_{3/2}(\lambda_k) + \frac{2}{3} N_4 = -1.$$

Условия (1.4) принимают вид

$$(2.6) \quad \begin{aligned} P_4(1, s_2, s_4) - 2s_3 \Omega_r^0 + s_6 P_1(1) &= 0, \quad P_6(1, s_2, s_4) - 2s_3 \Omega_\theta^0 + s_6 P_2(1) = 0, \\ P_5(1, s_1, s_3) - 2s_1 \nu_{r\varphi}^0 &= 0, \quad \alpha_r U P_2(r) \sin \theta = \mathcal{M}_{r\theta}, \quad \alpha_r U P_1(r) \cos \theta = \mathcal{M}_{rr}. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} P_1(r) &= \sum_{k=1}^2 4N_k t_{k+2} \frac{K_{5/2}(R_k)}{\sqrt{r^3}} + \frac{2N_3}{L_{11}} \left[(s_{110} + 2/3) \frac{K_{3/2}(R_3)}{\sqrt{r}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{\lambda_3} \frac{K_{5/2}(R_3)}{\sqrt{r^3}} \right] + \frac{4N_4 t_7}{r^4}, \\ P_2(r) &= \sum_{k=1}^2 \left[2t_{k+2} \frac{K_{5/2}(R_k)}{\sqrt{r^3}} - t_{k+4} \frac{K_{3/2}(R_k)}{\sqrt{r}} \right] + \\ &\quad + \frac{2N_3}{\lambda_3 L_{11}} \frac{K_{5/2}(R_3)}{\sqrt{r^3}} + \frac{2N_4 t_7}{r^4}, \\ P_4(r, s_2, s_4) &= - \sum_{k=1}^2 N_k b_k \frac{K_{3/2}(R_k)}{\sqrt{r^3}} + 2s_4 N_3 \times \\ &\quad \times \left[\frac{2K_{3/2}(R_3)}{\lambda_3^2 \sqrt{r^3}} + \frac{K_{1/2}(R_3)}{\lambda_3 \sqrt{r}} \right] + \frac{4}{3} (s_4 - s_2) \frac{N_4}{r^3}, \\ P_5(r, s_1, s_3) &= \sum_{k=1}^2 N_k t_k \frac{K_{5/2}(R_k)}{\sqrt{r}} + 2 \left(s_1 - 2s_3 \frac{Z_1}{\mu_2} \right) \frac{N_4}{r^3}, \\ P_6(r, s_2, s_4) &= - \sum_{k=1}^2 N_k b_{k+2} \left[\frac{K_{3/2}(R_k)}{\sqrt{r^3}} + \frac{\lambda_k K_{1/2}(R_k)}{\sqrt{r}} \right] - \\ &\quad - \frac{2N_3 s_4}{\lambda_3^2} \frac{K_{3/2}(R_3)}{\sqrt{r^3}} - \frac{2}{3} (s_4 - s_2) \frac{N_4}{r^3}, \\ b_k &= 2s_2 n_k - 4s_4 \frac{m_k}{\lambda_k^2}, \quad b_{k+2} = -\frac{b_k}{2}, \quad t_{k+2} = \frac{m_k}{\lambda_k L_{11}} + 2\Gamma_2, \\ t_{k+4} &= 2\Gamma_3 \lambda_k - \frac{n_k}{L_1}, \quad t_7 = \frac{1}{L_{11}} + \frac{4Z_1 \Gamma_2}{\mu_2}, \quad t_k = s_1 n_k \lambda_k - 2s_3. \end{aligned}$$

Для компонент силовых напряжений находим соотношения

$$(2.7) \quad \begin{aligned} t_{r\varphi} R_0 &= \alpha_r U \sin \theta P_5(r, s_1 = 1, s_2 = Z_1), \\ t_{[\theta\varphi]} R_0 &= \alpha_r U \cos \theta P_4\left(r, s_2 = s_4 = \frac{\mu}{H}\right), \\ t_{[r\varphi]} R_0 &= \alpha_r U \sin \theta P_6\left(r, s_2 = s_4 = \frac{\mu}{H}\right). \end{aligned}$$

Ненулевые компоненты других напряжений здесь опускаем из-за их громоздкости.

Относительные моменты сил сопротивления m_c и m_m вращению сферы, обусловленные соответственно наличием силовых напряжений и моментных напряжений, используя (2.7), вычисляем по формулам

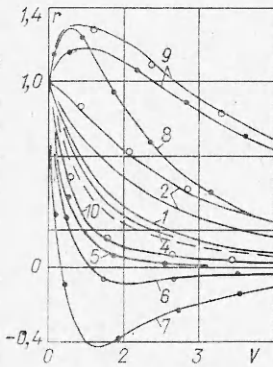
$$(2.8) \quad m_c = \frac{M_c}{M_0} = \frac{\alpha_7 U}{M_0} R_0^2 2\pi \int_0^\pi t_{r\varphi} \Big|_{r=1} \sin^2 \theta d\theta = \\ = 1/3 [P_6(1) + P_5(1)], \quad M_0 = 8\pi\alpha_7 R_0^3 \Omega;$$

$$m_m = \frac{M_m}{M_0} = \frac{\alpha_7 U}{M_0} R_0^2 2\pi \int_0^\pi (M_{rr} \cos \theta - M_{r\theta} \sin \theta) \Big|_{r=1} \sin \theta d\theta = \\ = 1/6 [P_1(1) - 2P_2(1)];$$

$$P_1(1) - 2P_2(1) = \frac{2N_3}{L_{11}} (s_{110} + 2/3) K_{3/2}(\lambda_3) + \sum_{k=1}^2 2N_k t_{k+4} K_{3/2}(\lambda_k).$$

Здесь M_0 — вращающий момент для обычной вязкой жидкости.

3. Анализ решения (2.4)–(2.9) показывает, что его характер (режим течения) зависит от вида граничных условий А, А', С, В и численных значений вязкостных безразмерных параметров μ , L_{11} , μ_0 , μ_1 , μ_{66} , s_{11} , s_{22} , s_{310} , μ_9 . На фиг. 1 построены профили скорости V для возможных режимов течения, штриховой линией показан профиль скорости ньютоновской жидкости [10]. На фиг. 2, а, б, в построены графики зависимости относительных моментов m_c , m_m и суммарного момента $m = m_c + m_m$ от параметра L_{11} , характеризующего масштаб течения.



Ф и г. 1

Кривые 1, 4 на фиг. 1, 2 строились соответственно при $\mu = 0,98$; 0,5 и $L_{11} = 15$, $\mu_0 = 8$, $\mu_1 = 0,6$, $s_{11} = 0$, $s_{22} = 0$, $\mu_9 = 1$, $\mu_{66} = 2$, $s_{10} = 1$, $s_{310} = 1$, $s_{110} = 2$. Для кривой 2 принималось $\mu_1 = 1,95$. Кривым 3, 5–10, 12 соответствуют значения $\mu_1 = -0,45$; 0,2; 0,05; -0,15; -1,25; -1,95; -0,25; -0,05. Кривая 11 отвечает значению $\mu_0 = 1$. Значения остальных параметров кривых 2–12 совпадают с параметрами кривой 4. Заметим, что кривая 3 на фиг. 2 строилась в масштабе, уменьшенном в десять раз.

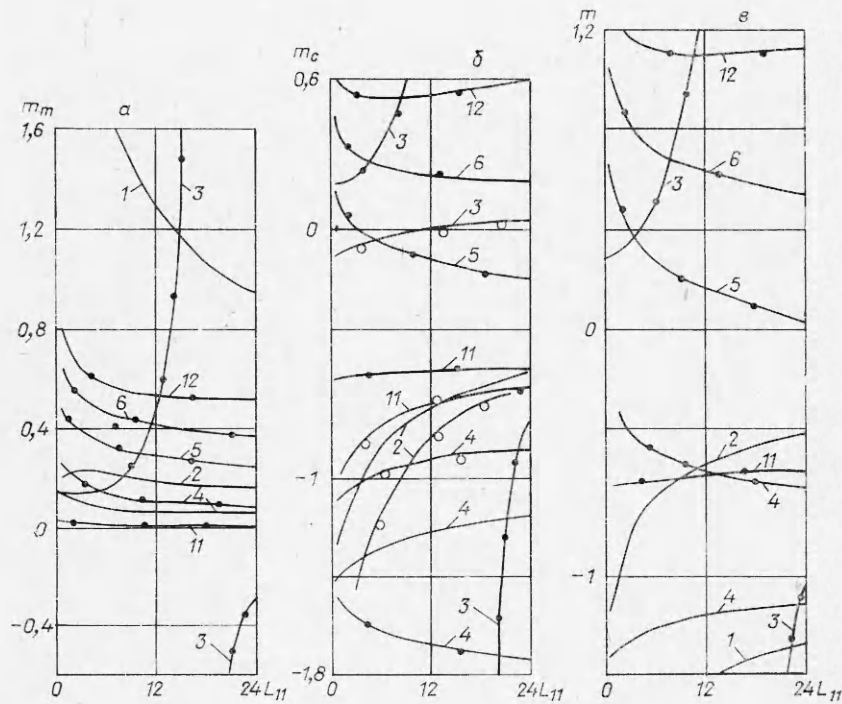
Сплошной линией на фиг. 1, 2 показаны значения, соответствующие решению при граничном условии А, когда $\Omega_r^0 = \Omega_\theta^0 = 0$; линией с точками — условию В; линией с кружочками — условию С.

Кривые 1, 4 показывают, что скорость V вблизи вращающейся сферы в суспензии с деформируемыми частицами при условии А, как и в суспензии с твердыми частицами [9], оказывается больше скорости движения обычной вязкой жидкости при вращении в ней сферы. Суммарный момент сил сопротивления движению сферы в этом случае также больше классического момента сил, причем с ростом масштаба течения он уменьшается по абсолютной величине.

В случае слабого взаимодействия микроструктуры среды с поверхностью сферы (условие В), когда частицы суспензии мигрируют от поверхности сферы или происходит образование возле поверхности сферы тонкого ламинарного подслоя, наблюдаемого, например, при турбулентных движениях вязкой жидкости, имеем уменьшение скорости течения жид-

кости по сравнению с классической скоростью вблизи сферы (кривая 5).

Момент сил сопротивления с ростом масштаба течения в отличие от момента сил при условии А в этом случае падает. Отмеченные эффекты усиливаются с уменьшением вязкости девиаторного силового перекрестного эффекта и увеличением микровязкости. При $\mu_0 \sim 1$ скорость несколько больше классического значения, момент сил сопротивления меньше, причем с ростом масштаба течения он возрастает (кривая 11 на фиг. 2, б). Аналогичная ситуация имеет место при предельно больших значениях μ_1^* , когда еще выполняется условие $\mu_1 \geq 0$, вытекающее из ограничений (1.3) (кривая 2 на фиг. 1, 2, б, в). Такой характер решения указывает на то, что интерпретация граничных условий в некоторой степени является условной и зависит от значений вязкостных параметров жидкости.



Ф и г. 2

В случае условия С, когда частицы могут свободно вращаться вблизи сферы либо при микровязкости порядка единицы, либо при $\mu_1 = \mu_1^*$, у решения наблюдаются в основном те же особенности, что и для условия В.

При условии В уменьшение μ_1 приводит к тому, что слои жидкости вдали от сферы движутся в направлении, противоположном ее вращению (кривая 6 на фиг. 1). Этот эффект усиливается по мере увеличения отрицательной вязкости μ_1 по абсолютной величине до некоторого значения μ_1^0 (кривая 7 на фиг. 1). При достижении μ_1^0 характер потока резко меняется, в нем возникает ярко выраженный эффект индуцированного течения с профилем скорости, подобным кривой 8, когда слои жидкости вблизи шара опережают его движение. Значение максимальной скорости при дальнейшем увеличении μ_1 уменьшается (кривые 8, 9). Подобные свойства решения напоминают свойства течения с так называемым эффектом отрицательной

вязкости [11], который заключается в поддержании разности скоростей или ее увеличении, если это допускают все остальные факторы [11].

Из кривых 3 (фиг. 2) непосредственно видно наличие точки разрыва L_{11}^* у зависимости момента сил трения от масштаба течения для некоторого континуума отрицательных значений вязкости μ_1 . Следовательно, существование либо эффекта противотечения, либо эффекта индуцированного течения зависит от масштаба течения. Для $L_{11} < L_{11}^*$ при неизменных значениях других параметров в потоке возможен эффект противотечения, для $L_{11} > L_{11}^*$ может иметь место индуцированное течение. Подобные эффекты наблюдаются и при условии С, при этом критической вязкости μ_1^0 соответствует большее значение.

Анализ решения при условии А', проводимый для значений вязкостных параметров кривой 4, показывает, что при увеличении по абсолютной величине граничных параметров в пределах от -15 до 15 (например, либо $\Omega_\theta^0 > 0$ при $\Omega_r^0 = v_{r\varphi}^0 = 0$, либо $\Omega_r^0 < 0$, когда $\Omega_\theta^0 = v_{r\varphi}^0 = 0$, либо $v_{r\varphi}^0 < 0$ при $\Omega_r^0 = \Omega_\theta^0 = 0$) в потоке наблюдается эффект уменьшения скорости течения вблизи сферы, который затем переходит в эффект противотечения. При изменении знака у параметров Ω_θ^0 , Ω_r^0 , $v_{r\varphi}^0$ с их ростом скорость потока возрастает, при дальнейшем их увеличении в потоке возникает индуцированное течение. В отличие от условия В точка разрыва у зависимости момента сил сопротивления от масштаба течения не обнаружена.

Использование граничного условия А' приводит к необходимости введения в теорию дополнительных констант, требующих как опытного определения, так и приемлемой физической интерпретации, что вызывает определенные затруднения. В этой связи принятие допущения об отрицательности вязкости μ_1 , согласующегося с термодинамическими ограничениями (1.3), представляется более оптимальным отчасти по той причине, что зачастую турбулентная вязкость, измеряемая в некоторых потоках, оказывается отрицательной [11].

Эффект отрицательной вязкости для данного течения в рамках рассматриваемой модели описывается феноменологически (либо допущением отрицательности вязкости μ_1 , либо использованием условий неуничтожаемости для скоростей вращения и деформаций частиц) без какой-либо конкретизации физических условий, приводящих к подобным течениям, а также без теоретического определения значения отрицательной вязкости, что является характерной особенностью такого описания.

Отметим, что описание конкретных механизмов и физических условий, приводящих к эффектам отрицательной вязкости в ряде течения, можно найти в работе [11], где существование отрицательной турбулентности в системе связывается с наличием источников турбулентной кинетической энергии, например, вихрей в системе, возбуждаемых извне. С этой точки зрения анализ решения при условии неуничтожаемости скорости вращения представляет некоторый интерес.

Обратим внимание на тот факт, что при сравнении с классической жидкостью предполагается совпадение вязкости деформационного трения между макро- и микродеформационными движениями со сдвиговой вязкостью классической жидкости. Такое сравнение с количественной точки зрения требует определенной корректировки, так как фактически [3] приравниваются различные характеристики жидкостей.

Анализ влияния других вязкостных параметров на решение задачи здесь опускается из-за невозможности приведения большого объема графического материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Науэ Г. Законы сохранения неклассической гидродинамики и их применение к турбулентным каналовым течениям. Числен. методы механ. сплош. среды. Новосибирск, изд. Вычислит. центра СО АН СССР, 1973, т. 4, № 1, с. 84—101.
2. Kirwan A. D., Newman N. Simple flow of a fluid containing deformable structures.— «Intern. J. Engng Sci.», 1969, vol. 7, N 10, p. 1067—1078.
3. Суязов В. М. К гидродинамической теории пристеночного и приосевого эффектов и эффектов Фареуса — Линдквиста. Деп. ВИНТИ, № 4912-72 Деп.— «Механика полимеров», 1973, № 2, с. 379.
4. Eringen A. C. Simple microfluids.— «Intern. J. Engng Sci.», 1964, vol. 2, N 4, p. 205—217.
5. Kirwan A. D. Constitutive equations a fluid containing nonrigid structures.— «Phys. Fluids», 1968, vol. 11, N 7, p. 1440—1446.
6. Суязов В. М. О структурно-континуальном подходе в магнито- и электрореологии дисперсных систем.— «Магнитная гидродинамика», 1972, № 2, с. 3—19.
7. Суязов В. М. К магнитной гидродинамике микроструктурных сред. Реоэлектрический эффект.— «Магнитная гидродинамика», 1973, № 4, с. 59—65.
8. Суязов В. М. К линейной теории вязкоупругих сред с деформируемой микроструктурой.— «Труды научно-исслед. Ин-та математики Воронежского ун-та», 1973, вып. 10, с. 24—35.
9. Rao S. K. L., Ramacharyulu N. C. P., Rao P. V. Slow steady rotation of a sphere in a micro-polar fluid.— «Intern. J. Engng Sci.», 1969, vol. 7, N 9, p. 905—916.
10. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидродинамика. Ч. 2. М., Физматгиз, 1963.
11. Стар В. П. Физика явлений с отрицательной вязкостью. М., «Мир», 1971.

УДК 533.542

К ВОПРОСУ О НЕУСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ КАПЕЛЬНОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ТРУБАХ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ЗАКОНАХ ТРЕНИЯ

М. Я. Куракина, В. П. Радченко, В. А. Юфин

(Москва)

Рассматриваются некоторые случаи неустановившегося движения капельной сжимаемой жидкости при различных законах трения в трубопроводах (в частности, в магистральных нефтепроводах). Приведены результаты решения ряда задач неустановившегося движения капельной жидкости в трубах с квадратичным законом сопротивления и для режима гидравлически гладких труб, полученные численно методом конечных разностей (методом сеток). Дано сопоставление с результатами, полученными при линеаризации члена с квадратичным трением, согласно методике [1]. Исследуются отклонения параметров неустановившихся течений для рассматриваемых законов сопротивления.

Рассматривается система уравнений одномерного неустановившегося движения капельной сжимаемой жидкости в трубах в постановке, приведенной в [1]

$$(1) \quad \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(p + \rho w^2) + \frac{\lambda}{2D} \rho w |w| = 0; \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \\ + \frac{\partial(\rho w)}{\partial x} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

где p , ρ , w — среднее по сечению давление, плотность и скорость жидкости; λ — коэффициент гидравлического сопротивления; D — диаметр трубопровода; x — координата вдоль оси трубы; t — переменная времени;