римента ($\sim 20\%$) прямо пропорционально времени их сгорания:

$$\tau = 1{,}25 \cdot d/u, \text{ с}$$

(u — скорость горения образца при конечном давлении).

Прямая пропорциональность переходит при $d \leqslant 300$ мкм в «плато», где время задержки не зависит от d. В области «плато» размер частиц соизмерим с толщиной зоны прогрева конденсированной фазы, поэтому топливо ведет себя подобно гомогенному.

Изложенные результаты показывают, что как при сбросе давления, так и при подъеме время выхода на стационарный режим горения пропорционально времени сгорания зерна окислителя, а не времени прогрева к-фазы, как это имеет место в случае гомогенных топлив. Сказанное справедливо для достаточно крупных частиц: $du/\varkappa \gg 1$, где $\varkappa$ — температуропроводность к-фазы топлива.

ЛИТЕРАТУРА

1. **A. D. Baer, N. W. Ryan, E. B. Schulz.** AJAA J., 1971, 9, 5, 869.
2. **В. С. Илюхин, А. Д. Марголин, Ю. Е. Сверчков.**— В кн.: Химическая физика процессов горения и взрыва. Горение конденсированных систем. Черноголовка, 1977.

Поступила в редакцию 17/II 1986

РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕАДИАБАТИЧЕСКОГО ВОЗМУЩЕНИЯ В РЕЛАКСИРУЮЩЕЙ СРЕДЕ

М. А. Бисярин

(Ленинград)

1. Классический подход к решению задач гидродинамики становится неприменимым, если время релаксации τ процессов установления равновесия велико. При рассмотрении акустических волн в среде с внутренними процессами, например с химической реакцией, их можно учитывать путем введения некоторого физического параметра ξ (концентрации одного из веществ в двухкомпонентной смеси и т. п.) в уравнение состояния [1]. Тогда возникает необходимость дополнения системы уравнением кинетики

$$d\xi/dt = j(\xi, p, \rho).$$

В [2] показано, что структура фронта ударной волны и процесс ее установления в предположениях малости диссипации энергии и нелинейности среды, а также $\tau/T \ll 1$, где T — характерный период начального возмущения, описываются уравнением Бюргерса.

Более подробный анализ различных режимов распространения возмущения проводился в работе [3] путем выделения в зависимости от величины τ/T главных слагаемых в уравнении, полученном при произвольном значении данного отношения. Однако при выводе этого уравнения за пределами принятой в [3] точности оказался учет энтропии: как показано в [5, 6], отклонение энтропии от своего равновесного значения является величиной третьего порядка малости по сравнению со скачками давления и плотности при распространении ударной волны.

Цель данной работы состоит в том, чтобы на пути [3], не накладывая предварительных ограничений τ/T, описать распространение ударной волны в среде с релаксацией. При этом в выражениях сохраним члены третьего порядка малости по сравнению со скачками давления и плотности, что позволит учесть непостоянство энтропии.

В работе [4] явным образом учтена вязкость среды. Следуя [3], в [4] также рассмотрены случаи различных τ/T и чисел Рейнольдса Re. Чтобы пренебречь вязкостью среды, заметим, что она несущественна при больших Re, а чтобы Re было велико, предположим, что длины всех волн значительно превышают длины свободных пробегов [6].

Рассмотрим распространение ударной волны в релаксирующей среде. Параметры за ее фронтом в области, где устанавливается термодинамическое равновесие, не зависят от механизма и скоростей неравновесных процессов [5]. Учет кинетики необходим, если установление равновесия не успевает следовать за изменениями термодинамических параметров. В неравновесном случае перестает быть справедливым уравнение адиабатичности $ds/dt=0$, но можно воспользоваться законом сохранения энергии. Полагая, что внешние источники энергии отсутствуют, пишем

$$d\varepsilon/dt + p\cdot dV/dt = 0. \tag{1}$$

Имеет место рост энтропии, например, в случае неравновесных колебаний вследствие неравенства температур, соответствующих поступательным и колебательным степеням свободы молекул [5]. В данной работе учтем именно те изменения энтропии, которые обусловлены неравновесностью процессов, а вязкостью и теплопроводностью пренебрежем.

2. Полная система уравнений, описывающая среду с релаксацией, включает в себя уравнения Эйлера, неразрывности, состояния и кинетики

$$u_t + uu_x + p_x/\rho = 0, \tag{2}$$

$$\rho_t + \rho_x u + \rho u_x = 0, \tag{3}$$

$$p = p(\rho,\ s,\ \xi), \tag{4}$$

$$d\xi/dt = -(\xi - \xi_0)/\tau. \tag{5}$$

Отклонения от равновесных значений $(p-p_0)/p_0 \sim \mu$, $(\rho-\rho_0)/\rho_0 \sim \mu$, $(\xi-\xi_0)/\xi_0 \sim \mu$, $u/c_0 \sim \mu$, где μ — параметр малости. Относительное изменение энтропии $(s-s_0)/s_0 \sim \mu^3$.

Система уравнений нуждается еще в одном соотношении между термодинамическими величинами. Следуя [5, 6], можно получить явные формулы, связывающие отклонения энтропии от равновесного значения s_0 с отклонениями $\rho-\rho_0$ и $p-p_0$ в ударной волне:

$$s - s_0 = \frac{1}{12T_0\rho_0^3}\left(2c_0^2 + \alpha\rho_0\right)(\rho-\rho_0)^3 + O(\mu^4). \tag{6}$$

Разлагая (4) в ряд Тейлора вблизи состояния равновесия, получаем

$$p = p_0 + \left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_0(\rho-\rho_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial\rho^2}\right)_0(\rho-\rho_0)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 p}{\partial\rho^3}\right)_0(\rho-\rho_0)^3 + \\ + \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_0(s-s_0) + \left(\frac{\partial p}{\partial\xi}\right)_0(\xi-\xi_0) + \left(\frac{\partial^2 p}{\partial\rho\,\partial\xi}\right)_0(\rho-\rho_0)(\xi-\xi_0), \tag{7}$$

$$\frac{dp}{dt} = c_\infty^2\frac{d\rho}{dt} + \left(\frac{\partial^2 p}{\partial\rho^2}\right)_0\rho'\frac{d\rho}{dt} + \frac{3}{2}\left(\frac{\partial^3 p}{\partial\rho^3}\right)_0\rho'^2\frac{d\rho}{dt} + \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_0\frac{ds}{dt} + \\ + \left(\frac{\partial p}{\partial\xi}\right)_0\frac{\partial\xi}{dt} + 2\left(\frac{\partial^2 p}{\partial\rho\,\partial\xi}\right)_0\rho'\frac{d\xi}{dt} - \frac{\alpha}{2}\frac{(\partial^2 p/\partial\rho\partial\xi)_0}{(\partial p/\partial\xi)_0}\rho'^2\frac{d\rho}{dt}. \tag{8}$$

Здесь $c_\infty^2 = (\partial p/\partial\rho)_\xi$, $c_0^2 = (\partial p/\partial\rho)_0$, смысл этих обозначений выяснен в [6]. Следует отметить, что для большинства газов $\partial p/\partial\xi \sim (c_\infty^2 - c_0^2)/c_0^2 = m \sim \mu$. Введем обозначения:

$$\alpha = \left(\frac{\partial^2 p}{\partial\rho^2}\right)_0,$$

$$\beta = \frac{3}{2}\left(\frac{\partial^3 p}{\partial\rho^3}\right)_0 + \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_0\frac{2c_0^2+\alpha\rho_0}{4T_0\rho_0^3} - \frac{\alpha}{2}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial\rho\,\partial\xi}\right)_0\left(\frac{\partial p}{\partial\xi}\right)_0^{-1}, \tag{9}$$

$$\Theta = \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 p}{\partial\rho^3}\right)_0 + \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_0\frac{2c_0^2+\alpha\rho_0}{12T_0\rho_0^3} + \frac{\alpha}{2}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial\rho\,\partial\xi}\right)_0\left(\frac{\partial p}{\partial\xi}\right)_0^{-1}.$$

Подставляя (5) и (6) в (8) и сравнивая с (7), получаем совместно с (2) и (3) систему уравнений, описывающую движение среды с внутренними процессами и учитывающую изменения энтропии:

$$\frac{dp}{dt} - (c_\infty^2 + \alpha\rho + \beta\rho^2)\frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{\tau}\left(p - c_0^2\rho - \frac{\alpha}{2}\rho^2 - \Theta\rho^3\right) = 0, \tag{10}$$

$$\rho_0 u_t + \rho u_t + \rho_0 u u_x + \rho u u_x + p_x = 0, \tag{11}$$

$$\rho_t + \rho_x u + \rho u_x + \rho_0 u_x = 0. \tag{12}$$

Продифференцируем (10) по x, используя (11):

$$\rho_0 u_{tt} + c_0^2\rho_{tx} + \frac{1}{\tau}(\rho_0 u_t + c_0^2\rho_x) + \rho u_{tt} + 2\rho_0 u u_{tx} + \rho_0 u_t u_x + \alpha\rho\rho_{tx} + \alpha\rho_t\rho_x +$$
$$+ c_0^2\rho_{xx}u + c_0^2\rho_x u_x + mc_0^2\rho_{tx} + \frac{1}{\tau}(\rho u_t + \rho_0 u u_x + \alpha\rho\rho_x) + \rho_t u u_x + 2\rho u u_{tx} +$$
$$+ 2\rho_0 u u_x^2 + \rho_0 u^2 u_{xx} + \rho u_t u_x + \beta\rho^2\rho_{tx} + \alpha\rho\rho_{xx}u + \alpha\rho\rho_x u_x + \alpha\rho_x^2 u +$$
$$+ 2\beta\rho\rho_t\rho_x + mc_0^2\rho_{xx}u + mc_0^2\rho_x u_x + \frac{1}{\tau}(\rho u u_x + 3\Theta\rho^2\rho_x) = 0. \tag{13}$$

Уравнение (13), переписанное в новых переменных $y = (x - c_0 t)/(c_0 T)$, $z = \mu x (c_0 T)^{-1}$, получается чрезвычайно громоздким. Однако не все слагаемые имеют один и тот же порядок. Предполагаем, что зависимость u и ρ от новых переменных такова, что $\partial/\partial y \sim \mu^a$, $\partial/\partial z \sim \mu^b$. Это предположение имеет четкий физический смысл. В математической физике выделяют так называемый класс диспергирующих волн. Его связывают с явным видом зависимости описывающих их функций от переменных x и t. Решения зависят от фазовой переменной $kx - \omega t$, где $\omega = \omega(k)$, значительно сильнее, чем от x или t. В нашем случае характер влияния переменных y и x на v не может быть одинаковым: зависимость от x должна быть слабее зависимости от y, что и нашло отражение в предложенном выборе порядков дифференцирования $\partial/\partial y$ и $\partial/\partial z$: $b > a - 1$.

Вычисления показывают, что наиболее широкий класс решений должен получиться при $a = b = 1$. В этом случае главная часть дифференциального оператора содержит большее число слагаемых, чем при других допустимых a и b; кроме того, слагаемые, учитывающие неадиабатичность процесса (с коэффициентом Θ), являются поправкой уже следующего порядка малости по сравнению со старшими членами. И наконец, такой выбор позволяет воспользоваться результатом [4]: известная из линейной теории звуковых волн связь $\rho = \rho_0 u/c_0$ дополняется нелинейными членами и членами со старшими производными

$$\rho = \rho_0\frac{u}{c_0} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\alpha\rho_0}{2c_0^2}\right)\frac{\rho_0}{c_0^2}u^2 + \frac{\tau}{T}\frac{m\rho_0}{2c_0}u_y +$$
$$+ \frac{\tau}{T}\left(1 + \frac{\alpha\rho_0}{2c_0^2} - \frac{m\alpha\rho_0}{4c_0^2}\right)\frac{\rho_0}{c_0^2}uu_y + \frac{\tau}{T}\mu\frac{\rho_0}{c_0}u_z. \tag{14}$$

Используя это соотношение, получаем уравнение, содержащее члены порядка μ^3 и μ^4, для функции $v = u/c_0$:

$$\mu v_z + \left(1 + \frac{\alpha\rho_0}{2c_0^2}\right)vv_y - \frac{m\tau}{2T}v_{yy} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{7\alpha\rho_0}{2c_0^2} - \frac{3\alpha^2\rho_0^2}{2c_0^4} + \frac{6\Theta\rho_0^2}{c_0^2}\right)v^2 v_y +$$
$$+ \mu\left(2 + \frac{\alpha\rho_0}{2c_0^2}\right)vv_z = 0. \tag{15}$$

Данное уравнение описывает неадиабатический процесс распространения возмущения в нелинейной среде с релаксацией при $\tau/T \sim 1$.

Случай $\tau/T \ll 1$ не представляет интереса для данной работы, так как его рассмотрение приводит к уравнению (15).

3. Значительный интерес представляет случай распространения высокочастотного возмущения, т. е. $\tau/T \gg 1$. Вещество среды не успевает в звуковой волне прийти в состояние полного термодинамического равновесия, релаксационные процессы полностью заморожены, поэтому скорость звука $(\partial p/\partial\rho)_\xi = c_\infty^2$. Следуя [3, 4], считаем $\tau/T = O(\mu^{-1/2})$, исходное уравнение (13), при этом берутся: $y = (x - c_\infty t)/(c_\infty T)$, $z = \mu x (c_\infty T)^{-1}$ и $v = u/c_\infty$. Здесь также стояла проблема выбора масштабов по переменным y и z. Соображения, аналогичные изложенным выше, приводят к $\partial/\partial y \sim \mu$, $\partial/\partial z \sim \mu$.

После несложных, но громоздких преобразований получаем

$$\mu v_z - \frac{c_\infty - c_0}{c_0} v_y + \frac{c_\infty^2}{c_0^2}\left[1 + \frac{\alpha\rho_0}{2c_0^2} - \frac{c_\infty - c_0}{c_\infty}\left(2 + \frac{\alpha\rho_0}{2c_0^2}\right)\right] v v_y - \frac{m\tau}{2T}\frac{c_\infty}{c_0} v_{yy} +$$
$$+ \frac{\tau^2}{T^2}\left(\frac{c_\infty - c_0}{c_0} - \frac{m}{2}\frac{c_\infty}{c_0}\right) v_{yyy} - \frac{\tau^2}{T^2}\frac{c_\infty^2}{c_0^2}\left(1 + \frac{\alpha\rho_0}{2c_0^2}\right)(v v_y)_{yy} - \mu\frac{\tau^2}{T^2} v_{yyz} +$$
$$+ \frac{c_\infty^3}{2c_0^3}\left(1 + \frac{7\alpha\rho_0}{2c_0^2} - \frac{3\alpha^2\rho_0^2}{2c_0^4} + \frac{6\Theta\rho_0^2}{c_0^2}\right) v^2 v_y + \mu\frac{c_\infty}{c_0}\left(2 + \frac{\alpha\rho_0}{2c_0^2}\right) v v_z = 0. \quad (16)$$

В координатах $\zeta = y - wt/T$ (16) выглядит так:

$$\left(\frac{3m^2}{8}\frac{\tau^2}{T^2} - \frac{\tau^2}{T^2} w + \frac{\tau^2}{T^2} v\right) v'' + \frac{m\tau}{2T} v' + \left[w + \left(\frac{m}{2} - \frac{m^2}{8}\right)(1 + w)\right] v -$$
$$- \frac{D}{2} v^2 + \frac{\tau^2}{T^2} v'^2 - G v^3 = 0, \quad (17)$$

где $$D = \left[(1 + w)\left(1 + \frac{\alpha\rho_0}{2c_0^2} + \frac{m\alpha\rho_0}{4c_0^2}\right) - w\left(2 + \frac{\alpha\rho_0}{2c_0^2}\right)\right]\left(1 + \frac{\alpha\rho_0}{2c_0^2}\right)^{-1};$$
$$G = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{7\alpha\rho_0}{2c_0^2} - \frac{3\alpha^2\rho_0^2}{2c_0^4} + \frac{6\Theta\rho_0^2}{c_0^2}\right)\left(1 + \frac{\alpha\rho_0}{2c_0^2}\right)^{-2}.$$

Линеаризуем (17) и рассмотрим его асимптотическое решение при $\zeta \to \infty$, имеющее вид $e^{-p\zeta}$. Для p получаем квадратное уравнение, дискриминант которого отрицателен в малой окрестности $w = -m/4$. Это означает, что корни $p_{1,2}$ имеют ненулевую мнимую часть, т. е. профиль ударной волны допускает осцилляции, если скорость ее распространения близка к $(1 - m/4)c_\infty$. При этом нарушается критерий механической устойчивости ударной волны; она расплывается и превращается в переходный слой толщины $(1 - m/4)c_\infty\tau$ [7].

4. Вернемся к уравнению (15). Чтобы записать его в возможно более простом виде, введем новые переменные и функцию, пропорциональные старым, с коэффициентами, содержащими α, Θ, ρ_0, c_0. Получаем

$$w_z + w w_y - \frac{Am\tau}{2\mu T} w_{yy} + \mu w w_z = 0$$

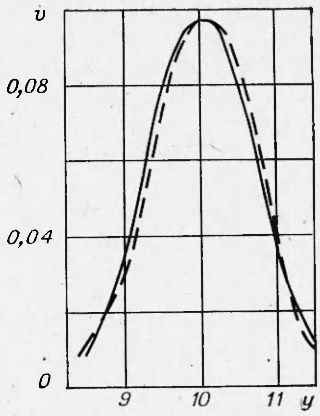
(A — константа). Это возмущенное уравнение Бюргерса, его стационарное решение

$$g(y - hz) = \frac{2c_1}{\exp\{(1 - \mu h)\, 2c_1 \mu T\,(y - hz + c_2)/(Am\tau)\} + 1} + \frac{h - c_1 + \mu h c_1}{1 - \mu h}$$

(c_1, c_2 — произвольные постоянные) незначительно отличается от стационарного решения $2c_1/[\exp\{2c_1\mu T(y - hz + c_2)/(Am\tau)\} + 1] + h - c_1$.

Располагая соответствующими экспериментальными данными, можно не только определить время релаксации среды (или время протекания химической реакции), но и извлечь информацию о характере зависимости давления от энтропии и внутренней координаты, а также о «мере неадиабатичности» процесса.

Неадиабатическая деформация импульса в релаксирующей среде (— — — — решение уравнения в предположении s = const).



Для выяснения влияния неадиабатичности процесса на его протекание рассчитана эволюция начального возмущения

$$v|_{t=0} = 0{,}098e^{-(y-10)^2}$$

в CO_2 при $T = 300$ К и $p_0 = 1$ атм, $c_0 = 260$ м/с, $c_\infty = 270$ м/с, $m = 0{,}078$. Полагалось $\tau/T = 1$. Сравнивались уравнения из [3]

$$v_t + vv_y - 0{,}039v_{yy} - 0{,}039v_{yyy} = 0$$

и полученное в данной работе

$$v_t + vv_y - 0{,}039v_{yy} - 0{,}779v^2v_y = 0. \quad (18)$$

Расчет проводился по схеме с аппроксимацией $O(\Delta t + (\Delta y)^3)$ для малых времен (см. рисунок).

Вершины импульсов эволюционируют одинаково (с точностью до трех значащих цифр). В самом деле, в начальном негармоническом возмущении всегда присутствуют низкочастотные гармоники, для которых $\tau/T \ll 1$. Именно они и определяют вершину возмущения. Но в случае $\tau/T \ll 1$ неадиабатичность процесса и не играет существенной роли. Передний фронт импульса, рассчитанного по (18), оказался круче, чем в [3]. И наконец, уравнение (18) позади импульса дает значения v, близкие к величинам впереди импульса, в то время как уравнение, не учитывающее изменение энтропии, дает позади импульса более высокие значения.

Таким образом, для двух качественно различающихся случаев соотношения между τ и T рассмотрение процесса распространения неадиабатического возмущения привело к уточнению полученных в [3, 4] уравнений и результатов, относящихся к эволюции начального возмущения колоколообразного типа. С помощью данной теории можно получить более точные значения различных характеристик среды.

Автор благодарен профессору И. А. Молоткову за руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Л. И. Мандельштам, М. А. Леонтович.** ЖЭТФ, 1937, 7, 3.
2. **А. Л. Полякова, С. И. Солуян, Р. В. Хохлов.** Акустический ж., 1962, 8, 1.
3. **В. Е. Накоряков, А. А. Борисов.** ФГВ, 1976, 12, 3.
4. **А. В. Богданов, С. А. Вакуленко, В. М. Стрельченя.** Численные методы механики сплошной среды, 1980, 11, 3.
5. **Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер.** Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Физматгиз, 1963.
6. **Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.** Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1953.
7. **С. П. Дьяков.** ЖЭТФ, 1954, 27, 6.

Поступила в редакцию 16/I 1986

ТЕПЛОВОЙ ВЗРЫВ И ВОЛНЫ ГОРЕНИЯ

А. П. Алдушин

(Черноголовка)

Как известно из теории теплового взрыва (ТВ), экзотермическое превращение в химически активной среде может протекать в режимах: квазистационарном либо в нестационарном, самоускоряющемся. Особый режим возникает при критическом сочетании параметров, разделяющем области взрывных и стационарных режимов. Классическая задача о ТВ