УДК 532.51.013.4:536.25

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСНОГО СОСТОЯНИЯ В МОДЕЛИ КОНВЕКЦИИ С НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ ПЛОТНОСТИ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ И ДАВЛЕНИЯ

В. Б. Бекежанова

Институт вычислительного моделирования СО РАН, 660036 Красноярск
E-mail: bekezhanova@mail.ru

Рассмотрена задача о конвекции вязкой теплопроводной жидкости. Предполагается, что плотность жидкости квадратично зависит от температуры и давления. Неустойчивость равновесного состояния горизонтального слоя со свободной границей по отношению к малым возмущениям изучается методом линеаризации. Обнаружено, что состояние механического равновесия является неустойчивым. Построены нейтральные кривые и найдены критические числа Рэлея. Проведено сравнение с известными результатами решения аналогичной задачи для предельного случая, когда плотность является квадратичной функцией температуры и не зависит от давления.

Ключевые слова: вязкая теплопроводная жидкость, свободная граница, устойчивость.

Введение. Наблюдения, проведенные на озере Байкал, свидетельствуют о наличии в нем механизма глубокого перемешивания, переносящего поверхностные воды в придонные области [1]. Одна из возможных причин этого явления — аномалия теплового расширения.

Предположим, что плотность является только функцией температуры и не зависит от давления. Тогда уравнение состояния воды принимает вид

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha(\theta - \theta_0)^2), \tag{1}$$

где ρ_0 — максимальное значение плотности, которое достигается при температуре θ_0, называемой температурой инверсии или температурой аномалии теплового расширения жидкости; α — коэффициент теплового расширения; θ — температура. Для воды характерное значение $\rho_0 = 999{,}972$ кг/м^3, температура инверсии $\theta_0 = 277{,}13$ К, $\alpha = 8{,}57 \cdot 10^{-6}$ К$^{-2}$. Следует отметить, что максимум плотности достигается внутри слоя, т. е. температура поверхности выше температуры инверсии, а температура нижней границы ниже ее. В этом случае возникает сложная стратификация в вертикальном направлении. В верхней части слоя плотность увеличивается в направлении силы тяжести и жидкость гравитационно устойчива, в нижней части слоя плотностная стратификация жидкости неустойчива. Возникающие в неустойчивой части жидкости конвективные движения распространяются в верхнюю устойчивую зону. Это явление называется проникающей конвекцией. Если толщина слоя невелика, то изменениями плотности, обусловленными влиянием давления, можно пренебречь. Однако при изучении процессов, происходящих в глубоководных во-

Работа выполнена при финансовой поддержке Красноярского краевого фонда науки (грант № 12F003M), а также в рамках Интеграционного проекта СО РАН № 131 и Программы поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (грант № НШ-5873.2006.1).

доемах (в частности, в озере Байкал), следует учитывать, что возникающие перепады давления могут оказывать существенное влияние на распределение плотности, а следовательно, и на конвективные процессы. Поэтому вместо (1) будем использовать уравнение состояния жидкости в виде

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha(\theta - \theta_*)^2), \tag{2}$$

где $\theta_* = \theta_0(1 - \delta_0 p)$; p — давление; ρ_0, θ_0, α, δ_0 — постоянные положительные величины. Уравнение (2) является упрощенным вариантом уравнения состояния

$$\rho(\theta, p) = \rho_m(p)[1 - \varphi(p)(\theta - \theta_m(p))^2].$$

Вид функций $\rho_m(p)$, $\varphi(p)$, $\theta_m(p)$ и обоснование выбора такого уравнения состояния указаны в [2]. В (2) вместо функций $\rho_m(p)$ и $\theta_m(p)$ оставлены нулевые члены разложения в ряд Тейлора ρ_0 и θ_0 соответственно. Постоянная δ_0 определяется из выражения для $\theta_m(p)$. При заданных значениях физических параметров (для воды в озере Байкал) погрешность определения плотности по уравнению (2) составляет менее 1 %.

Использование уравнения состояния в виде (2) не противоречит данным натурных наблюдений, полученных на озере Байкал [3, 4]. В частности, в работах [3, 4] отмечается, что точка максимума плотности в озере расположена на глубине $250 \div 300$ м.

В данной работе использованы модельные уравнения свободной конвекции, в которых тепловое расширение учитывается только в членах, содержащих архимедову силу (приближение Обербека — Буссинеска).

1. Постановка задачи. Пусть область $\Omega(t)$ заполнена жидкостью, контактирующей с газовой фазой. Уравнение состояния имеет вид (2). Оси x и y находятся в плоскости нижней границы слоя, ось z направлена вертикально вверх. Толщина слоя равна l. Нижняя граница слоя — твердая стенка, верхняя — недеформируемая свободная граница (рис. 1). Поверхность Γ_t определяется уравнением $f(\boldsymbol{x}, t) = 0$, где $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$. В области $\Omega(t)$ справедлива система уравнений Обербека — Буссинеска

$$\begin{gathered} \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0, \qquad \frac{\partial \theta}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \theta = \chi \Delta \theta, \\ \rho_0 \Big(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} \Big) = -\nabla p + \operatorname{div}(2\mu D) + \rho \boldsymbol{g}, \end{gathered} \tag{3}$$

где $\boldsymbol{v} = (u, v, w)$ — вектор скорости; χ — температуропроводность; μ — вязкость; D — тензор скоростей деформации векторного поля $\boldsymbol{v}$ с элементами

$$D_{ij} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \Big), \qquad i, j = 1, 2, 3;$$

ρ определяется по формуле (2); $\boldsymbol{g} = (0, 0, -g)$; g — ускорение свободного падения.

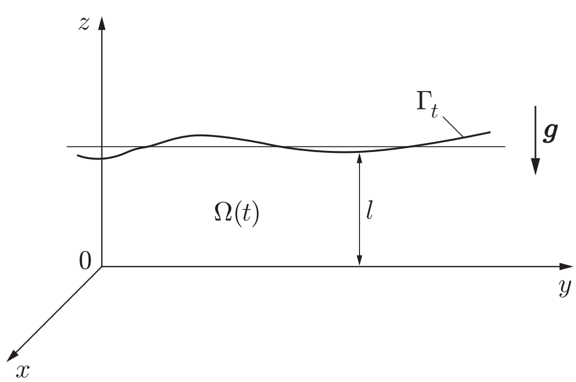

Рис. 1. Схема течения

На твердой стенке задаются температура и условие прилипания:

$$\theta = \theta_1, \quad \boldsymbol{v} = 0 \qquad \text{при} \quad z = 0, \tag{4}$$

а на свободной поверхности — кинематическое, динамическое и энергетическое условия:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = V_n, \qquad P \cdot \boldsymbol{n} + p_g \cdot \boldsymbol{n} = 0, \\ k\,\frac{\partial \theta}{\partial n} + b(\theta - \theta_g) = Q \qquad \text{при} \quad z = l. \end{gathered} \tag{5}$$

Здесь $\boldsymbol{n}$ — нормаль к поверхности Γ_t; V_n — скорость Γ_t в направлении нормали; $P = -(p + \mu' \operatorname{div} \boldsymbol{v})I + 2\mu D(\boldsymbol{v})$ — тензор напряжений в жидкости; μ' — коэффициент второй вязкости; I — единичный тензор; k — теплопроводность жидкости; b — коэффициент межфазного теплообмена; θ_g, p_g — температура и давление газа; Q — заданный поток тепла.

2. Равновесное состояние. В равновесном состоянии $\theta_t = p_t = 0$ и $\boldsymbol{v}_e = 0$. Уравнение несжимаемости удовлетворяется тождественно. Из уравнения энергии следует, что θ_e — линейная функция z вида

$$\theta_e(z) = Az + B, \tag{6}$$

где константы A и B определяются из граничных условий на свободной поверхности и твердой стенке соответственно:

$$A = \frac{Q - bB + b\theta_g}{k + bl}, \qquad B = \theta_1.$$

Уравнение импульса сводится к уравнению

$$p_z = -\rho g. \tag{7}$$

Обозначим $p_e = p_1 + \rho_0 \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{x} = p_1 - \rho_0 g z$. Тогда (7) принимает вид

$$p_{1z} = C(p_1 + Dz + E),$$

где

$$C = \rho_0 g \alpha \theta_0^2 \delta_0^2 > 0, \qquad D = \frac{A - \theta_0 \delta_0 g \rho_0}{\theta_0 \delta_0} < 0, \qquad E = \frac{B - \theta_0}{\theta_0 \delta_0} < 0.$$

Постоянные D и E отрицательны при реальных физических параметрах жидкости (воды в озере Байкал).

Полагая $Dz + E = \eta$, $p_1 + \eta = y$, $C/D = C_1$, получим уравнение

$$\frac{dy}{d\eta} = 1 + C_1 y^2.$$

После замены $C_1 y^2 = -x^2$ (поскольку $C_1 < 0$) и обратных подстановок решение (7) записывается в виде

$$p_e = \frac{1}{\sqrt{|C_1|}}\,\frac{C_3 H(z) - 1}{C_3 H(z) + 1} - Dz - E - \rho_0 g z,$$

где постоянная C_3 определяется из динамического условия на свободной границе:

$$C_3 = \frac{1 + \sqrt{|C_1|}\,(p_g + Dl + E + \rho_0 g l)}{H(l)\sqrt{|C_1|}\,(p_g + Dl + E + \rho_0 g l)},$$

$H(z) = \exp\,(2\sqrt{|C_1|}\,(Dz + E))$.

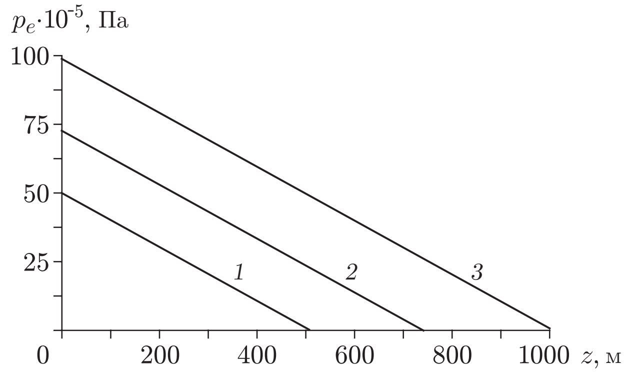

Рис. 2

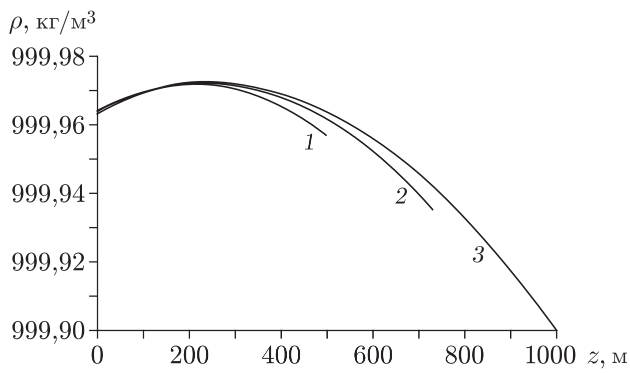

Рис. 3

Рис. 2. Зависимость $p_e(z)$ при различной толщине слоя:
1 — $l = 500$ м; *2* — $l = 730$ м; *3* — $l = 1000$ м

Рис. 3. Распределение плотности по толщине слоя:
1 — $l = 500$ м, $l_* = 209$ м, $\theta_0 = 3{,}37$ °C; *2* — $l = 730$ м, $l_* = 240$ м, $\theta_0 = 2{,}96$ °C; *3* — $l = 1000$ м, $l_* = 244$ м, $\theta_0 = 2{,}43$ °C

Функция p_e выпукла вниз и близка к линейной (рис. 2). Значению $z = 0$ соответствует нижняя граница.

Подставив p_e в (2), получим функцию $\rho(z)$. Зависимости $\rho(z)$, построенные при различных значениях толщины слоя l, представлены на рис. 3 (l_* — толщина слоя, при которой плотность воды ρ принимает максимальное значение (координата инверсии)).

Итак, получено стационарное решение $\boldsymbol{v}_e$, p_e, θ_e краевой задачи (3)–(5), соответствующее состоянию механического равновесия.

3. Безразмерные параметры. Запишем систему уравнений (3) в безразмерных переменных. Для этого в качестве характерного масштаба длины выберем ширину l_* нижней части слоя, где жидкость стратифицирована неустойчиво, в качестве масштаба температуры — разность $T = \theta_1 - \theta_0$, в качестве масштаба скорости — скорость конвективного всплытия нагретой частицы жидкости $v_* = \sqrt{g l_* \alpha T^2}$. Для плотности и давления используем масштабы ρ_0 и $\rho_0 v_*^2$ соответственно. Температуру будем отсчитывать от температуры нижней границы θ_1, а давление — от гидростатического давления.

Введем безразмерные переменные $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$, τ, такие что

$$\boldsymbol{x} = (x, y, z) = \boldsymbol{\xi} l_*, \quad t = \frac{l_*}{v_*}\,\tau, \quad l_* = \frac{l}{\lambda}, \quad \lambda = \frac{\theta_1 - \theta_b}{T},$$

$$p = \rho_0 v_*^2 p', \quad \boldsymbol{v} = v_* \boldsymbol{v}', \quad \theta = T\theta'.$$

Здесь λ — параметр инверсии; θ_b — температура свободной поверхности, вычисляемая по формуле (6); p', v', θ' — безразмерные функции давления, скорости и температуры соответственно.

С учетом принятых предположений уравнения свободной конвекции в безразмерных переменных записываются в виде (штрихи опущены)

$$\begin{gathered} \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0, \qquad \frac{\partial \theta}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \theta = \delta \Delta \theta, \\ \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = -\nabla p + \mu_1 \Delta \boldsymbol{v} - \Big(\frac{1}{\beta} - (\theta + \varepsilon_T p)^2\Big)\boldsymbol{k}, \end{gathered} \tag{8}$$

где $\delta = \chi/(l_* v_*)$ — число Фурье; $\mu_1 = \nu/(l_* v_*)$ — параметр кинематической вязкости (величина, обратная числу Рейнольдса); $\nu = \mu/\rho_0$ — кинематическая вязкость; $\beta = \alpha T^2$; $\varepsilon_T = \theta_0 \delta \rho_0 v_*^2/T$; $\boldsymbol{k}$ — орт оси z.

Граничные условия в безразмерных переменных принимают вид

$$\theta = 0, \quad \boldsymbol{v} = 0 \qquad \text{при} \quad \zeta = 0; \tag{9}$$

$$w = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} + \mathrm{Bi}\,(\theta - \theta_g) = Q, \quad p = 0 \qquad \text{при} \quad \zeta = \lambda. \tag{10}$$

Здесь $\mathrm{Bi} = bl_*/k$ — число Био; $Q = kT/l_*$ — безразмерный поток тепла.

4. Уравнения малых возмущений. Пусть $\boldsymbol{v}_d(\boldsymbol{\xi}, \tau) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\xi}, \tau) + \delta \boldsymbol{V}(\boldsymbol{\xi}, \tau)$, $p_d(\boldsymbol{\xi}, \tau) = p(\boldsymbol{\xi}, \tau) + \mu_1 \delta P(\boldsymbol{\xi}, \tau)$, $\theta_d(\boldsymbol{\xi}, \tau) = \theta(\boldsymbol{\xi}, \tau) + \Theta(\boldsymbol{\xi}, \tau)$, где $\boldsymbol{V} = (U, V, W)$, P, Θ — возмущения; $\boldsymbol{v}$, p, θ — основное решение. Вид функций $\boldsymbol{v}_d$, p_d, θ_d, описывающих возмущенное движение, выбран для упрощения последующих преобразований. Функции $\boldsymbol{v}_d$, p_d, θ_d — решения уравнений (8) с граничными условиями (9), (10).

Линеаризованная система имеет вид

$$\begin{gathered} \operatorname{div} \boldsymbol{V} = 0, \qquad \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \Theta + \delta \boldsymbol{V} \cdot \nabla \theta = \delta \Delta \Theta, \\ \delta\, \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \tau} + \delta(\boldsymbol{V} \cdot \nabla \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{V}) = -\mu_1 \delta \nabla P + \mu_1 \Delta \boldsymbol{v} + \mu_1 \delta \Delta \boldsymbol{V} - 2(\theta + \varepsilon_T p)(\Theta + \mu_1 \delta \varepsilon_T P)\boldsymbol{k}. \end{gathered} \tag{11}$$

Уравнения системы (11) справедливы в области Ω. На твердой стенке выполнены условия

$$\boldsymbol{V} = 0, \qquad \Theta = 0. \tag{12}$$

Условия на свободной границе имеют вид [5]

$$\begin{gathered} F_{1\tau} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla F_1 + \delta \boldsymbol{V} \cdot \nabla f_1 = 0, \\ -\mu_1 \delta P + 2\mu_1 \delta D(\boldsymbol{V})\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n} + 4\mu_1 D(\boldsymbol{v})\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n}_1 = \frac{\partial p}{\partial n}\, R - 2\mu_1\, \frac{\partial D(\boldsymbol{v})}{\partial n}\, \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n} R, \\ \delta D(\boldsymbol{V})\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x}_{\alpha_{1,2}} + \frac{\partial D(\boldsymbol{v})}{\partial n}\, \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x}_{\alpha_{1,2}} R + D(\boldsymbol{v})\boldsymbol{n} \cdot (R\boldsymbol{n})_{\alpha_{1,2}} + D(\boldsymbol{v})\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{x}_{\alpha_{1,2}} = 0, \\ \Big(\frac{\partial \Theta}{\partial n} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial n^2}\, R + \nabla \theta \cdot \boldsymbol{n}_1\Big) + \mathrm{Bi}\,\Big(\Theta + \frac{\partial \theta}{\partial n}\, R\Big) = 0, \end{gathered} \tag{13}$$

где $F_1 = F_1(\boldsymbol{\xi}, \tau)$ — возмущение f_1; $f_1 = f_1(\boldsymbol{\xi}, \tau) = \zeta - f(\xi, \eta, \tau) = 0$ — уравнение невозмущенной границы; R — локальное отклонение свободной границы от невозмущенного состояния по нормали; $\boldsymbol{n}_1$ — возмущение нормали $\boldsymbol{n}$:

$$\boldsymbol{n}_1 = \frac{1}{EG - F^2}\, [(FR_{\alpha_2} - GR_{\alpha_1})\boldsymbol{x}_{\alpha_1} + (FR_{\alpha_1} - ER_{\alpha_2})\boldsymbol{x}_{\alpha_2}],$$

$E = |\boldsymbol{x}_{\alpha_1}|^2$, $G = |\boldsymbol{x}_{\alpha_2}|^2$, $F = \boldsymbol{x}_{\alpha_1} \cdot \boldsymbol{x}_{\alpha_2}$ — коэффициенты первой квадратичной формулы; $\boldsymbol{x}(\alpha_1, \alpha_2, \tau)$ — свободная поверхность Γ_t, заданная в параметрическом виде. В рассматриваемом случае $\boldsymbol{x}_{\alpha_1} = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{x}_{\alpha_2} = (0, 1, 0)$, $\boldsymbol{n} = (0, 0, 1)$.

Система (11) дополняется начальными условиями

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_0(\boldsymbol{\xi}), \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{V}_0(\boldsymbol{\xi}) = 0, \qquad \Theta = \Theta(\zeta).$$

5. Задача о малых возмущениях равновесия. Рассмотрим задачу (11)–(13) о равновесии слоя со свободной границей, описываемого функциями $\boldsymbol{v}_e$, p_e, θ_e. Система уравнений для возмущений в безразмерных координатах имеет вид

$$U_\xi + V_\eta + W_\zeta = 0, \qquad \Theta_\tau + \delta h_1 W = \delta \Delta \Theta,$$

$$U_\tau/\mu_1 = -P_\xi + \Delta U, \qquad V_\tau/\mu_1 = -P_\eta + \Delta V, \tag{14}$$
$$W_\tau/\mu_1 = -P_\zeta + \Delta W + \mathrm{R}\,(\theta + \varepsilon_T p)\Theta + 2(\theta + \varepsilon_T p)\varepsilon_T P,$$

где $h_1 = Al_*/T$; $\mathrm{R} = 2/(\mu_1\delta)$ — число Рэлея.

Граничные условия имеют вид

$$U = V = W = 0, \quad \Theta = 0 \qquad \text{при} \quad \zeta = 0; \tag{15}$$

$$\begin{gathered} -R_\tau + \delta W = 0, \qquad U_\zeta + W_\xi = 0, \qquad V_\zeta + W_\eta = 0, \\ -\mu_1\delta P + 2\mu_1\delta W_\zeta = h_2 R, \qquad \Theta_\zeta + \mathrm{Bi}\,(\Theta + h_1 R) = 0 \qquad \text{при} \quad \zeta = \lambda, \end{gathered} \tag{16}$$

где $h_2 = \partial p/\partial\zeta$.

Решение краевой задачи (14)–(16) будем искать в виде нормальных волн:

$$(\boldsymbol{V}, P, \Theta, R) = (\boldsymbol{V}(\zeta), P(\zeta), \Theta(\zeta), R(\zeta)) \exp\,[i(\alpha_1\xi + \alpha_2\eta - C\tau)]. \tag{17}$$

Здесь α_1, α_2 — безразмерные волновые числа вдоль осей x и y соответственно; $C = C_r + C_i$ — комплексный декремент, определяющий временной ход возмущения. Подставляя (17) в (14)–(16), получим задачу, к которой применимо преобразование Сквайра $Z = i\alpha_1 U + i\alpha_2 V$. После преобразований система принимает вид

$$\begin{gathered} Z + W' = 0, \qquad -iC\Theta + \delta h_1 W = \delta(\Theta'' - k^2\Theta), \\ -iCZ/\mu_1 = k^2 P + Z'' - k^2 Z, \\ -iCW/\mu_1 = -P' + W'' - k^2 W + \mathrm{R}\,(\theta + \varepsilon_T p)\Theta + 2(\theta + \varepsilon_T p)\varepsilon_T P, \end{gathered} \tag{18}$$

где $k^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$ — модифицированное волновое число. Граничные условия записываются в следующем виде:

$$Z = 0, \quad W = 0, \quad \Theta = 0 \qquad \text{при} \quad \zeta = 0; \tag{19}$$

$$Z' = 0, \quad \Theta' + \mathrm{Bi}\,(\Theta + h_1\delta iW/C) = 0, \quad -P + 2W' = \mathrm{R}\,h_2 iW/(2C) \qquad \text{при} \quad \zeta = \lambda. \tag{20}$$

Краевая задача (18)–(20) является задачей на собственные значения относительно комплексного декремента C. Для устойчивости равновесного состояния $\boldsymbol{v}_e$, p_e, θ_e по отношению к малым возмущениям вида (17) необходимо и достаточно, чтобы у всех собственных значений C мнимая часть C_i была отрицательной.

6. Асимптотика длинных волн. Параметры Z, W, P, Θ, C представим в следующем виде (при $k \to 0$):

$$Z = Z_0 + kZ_1 + \ldots, \qquad W = W_0 + kW_1 + \ldots, \qquad P = P_0 + kP_1 + \ldots,$$
$$\Theta = \Theta_0 + k\Theta_1 + \ldots, \qquad C = C_0 + kC_1 + \ldots.$$

После подстановки указанного разложения в систему (18) запишем полученное уравнение в нулевом приближении

$$Z_0'' = -iC_0 Z_0/\mu_1 \tag{21}$$

с граничными условиями

$$Z_0 = 0 \quad \text{при} \quad \zeta = 0, \qquad Z_0' = 0 \quad \text{при} \quad \zeta = \lambda. \tag{22}$$

Умножим уравнение (21) на комплексно-сопряженную величину Z_0^* и проинтегрируем на отрезке $[0, \lambda]$. В результате получим

$$\int\limits_0^\lambda |Z_0'|^2\, d\xi = -\frac{iC_0}{\mu_1} \int\limits_0^\lambda |Z_0|^2\, d\xi,$$

откуда следует, что $-iC/\mu_1 > 0$. Так как $\mu_1 > 0$, то $-iC > 0$. Следовательно, $C_0 = iC_i$ — чисто мнимое число и $C_i < 0$. Это означает, что длинноволновые возмущения затухают монотонно.

Уточним вид C_0. Обозначим $iC_0/\mu_1 = \mu_2$. Тогда (21) можно записать в виде

$$Z_0'' + \mu_2 Z_0 = 0.$$

Так как $\mu_2 > 0$, то $Z_0 = C_1 \cos\sqrt{\mu_2}\,\zeta + C_2 \sin\sqrt{\mu_2}\,\zeta$. В последнем выражении постоянные C_1 и C_2 определяются из граничных условий (22). При этом $C_1 = 0$, $\mu_2 = \pi^2 n^2$ и

$$C_0 = -i\mu_1\pi^2 n^2. \qquad (23)$$

7. Численное решение. Полученная спектральная задача (18)–(20) решается методом ортогонализации [6]. Приведем систему (18) к виду $y' = Ay$, где $y(x)$ — вектор неизвестных величин; $A(x)$ — матрица коэффициентов; $0 \leqslant x \leqslant 1$. После замены

$$x = \zeta/\lambda, \quad y_1 = Z, \quad y_2 = Z', \quad y_3 = W, \quad y_4 = P, \quad y_5 = \Theta, \quad y_6 = \Theta'$$

получим задачу

$$\begin{gathered} y_1' = \lambda y_2, \qquad y_2' = (-iC\lambda/\mu_1 + k^2\lambda)y_1 - k^2\lambda y_4, \qquad y_3' = -\lambda y_1, \\ y_4' = -\lambda^3 y_2 + \lambda(iC/\mu_1 - k^2)y_3 + 2(\theta + \varepsilon_T p)\varepsilon_T\lambda y_4 + \lambda\,\mathrm{R}\,(\theta + \varepsilon_T p)y_5, \\ y_5' = \lambda y_6, \qquad y_6' = h_1\lambda y_3 + \lambda(k^2 - iC/\delta)y_5 \end{gathered} \qquad (24)$$

с граничными условиями

$$y_1 = 0, \quad y_3 = 0, \quad y_5 = 0 \qquad \text{при} \quad x = 0,$$

$$y_2 = 0, \quad 2\lambda y_1 + \mathrm{R}\,h_2 i y_3/(2C) + y_4 = 0, \quad \mathrm{Bi}\,h_1\delta i y_3/C + \mathrm{Bi}\,y_5 + y_6 = 0 \quad \text{при} \quad x = 1.$$

При $x = 1$ граничные условия можно записать в матричном виде $Dy(1) = 0$, где D — матрица размерности 3×6, ненулевые элементы которой имеют следующие значения:

$$d_{12} = d_{24} = d_{36} = 1, \quad d_{21} = 2\lambda, \quad d_{23} = \mathrm{R}\,h_2 i/(2C), \quad d_{33} = \mathrm{Bi}\,h_1\delta i/C, \quad d_{35} = \mathrm{Bi}\,.$$

Остальные элементы матрицы D равны нулю.

Решение системы (24) будем искать в виде

$$y = \sum_{j=1}^{3} p_j y^j,$$

где коэффициенты p_j находятся из системы $Dy(1) = 0$; y^1, y^2, y^3 — линейно-независимые векторы:

$$y^1(0) = (0, 1, 0, 0, 0, 0), \quad y^2(0) = (0, 0, 0, 1, 0, 0), \quad y^3(0) = (0, 0, 0, 0, 0, 1).$$

Для нахождения собственного значения C необходимо знать начальное приближение C_0, которое выбирается из условия (23).

Исследовалась устойчивость слоя со свободной границей для воды при следующих значениях параметров: $\delta_0 = 5 \cdot 10^{-8}$ Па$^{-1}$, $\theta_g = 291$ К, $p_g = 101\,300$ Па, $\nu = 1{,}45 \cdot 10^{-6}$ м^2/с, $\chi = 1{,}32 \cdot 10^{-7}$ м^2/с. Расчеты проводились при $l = 500$, 730, 1000 м. Значение $l = 730$ м соответствует средней глубине озера Байкал. При указанных значениях физических параметров найдена зависимость $C_i = \operatorname{Im} C$ от волнового числа k.

На рис. 4 представлена зависимость $C_i(k)$ при различных значениях толщины слоя l (k_* — критические значения волнового числа, при которых равновесное состояние становится неустойчивым). На вставке показана та же зависимость для большего диапазона значений волнового числа k.

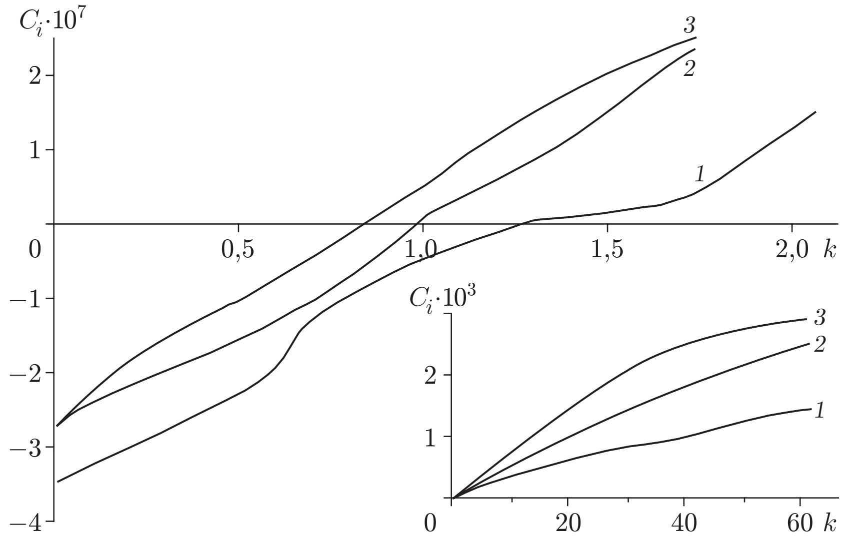

Рис. 4

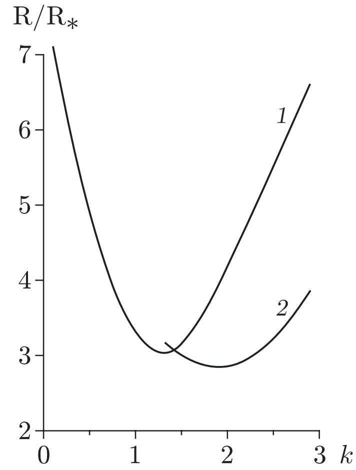

Рис. 5

Рис. 4. Комплексные декременты $C_i(k)$:
1 — $l = 500$ м, $\mathrm{R} = 1{,}51 \cdot 10^{16}$, $\mathrm{Bi} = 0{,}093$, $k_* = 1{,}31$; *2* — $l = 730$ м, $\mathrm{R} = 2{,}72 \cdot 10^{16}$, $\mathrm{Bi} = 0{,}107$, $k_* = 0{,}984$; *3* — $l = 1000$ м, $\mathrm{R} = 2{,}61 \cdot 10^{16}$, $\mathrm{Bi} = 0{,}109$, $k_* = 0{,}829$

Рис. 5. Нейтральные кривые $\mathrm{R}(k)$:
1 — $l = 1000$ м, $\mathrm{R}_1 = 3578{,}3$, $k_1 = 1{,}42$, $\mathrm{R}_* = 1178{,}5$, $k_* = 2{,}03$; *2* — $l = 500$ м, $\mathrm{R}_1 = 3280{,}2$, $k_1 = 1{,}98$, $\mathrm{R}_* = 1178{,}5$, $k_* = 2{,}03$

8. Сравнение результатов. Граница устойчивости определяется из соотношения $C_i(\mathrm{R}) = 0$. Случаю $C_i = 0$ соответствуют нейтральные возмущения. Полагая в задаче (18)–(20) $C = 0$, получим нейтральные кривые устойчивости. Сравним полученные результаты с известными результатами аналогичной задачи для предельного случая, когда уравнение состояния принимается в виде (1). Эта задача рассмотрена в [7]. На рис. 5 представлена зависимость числа Рэлея от волнового числа (нейтральные кривые). По оси ординат отложено отношение значений числа Рэлея, полученных в данной работе, к критическим значениям числа Рэлея R_*, определенным в [7] (R_1 — критические значения числа Рэлея, которые являются минимальными значениями на соответствующих нейтральных кривых; k_1 — критические значения волнового числа, при которых достигаются значения R_1). На рис. 5 видно, что значения R_* существенно меньше значений R_1. Кроме того, следует отметить, что при уменьшении числа Био критические значения числа Рэлея уменьшаются, а область неустойчивости смещается в область бо́льших значений волнового числа.

Автор выражает благодарность В. К. Андрееву за полезные замечания и советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Шимараев М. Н., Гранин Н. Г.** К вопросу о стратификации и механизме конвекции в Байкале // Докл. АН СССР. 1991. Т. 321, № 2. С. 381–385.
2. **Бочаров О. Б., Васильев О. Ф., Овчинникова Т. Э.** Приближенное уравнение состояния пресной воды вблизи температуры максимальной плотности // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1999. Т. 35, № 4. С. 556–558.
3. **Ravens T. M., Kosis O., Wuest A., Granin N. G.** Small-scale turbulence and vertical mixing in lake Baikal // Limnology Oceanography. 2000. N 45. P. 159–173.

4. **Shimaraev M. N.** Physical limnology of lake Baikal: a review / M. N. Shimaraev, V. I. Verbolov, N. G. Granin, P. P. Sherstyankin. Irkutsk; Okayama: S. n., 1994.
5. **Андреев В. К.** Малые возмущения термокапиллярного течения жидкости с поверхностью раздела // Тр. семинара “Математическое моделирование в механике” / Ин-т вычисл. моделирования СО РАН. Красноярск, 1997. Т. 1. С. 27–40. Деп. в ВИНИТИ 12.02.97, № 446-1397.
6. **Годунов С. К.** О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1961. Т. 16, № 3. С. 171–174.
7. **Надолин К. А.** Конвекция в горизонтальном слое жидкости при инверсии удельного объема // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1989. № 1. С. 43–49.

Поступила в редакцию 29/XII 2004 г.,
в окончательном варианте — 24/V 2006 г.