ПМТФ, № 4, 1965

О РАЗВИТИИ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ТЕЛЕ

А. Б. Ватажин

(Москва)

Задача о развитии гидродинамического пограничного слоя при внезапном возникновении движения тела изучалась многими авторами. Полученные результаты в наиболее полном виде представлены в монографиях Г. Шлихтинга [1] и Л. Г. Лойцянского [2]. В магнитной гидродинамике хорошо изучено развитие пограничного слоя над поверхностью плоской бесконечной пластины, когда набегающий поток является однородным (например, [3,4]). Ниже задача о развитии плоского магнитогидродинамического пограничного слоя рассматривается в другой постановке. Будем предполагать, что при $t = 0$ вдоль контура тела заданы распределения скорости $U(x)$ и энтальпии $h_\infty(x)$. В этот же момент мгновенно «включаются» механизмы вязкости и теплопроводности. В перпендикулярном к телу направлении начинают расти вязкий и тепловой пограничные слои. Среда в пограничном слое взаимодействует с магнитным полем. Такая постановка соответствует развитию магнитогидродинамического пограничного слоя на теле, которое приводится в движение рывком, в случае, когда скорость установления магнитогидродинамического обтекания тела невязкой и нетеплопроводной средой намного больше скорости развития пограничного слоя. Тогда $U(x)$ и $h_\infty(x)$ находятся из решения задачи о стационарном магнитогидродинамическом обтекании тела невязкой и нетеплопроводной средой, или просто гидродинамическом обтекании тела, если среда взаимодействует с полем только в пограничном слое.

Рассмотрим нестационарный магнитогидродинамический пограничный слой, вектор магнитного поля в котором лежит в плоскости течения. Предположим, что среда несжимаемая ($\rho = \mathrm{const}$), коэффициенты динамической вязкости и теплопроводности, а также число Прандтля P постоянны, проводимость σ изотропна. Будем считать, что, наряду с обычной оценкой для пограничного слоя $R \gg 1$, выполняются оценки $\Delta \gg \delta$, $R_m \ll 1$, где δ и Δ — соответственно толщина пограничного слоя и характерный размер изменения внешнего, не зависящего от времени магнитного поля, а R и R_m — характерные обычное и магнитогидродинамическое числа Рейнольдса, определенные по размеру δ. Тогда уравнения пограничного слоя в системе координат, связанной с телом, в случае, когда параметры на границе пограничного слоя не зависят от времени, имеют вид [4,5]

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = UU_x' + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \varepsilon(\sigma_\infty{}^\circ U - \sigma^\circ u) + e(\sigma_\infty{}^\circ - \sigma^\circ) \tag{2}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u\frac{\partial \theta}{\partial x} + v\frac{\partial \theta}{\partial y} = \nu^2 P^{-1}\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - 0.5\nu P^{-1}(1 - P)\frac{\partial^2 u^2}{\partial y^2} + \sigma^\circ e(u + \varepsilon^{-1}e) \tag{3}$$

$$\left(\theta = h + \frac{u^2}{2},\ \sigma^\circ = \frac{\sigma}{\sigma_*},\ \varepsilon = \frac{\sigma_* H^2}{c^2\rho},\ e = \frac{\sigma_* EH}{c\rho}\right)$$

Здесь координаты x и y соответственно отсчитываются вдоль контура и в перпендикулярном к нему направлении, $U_x' = dU / dx$, h — энтальпия, ν — коэффициент кинематической вязкости, θ — энтальпия торможения, σ_* и $\sigma_\infty{}^\circ$ — характерная проводимость и безразмерная проводимость на границе пограничного слоя, $H = H(x)$ — нормальная к телу компонента приложенного магнитного поля в точках обтекаемого контура, E — не зависящая от координат потенциальная составляющая компоненты электрического поля в направлении z, c — скорость света в вакууме. Функции $\varepsilon(x)$ и e определяются геометрией приложенного электромагнитного поля и условиями для протекания токов. Заметим, что, в силу неравенства $(4\pi\sigma\nu / c^2) \ll 1$, вихревая составляющая электрического поля в пограничном слое, возникающая вследствие зависимости от времени компонент индуцированного магнитного поля, пренебрежимо мала. Величина E в общем случае может зависеть от времени; однако, когда токи в направлении z протекают свободно, то $E = 0$, если магнитное поле фиксировано относительно тела, и $E = -c^{-1}H_*V$, если тело со скоростью $V = \text{const}$ движется в однородном поле H_*, перпендикулярном направлению движения.

Граничными и начальными условиями для решения системы (1) — (3) являются

$$
\begin{gathered}
u = U(x), \quad \theta = \theta_\infty(x) \quad \text{при } 0 < y < \infty,\ t = 0;\ y = \infty,\ t \geqslant 0 \\
u = 0,\ v = 0,\ \theta = h_w(x) \quad \text{при } y = 0,\ t \geqslant 0 \\
(\theta_\infty(x) = h_\infty(x) + 0.5U^2, \quad (d\theta_\infty / dx) = e\sigma_\infty^\circ\,(U + e\varepsilon^{-1}))
\end{gathered}
\tag{4}
$$

Если проводимость однородна ($\sigma^\circ = 1$), то уравнения (1) и (2) могут быть решены независимо от уравнения (3). Если $\sigma = \sigma(h)$, то система (1) — (3) должна решаться совместно.

Решение системы (1) — (3) с граничными условиями (4) будем искать в виде

$$
\begin{gathered}
\psi = 2\sqrt{\nu t}\,[f_0(x, \eta) + tf_1(x, \eta) + t^2 f_2(x, \eta) + \ldots] \\
u = \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial f_0}{\partial\eta} + t\frac{\partial f_1}{\partial\eta} + t^2\frac{\partial f_2}{\partial\eta} + \ldots \qquad \left(\eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right) \\
v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = -2\sqrt{\nu t}\left[\frac{\partial f_0}{\partial x} + t\frac{\partial f_1}{\partial x} + t^2\frac{\partial f_2}{\partial x} + \ldots\right] \\
\theta = \theta_0(x, \eta) + t\theta_1(x, \eta) + t^2\theta_2(x, \eta) + \ldots
\end{gathered}
\tag{5}
$$

Электропроводность определяется рядом

$$
\sigma^\circ = \sigma_0 + t\sigma_1 + t^2\sigma_2 + \ldots
$$

коэффициенты которого находятся при помощи разложения для энтальпии; σ_0 вычисляется по энтальпии $h_0 = \theta_0 - 0.5\,(\partial f_0 / \partial\eta)^2$.

Подставляя (5) в систему (1) — (3) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, получим уравнения

$$
\frac{\partial^3 f_0}{\partial\eta^3} + 2\eta\frac{\partial^2 f_0}{\partial\eta^2} = 0, \quad \left(\frac{\partial f_0}{\partial\eta}\right)_{\eta=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial f_0}{\partial\eta}\right)_{\eta=\infty} = U, \quad \left(\frac{\partial f_0}{\partial x}\right)_{\eta=0} = 0 \tag{6}
$$

$$
\frac{\partial^3 f_1}{\partial\eta^3} + 2\eta\frac{\partial^2 f_1}{\partial\eta_2} - 4\frac{\partial f_1}{\partial\eta} = 2\Pi, \quad \left(\frac{\partial f_1}{\partial\eta}\right)_{\eta=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial f_1}{\partial\eta}\right)_{\eta=\infty} = 0, \quad \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)_{\eta=0} = 0
$$

$$
\begin{gathered}
\Pi = \Pi(x, \eta) = 2\left(\frac{\partial f_0}{\partial\eta}\frac{\partial^2 f_0}{\partial\eta\,\partial x} - UU_x' - \frac{\partial f_0}{\partial x}\frac{\partial^2 f_0}{\partial\eta^2}\right) + 2\varepsilon\left(\sigma_0\frac{\partial f_0}{\partial\eta} - \sigma_\infty^\circ U\right) + \\
+ 2e\,(\sigma_0 - \sigma_\infty^\circ)
\end{gathered}
\tag{7}
$$

$$
\frac{\partial^2\theta_0}{\partial\lambda^2} + 2\lambda\frac{\partial\theta_0}{\partial\lambda} = \frac{0.5(1-P)}{P}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\left[\left(\frac{\partial f_0}{\partial\eta}\right)^2\right], \quad \theta_0(x, 0) = h_w, \quad \theta_0(x, \infty) = \theta_\infty \tag{8}
$$

$$
\frac{\partial^2\theta_1}{\partial\lambda^2} + 2\lambda\frac{\partial\theta_1}{\partial\lambda} - 4\theta_1 = 2Q, \quad \theta_1(x, 0) = 0, \quad \theta_1(x, \infty) = 0 \quad (\lambda = \eta\sqrt{P}) \tag{9}
$$

$$
Q(x, \lambda) = 2\left(\frac{\partial f_0}{\partial\eta}\frac{\partial\theta_0}{\partial x} - \frac{\partial f_0}{\partial x}\frac{\partial\theta_0}{\partial\eta}\right) + \frac{0.5(1-P)}{P}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\left(\frac{\partial f_0}{\partial\eta}\frac{\partial f_1}{\partial\eta}\right) - 2e\sigma_0\left(\frac{\partial f_0}{\partial\eta} + \frac{e}{\varepsilon}\right)
$$

Уравнение (6) можно рассматривать как обыкновенное линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка по η относительно функции $\partial f_0 / \partial\eta$, в которое x входит как параметр. Для его решения используются два первых граничных условия. Решение имеет вид

$$\frac{\partial f_0}{\partial\eta} = U(x)\operatorname{erf}\eta \qquad \left(\operatorname{erf}\eta = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\eta \exp(-\eta^2)\,d\eta\right) \tag{10}$$

Используя последнее граничное условие, находим

$$f_0 = U\int\limits_0^\eta \operatorname{erf}\eta\,d\eta = U\{\eta\operatorname{erf}\eta + \pi^{-1/2}[\exp(-\eta^2) - 1]\} \tag{11}$$

Аналогично может быть проинтегрировано уравнение (8)

$$\theta_0 = h_w + 0.5\sqrt{\pi}A\operatorname{erf}\lambda + 0.5(1-P)\,r(\lambda)$$

$$A = 2\pi^{-1/2}[\theta_\infty - h_w - 0.5g\sqrt{\pi}(1-P)], \qquad g = \int\limits_0^\infty G(\lambda)\left(\frac{\partial f_0}{\partial\eta}\right)^2 d\lambda \tag{12}$$

$$r(\lambda) = \int\limits_0^\lambda \exp(-\lambda^2)\left\{\int\limits_0^\lambda\left\{\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\left[\left(\frac{\partial f_0}{\partial\eta}\right)^2\right]\right\}\exp\lambda^2 d\lambda\right\}d\lambda$$

$$G(\lambda) = (1+2\lambda^2)\operatorname{Erf}\lambda\exp\lambda^2 - 2\pi^{-1/2}\lambda \qquad (G \geqslant 0,\ \operatorname{Erf}\lambda = 1 - \operatorname{erf}\lambda) \tag{13}$$

С учетом (11), (12) уравнение (7) превращается в обыкновенное линейное дифференциальное уравнение второго порядка по η относительно функции $\partial f_1 / \partial\eta$, для решения которого служат два первых граничных условия. Последнее условие позволяет определить функцию $f_1(x, \eta)$. После этого можно проинтегрировать уравнение (9) как обыкновенное дифференциальное уравнение относительно θ_1.

В работе [4] было показано, что решение уравнения

$$\Phi'' + 2\eta\Phi' - 4\Phi = 2\varphi(\eta), \qquad \Phi(0) = 0, \qquad \Phi(\infty) = 0 \tag{14}$$

представляет собой функцию $L(\eta) = L[\eta, \varphi(\eta)]$, обладающую следующими свойствами:

$$\Phi = L[\eta, \varphi(\eta)], \qquad \Phi'(0) = -2\int\limits_0^\infty G(\eta)\varphi(\eta)\,d\eta$$

$$L[\eta, \varphi] \leqslant 0 \quad \text{если} \quad \varphi \geqslant 0 \quad (0 < \eta < \infty) \tag{15}$$

$$L[\eta, k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2] = k_1 L[\eta, \varphi_1] + k_2 L[\eta, \varphi_2] \quad (k_1, k_2 = \mathrm{const})$$

Выражение для функции L и график функции G, определяемой формулой (13), приведены в работе [4]. На основании (14), (15)

$$\frac{\partial f_1}{\partial\eta} = L[\eta, \Pi], \qquad \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial\eta^2}\right)_{\eta=0} = UU_x'N + UC \tag{16}$$

$$N = -4\int\limits_0^\infty G(\eta)\,\varkappa(\eta)\,d\eta, \qquad C = 4\int\limits_0^\infty G(\eta)\,[\varepsilon\sigma_\infty^\circ + eU^{-1}(\sigma_\infty^\circ - \sigma_0) - \varepsilon\sigma_0\operatorname{erf}\eta]\,d\eta$$

$$\varkappa(\eta) = (\operatorname{erf}\eta)^2 - \left(\int\limits_0^\eta \operatorname{erf}\eta\,d\eta\right)(\operatorname{erf}\eta)' - 1$$

$$\theta_1 = L[\lambda, Q], \qquad \left(\frac{\partial\theta_1}{\partial\lambda}\right)_{\lambda=0} = s_1 + s_2 + s_3 \tag{17}$$

$$s_1 = -4 \int\limits_0^\infty \left(\frac{\partial f_0}{\partial \eta} \frac{\partial \theta_0}{\partial x} - \frac{\partial f_0}{\partial x} \frac{\partial \theta_0}{\partial \eta} \right) G(\lambda)\, d\lambda$$

$$s_2 = 4e \int\limits_0^\infty G\sigma_0 (\operatorname{erf} \eta + e\varepsilon^{-1})\, d\lambda, \qquad s_3 = (P-1) \int\limits_0^\infty \frac{\partial^2 G}{\partial \lambda^2} \frac{\partial f_0}{\partial \eta} \frac{\partial f_1}{\partial \eta}\, d\lambda$$

Уравнения для приближений более высокого порядка также могут быть сведены к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений, которое может быть выполнено в квадратурах [6].

Ограничимся изучением нулевого и первого приближений. Коэффициент трения на поверхности тела равен

$$c_f = U^{-1} \sqrt{\nu / t} \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} + t\,[U_x' N + C] + \ldots \right\} \tag{18}$$

Величина N была вычислена Блазиусом [1]

$$N = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{4}{3\pi}\right)$$

Рассмотрим случай постоянной электропроводности: $\overset{\circ}{\sigma}_\infty = \sigma_0 = 1$. Тогда

$$C = 4\varepsilon \int\limits_0^\infty G(\eta) \operatorname{Erf} \eta\, d\eta = \frac{2\varepsilon}{\sqrt{\pi}}$$

$$c_f = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\nu}{t}\right)^{1/2} U^{-1} \left\{1 + t\left[\varepsilon + U_x'\left(1 + \frac{4}{3\pi}\right)\right] + \ldots\right\} \tag{19}$$

Если происходит отрыв пограничного слоя, то момент отрыва, определяемый с учетом только первых двух приближений, равен

$$t^* = \left[-\varepsilon - U_x'\left(1 + \frac{4}{3\pi}\right)\right]^{-1}$$

Так как $\varepsilon \geqslant 0$, то для возникновения отрыва необходимо, чтобы на контуре были точки, в которых $U_x' < 0$. Выразив U_x' через градиент давления $p_x' = dp_\infty / dx$, найдем

$$t^* = \left\{\frac{p_x'}{\rho U}\left(1 + \frac{4}{3\pi}\right) + \frac{e}{U}\left(1 + \frac{4}{3\pi}\right) + \frac{4\varepsilon}{3\pi}\right\}^{-1} \tag{20}$$

Если величина в фигурных скобках отрицательна, то отрыв пограничного слоя не возникает. Так как $\varepsilon \geqslant 0$, то при одинаковом распределении давления по телу магнитогидродинамическое взаимодействие, определяемое силой $c^{-1}\sigma \mathbf{v} \times \mathbf{H}$, всегда способствует более раннему отрыву пограничного слоя. Электромагнитное воздействие на поток, определяемое силой $c^{-1}\mathbf{E} \times \mathbf{H}$, способствует более раннему отрыву, если $e > 0$, и более позднему, если $e < 0$. Эти выводы согласуются с результатами работы [7], в которой исследовалось влияние магнитного поля на отрыв пограничного слоя при стационарном течении.

Если тело со скоростью $\mathbf{V}$ движется во внешнем однородном поле $\mathbf{H}_*$ и $\mathbf{V} \perp \mathbf{H}_*$, то

$$eU^{-1} = -\varepsilon\,(V/U)\,(H_*/H)$$

В случае плоской бесконечной пластины

$$p_x' = 0, \qquad eU^{-1} = -\varepsilon$$

и, согласно формуле (20), отрыв пограничного слоя не возникает.

Рассмотрим случай, когда электрическое поле равно нулю: $e = 0$. Магнитное поле в этом случае фиксировано относительно тела. Будем считать, что поток вне пограничного слоя не взаимодействует с полем ($\sigma_\infty{}^\circ = 0$).

При $P = 1$ из (12) с учетом (10) находим

$$h_0 = h_w + (h_\infty - h_w + 0.5U^2) \operatorname{erf} \eta - 0.5U^2 (\operatorname{erf} \eta)^2 \tag{21}$$

Пусть $\sigma(h_\infty) = 0$, а при $h > h_\infty$ зависимость электропроводности от энтальпии является степенной. Тогда, если $h_w \approx h_\infty$ (повышение электропроводности обусловлено диссипацией кинетической энергии),

$$\sigma_0 = \left(\frac{h_0}{h_*}\right)^n = \left(\frac{h_\infty}{h_*}\right)^n \left(\frac{h_0}{h_\infty}\right)^n \approx \alpha^n a_1^n(\eta)$$

$$\alpha = 0.5 h_*^{-1} U^2, \qquad a_1(\eta) = \mathrm{Erf}\,\eta\,\mathrm{erf}\,\eta \tag{22}$$

Здесь h_* — энтальпия, по которой определяется характерная проводимость σ_*.

Если скорости малы, $h_w \gg h_\infty$ (разогрев газа происходит за счет теплоотдачи от стенки), то

$$\sigma_0 \approx \left(\frac{h_w}{h_*}\right)^n (\mathrm{Erf}\,\eta)^n \tag{23}$$

Наконец, если поверхность теплоизолирована и $P = 1$, то из (8) находим, что $\theta_0 = \mathrm{const}$ и

$$\sigma_0 = \alpha^n a_2^n(\eta) \qquad (a_2 = 1 - (\mathrm{erf}\,\eta)^2) \tag{24}$$

В случае зависимостей (22) и (24) величина C и момент отрыва (если он возникает) равны

$$C_k = -4\varepsilon\alpha^n \pi^{-1/2} i_k, \qquad t^* = \left[-U_x'\left(1 + \frac{4}{3\pi}\right) + 2\varepsilon\alpha^n i_k\right] \qquad (k = 1, 2)$$

$$i_1 = \sqrt{\pi}\int_0^\infty G(\eta)\,\mathrm{erf}\,\eta\, a_1^n d\eta, \qquad i_2 = \sqrt{\pi}\int_0^\infty G(\eta)\,\mathrm{erf}\,\eta\, a_2^n d\eta$$

Значения интегралов i_1 и i_2 приведены в работе [4]. В случае зависимости (23) и $n = 1$

$$C = -\frac{2h_w\varepsilon(4-\pi)}{h_*\pi\sqrt{\pi}}, \qquad t^* = \left\{-U_x'\left(1 + \frac{4}{3\pi}\right) + \frac{h_w\varepsilon(4-\pi)}{h_*\pi}\right\}$$

Поступила 26 IV 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. Изд. иностр. лит., 1956.
2. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. Физматгиз, 1962.
3. Чекмарев И. Б. О нестационарном течении вязкой несжимаемой проводящей жидкости в полупространстве при наличии поперечного магнитного поля. Ж. техн. физ., 1960, т. 30, № 8.
4. Ватажин А. Б. Развитие магнитогидродинамического пограничного слоя при внезапном возникновении движения или внезапном торможении сверхзвукового потока на границе полупространства. ПМТФ, 1965, № 2.
5. Любимов Г. А. К постановке задачи о магнитогидродинамическом пограничном слое. ПММ, 1962, т. 26, вып. 5.
6. Янке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Физматгиз, 1961,
7. Ватажин А. Б. Об отрыве магнитогидродинамического пограничного слоя. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2.