

## УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН ФИЛЬТРАЦИОННОГО ГОРЕНИЯ

А. П. Алдушин, С. Г. Каспарян  
(Черноголовка)

Известно, что горение газов, порохов, безгазовых систем может протекать существенно нестационарно. Фильтрационное горение — распространение зоны гетерогенной экзотермической реакции в пористой среде при фильтрации окислителя — в этом отношении не исключение. Яркие нестационарные эффекты в виде спинового распространения зоны реакции наблюдались при фильтрационном горении металлов в азоте [1, 2]. Автоколебательные режимы распространения фронта обнаружены при экспериментальном моделировании процессов внутрипластового горения нефти [3].

Нестационарный характер процесса при постоянстве внешних условий есть следствие неустойчивости стационарных режимов. Влияние параметров и схемы организации процесса горения на его устойчивость можно выяснить, исследуя нестационарный отклик фронта реакции на малое возмущение его стационарной структуры.

Основной результат такого анализа заключается в установлении границ области реализации стационарных и нестационарных режимов распространения волн фильтрационного горения. Побочным результатом является расчет инкрементов роста и декрементов затухания различных возмущений в области неустойчивости стационарного режима. Основываясь на гипотезе преимущественного развития моды возмущения с максимальным инкрементом, можно делать определенные предположения о характере нестационарного распространения волны горения.

Устойчивость фронта фильтрационного горения относительно мелко-масштабных искривлений с длиной волны, много меньшей теплового слоя, анализировалась ранее в [4]. Не останавливаясь на деталях, отметим, что в наиболее интересных в практическом отношении случаях, когда скорость фильтрации во много раз превышает скорость движения фронта, коротковолновая асимптотика не является представительной для исследования устойчивого горения. Устойчивый к мелкомасштабным возмущениям фронт реакции, как показано ниже, может оказаться неустойчивым к плоским и длинноволновым возмущениям.

### Постановка задачи

Исследуется устойчивость стационарных режимов распространения зоны экзотермического взаимодействия частиц пористой среды с окислителем газового потока, фильтрующегося в направлении движения фронта или против него [5—8]. В квазигомогенном приближении (масштаб гетерогенности среды полагается малым) система уравнений фильтрационного горения, отражающая баланс тепла (1), окислителя (2), газобразных (3) и конденсированных компонентов (4), компонентов в волне реакции, а также закон фильтрации газа в пористой среде (5), имеет следующий вид:

$$C \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u^0 \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \lambda \Delta T - c_r \vec{G} \operatorname{grad} T + Q \rho_0 w, \quad (1)$$

$$\frac{\partial (\rho_r a)}{\partial t} + u^0 \frac{\partial (\rho_r a)}{\partial x} = -\operatorname{div} (\vec{G} a) + D \rho_r \Delta a - \mu \rho_0 w, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho_r}{\partial t} + u^0 \frac{\partial \rho_r}{\partial x} = -\operatorname{div} (\vec{G}) + \mu_1 \rho_0 w, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u^0 \frac{\partial \eta}{\partial x} = w, \quad \rho_K = \rho_0 (1 - \eta), \quad \rho_{\Pi} = \mu_{\Pi} \rho_0 \eta, \quad (4)$$

$$\vec{G} = \rho_r \vec{v}, \quad \vec{v} = -k_{\Phi} \text{grad } p, \quad (5)$$

$$C = c_K \rho_K + c_r \rho_r + c_{\Pi} \rho_{\Pi}, \quad \mu_{\Pi} = 1 - \mu_r, \quad p = R \rho_r T \sigma^{-1} = R' \rho_r T.$$

Уравнения (1)–(5) записаны в системе координат, движущейся справа налево в направлении  $-x$  со скоростью стационарного горения  $u^0$ . Здесь  $t$  — время;  $T$  — температура;  $\vec{v}$ ,  $\vec{G}$  — скорость и массовый поток газа;  $\rho_r$ ,  $\rho_K$ ,  $\rho_{\Pi}$  — содержание газа, исходного конденсированного вещества и твердофазного продукта в единице объема среды;  $p$  — давление;  $a$  — концентрация окислителя;  $\rho_0$  — исходное содержание конденсированного вещества;  $k_{\Phi}$ ,  $D$ ,  $\lambda$  — коэффициенты фильтрации, диффузии и теплопроводности в пористой среде;  $\sigma$  — пористость;  $R$  — газовая постоянная;  $R' = R\sigma^{-1}$ ,  $\mu$ ,  $\mu_r$ ,  $\mu_{\Pi}$  — стехиометрические коэффициенты реакции по окислителю, газу и конденсированному продукту реакции;  $C$  — теплоемкость (при постоянном давлении) единицы объема среды;  $c_r$ ,  $c_K$ ,  $c_{\Pi}$  — теплоемкости единицы массы газообразного реагента, исходного вещества и конденсированного продукта, связанные в силу предполагаемого постоянства теплоты реакции  $Q$  соотношением

$$c_K = \mu_r c_r + c_{\Pi} \mu_{\Pi}.$$

Учитывая резкое возрастание скорости реакции  $w$  с температурой, аппроксимируем  $w$  обобщенной функцией (модель бесконечно тонкой зоны реакции)

$$w = \Phi(T_{\Phi}) \delta(T - T_{\Phi}), \quad T_{\Phi} = T(\xi),$$

нормированной на некоторую величину  $\Phi$ , зависящую от температуры  $T_{\Phi}$  в зоне реакции ( $x = \xi$ ).

Пренебрежем содержанием газа в порах и его изменением ( $\partial \rho_r / \partial t$ ,  $\partial \rho_r / \partial x$ ) в массовом балансе, полагая, что основное количество окислителя доставляется в зону реакции фильтрационным потоком, т. е.  $G \gg \rho_r u$ . Последнее неравенство практически всегда выполняется в процессах фильтрационного горения, поскольку скорость распространения фронта значительно меньше линейной скорости фильтрации [6, 7].

Уравнение (3) при этом принимает вид

$$\text{div}(\vec{G}) = \mu_r \rho_0 w. \quad (3')$$

Завершая постановку задачи, выпишем стационарные распределения параметров в области исходного вещества ( $x < 0$ ) и продукта ( $x > 0$ ), получающиеся в результате интегрирования системы стационарных ( $\partial / \partial t = 0$ ) уравнений горения (1)–(5) [8]:

$$\begin{aligned} x < 0: \quad T = T_1^0 = T_0 + qe^{x/l}, \quad G_x = G_1^0 = \text{const}_1, \quad G_y = 0, \\ \eta_1^0 = 0, \quad \rho_K^0 = \rho_0, \quad \rho_{\Pi}^0 = 0, \quad l = \lambda / c^0, \quad q = Qm^0 / c^0, \quad C^0 = u^0 C + c_r G^0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} x > 0: \quad T = T_2^0 = T_{\Phi}^0 = T_0 + q, \quad G_x = G_2^0 = \text{const}_2, \quad G_y = 0, \\ \eta_2^0 = \eta_{\Phi}^0, \quad \rho_K^0 = \rho_0 (1 - \eta_{\Phi}^0), \quad \rho_{\Pi}^0 = \mu_{\Pi} \rho_{\Pi} \eta_{\Phi}^0. \end{aligned}$$

Массовая скорость стационарного сгорания вещества  $m^0$ , пропорциональная глубине превращения во фронте реакции  $\eta_{\Phi}^0$ , определяется интегралом Зельдовича — Франк-Каменецкого

$$\rho_0 u^0 \eta_{\Phi}^0 = m^0 = \sqrt{2\lambda \rho_0 \Phi(T_{\Phi}^0) / Q}. \quad (7)$$

Величина  $C^0$  сохраняет свое значение при переходе через границу  $x = 0$  ( $\rho_r \ll \rho_k, \rho_r \ll \rho_n$ )

$$C^0 = \rho_0 c_1 u^0 + G_1^0 c_r = \rho_{k2} c_1 u^0 + \rho_{n2} c_2 u^0 + G_2^0 c_r,$$

тогда как потоки тепла и вещества в соответствии с принятой моделью источника терпят разрыв в зоне реакции

$$G_2^0 - G_1^0 = \mu_r m^0, \quad \lambda \frac{dT_1^0}{dx} \Big|_{x=0} - \lambda \frac{dT_2^0}{dx} \Big|_{x=0} = Qm^0. \quad (8)$$

### Анализ устойчивости

Для исследования устойчивости стационарных решений системы (1)–(5) к малым возмущениям зададим искривление фронта реакции в виде

$$\xi = \varepsilon e^{\omega t + iky},$$

где  $y$  — координата, тангенциальная к фронту;  $\omega$  — частота;  $k$  — волновое число;  $\varepsilon$  — амплитуда возмущения.

Нестационарные решения для  $T$ ,  $p$ ,  $G$  и скорости сгорания  $m(t)$  ищем в виде суммы стационарных распределений  $T^0(x)$ ,  $p^0(x)$ ,  $G^0(x)$ ,  $m^0$  и малых добавок, обусловленных возмущением фронта:

$$T = T^0(x) + T'(x) \exp(\omega t + iky), \quad p = p_1^0 + p'(x) \exp(\omega t + iky), \\ G = G^0 + G'(x) \exp(\omega t + iky), \quad m = m^0 + m' \exp(\omega t + iky).$$

Поля температур, давлений и потоков должны удовлетворять следующим условиям на поверхности нестационарного фронта (производные по нормали с точностью до квадратов амплитуды искривления фронта совпадают с производными по  $x$ ):<sup>1</sup>

$$x = \xi, \quad p_1 = p_2, \quad G_{2x} = G_{1x} + \mu_r m, \quad (9)$$

$$T_1 = T_2, \quad \lambda \cdot \partial T_1 / \partial x - \lambda \cdot \partial T_2 / \partial x = Qm. \quad (10)$$

Линеаризуя (3'), (4), (5), (9) относительно малых добавок и пренебрегая, как и в теплодиффузионной теории устойчивости пламени [9], зависимостью коэффициентов переноса (в данном случае проницаемости  $f = k_\Phi / 2R\sigma T$ ) от температуры, можно получить распределение возмущений потока и связь между амплитудами пульсаций расхода  $G'_1$ , массовой скорости горения  $m'$  и смещения фронта  $\varepsilon$ :

$$G'_{x1} = G'_1 \exp(kx + \omega t + iky), \quad (11)$$

$$k[G_2^0 - G_1^0 f_2 / f_1] \varepsilon = \mu_r m' + G'_1 (1 + f_2 / f_1), \quad (12) \\ f_i = k_\Phi i / 2R\sigma_i T_i^0, \quad i = 1, 2.$$

Соотношения (11), (12) справедливы лишь для искривления фронта с длиной волны много меньше размеров несгоревшей ( $l_1$ ) и сгоревшей ( $l_2$ ) областей, т. е. при выполнении неравенств  $kl_1 \gg 1$ ,  $kl_2 \gg 1$ .

В случае одномерных возмущений, т. е. плоских деформаций прогретого слоя из уравнения неразрывности (3') и (9) следует ( $G_v = 0$ ):

$$G_{x1} = \text{const}_1 (-l_1 < x < 0), \quad G_{x2} = \text{const}_2 (0 < x < l_2),$$

$$G_{x2} - G_{x1} = \mu_r m, \quad G'_{x2} - G'_{x1} = \mu_r m'.$$

<sup>1</sup> Непрерывность  $T$  и  $p$  в зоне реакции следует из конечности потоков тепла и вещества; разрыв градиентов во фронте определяется совместным интегрированием (1), (3), (4) по зоне реакции.

Последнее из выписанных соотношений с учетом граничных условий, определяемых схемой организации процесса фильтрационного горения, устанавливает связь между амплитудами возмущения скорости горения и расхода, заменяющую уравнение (12) в случае плоских деформаций фронта:

$$k = 0, \quad G'_1 = g_0 m' \mu_r. \quad (13)$$

Коэффициент  $g_0$  для основных схем фильтрационного горения соответственно равен:

1) вынужденная спутная фильтрация (задан поток газа вслед фронту горения)

$$G_{x2} \equiv G_2^0, \quad G'_{x2} = 0, \quad g_{01} = -1,$$

2) вынужденная встречная фильтрация (задан поток газа навстречу фронту горения)

$$G_{x1} \equiv G_1^0, \quad G'_{x1} = 0, \quad g_{02} = 0,$$

3) естественная спутная фильтрация (задано давление газа на внешней границе слоя продукта, граница области исходного вещества газонепроницаема)

$$G_{x1} = G'_{x1} = 0, \quad g_{03} = 0,$$

4) естественная встречная фильтрация (задано давление на внешней границе слоя исходного вещества, граница области продукта газонепроницаема)

$$G_{x2} = G'_{x2} \equiv 0, \quad g_{04} = -1,$$

5) фильтрация в условиях заданного перепада давления

$$G'_{xi} = \text{const}, \quad p'_1(x = -l_1) = p'_2(x = l_2) = 0, \quad g_{05} = -1/(1 + r_1/r_2), \\ r_1 = l_1/f_1, \quad r_2 = l_2/f_2.$$

Возмущение поля температур  $T'(x)$  определяется линеаризованным уравнением (1)

$$\lambda \frac{d^2 T'_i}{dx^2} - C^0 \frac{dT'_i}{dx} - (k^2 \lambda + c_1 \omega) T'_i = c_r G'_{xi} \frac{dT_i}{dx}, \quad i = 1, 2,$$

решением которого с учетом (11) являются затухающие на бесконечности функции

$$T'_1 = A_1 e^{z_1 x} \frac{c_r G'_1 q}{C^0 (\Omega - s/2)} e^{\frac{x}{l} (1+s/2)}, \quad T'_2 = A_2 e^{z_2 x}, \\ z_1 = \frac{4}{2l} [1 - \sqrt{1 + 4\Omega + s^2}], \quad z_2 = \frac{4}{2l} [1 - \sqrt{1 + 4\Omega(1 - \delta_r) + s^2}], \quad (14)$$

$$\Omega = \omega c_1 \lambda / (C^0)^2, \quad s = 2kl, \quad \delta_r = \mu_r c_r \eta_{\Phi}^0 / c_k, \quad c_1 = c_k \rho_0.$$

Удовлетворяя соотношениям (10) в зоне реакции и линеаризуя их относительно малых величин, имеем уравнения для определения констант  $A_1, A_2, \varepsilon, G'_1, m'$ :

$$\frac{A_2}{q} = \frac{A_1}{q} + \frac{\varepsilon}{l} - \frac{c_r G'_1}{C^0 (\Omega - s/2)}, \quad (15)$$

$$\frac{A_1}{q} l z_2 - \frac{c_r G'_1 (1 + s/2)}{C^0 (\Omega - s/2)} + \frac{\varepsilon}{l} = \frac{A_2}{q} z_2 l + Qm'. \quad (16)$$

Еще одно уравнение, связывающее неизвестные константы, можно получить, заметив, что главными членами уравнения (1) в зоне реакции

являются скорость тепловыделения  $Qw$  и производная  $\partial^2 T / \partial x^2$ . Интегралы от этих членов по зоне реакции конечны, тогда как результат интегрирования остальных членов не превышает квадрата амплитуды возмущения.

Решение уравнения

$$-\lambda \cdot \partial^2 T / \partial x^2 = Q\rho_0 \Phi(T_\Phi) \delta(T - T_\Phi) \quad (17)$$

определяет в линейном приближении распределение градиента  $\partial T / \partial x$  в зоне тепловыделения<sup>2</sup>. Воспользовавшись формальным правилом замены переменной

$$\delta(T - T_\Phi) = \delta(x - \xi) / |\partial T / \partial x|, \quad T_\Phi = T(\xi),$$

проинтегрируем верхнее уравнение по зоне реакции

$$x = \xi: \lambda \left[ \left( \frac{\partial T_1}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial T_2}{\partial x} \left| \frac{\partial T_2}{\partial x} \right| \right] = 2Q\rho_0 \Phi(T_\Phi). \quad (18)$$

Второй член в левой части равенства имеет второй порядок малости и должен быть опущен. Соотношение (18) заменяет используемое обычно предположение о квазистационарности скорости сгорания вещества в нестационарном фронте, которое не учитывает возмущения источника, обусловленные нестационарностью градиентов в зоне реакции<sup>3</sup>.

Подставляя в полученное уравнение (18) температурные распределения (14) и учитывая стационарные связи (6)–(8), имеем:

$$\frac{\varepsilon}{l} + \frac{A_1}{q} z_1 l - \frac{c_r G_1'}{C^0} \frac{1 + s/2}{\Omega - s/2} = k \frac{A_2}{q}, \quad k = \frac{\Phi'_r (T_\Phi^0 - T_0)}{2\Phi(T_\Phi^0)} = q \frac{d \ln m^0}{dT_\Phi^0}. \quad (19)$$

Температурный коэффициент скорости горения  $k$ , характеризующий нелинейные свойства волны горения, является одним из основных параметров, определяющих устойчивость стационарного распространения фронта реакции. Для реальных источников значение  $k$  может быть определено по экспериментальной либо теоретической зависимости  $m^0(T_\Phi^0)$ . В простейшем случае реакции нулевого порядка ( $w = k_0 e^{-E/RT}$ ) имеют вид

$$m^0 = \text{const} \sqrt[3]{e^{-E/\bar{R}T_\Phi^0} R (T_\Phi^0)^2 / E}, \quad k \simeq \frac{E (T_\Phi^0 - T_0)}{R (T_\Phi^0)^2} \left( 1 + 2 \frac{RT_\Phi^0}{E} \right).$$

Соотношения (12), (15), (16), (19) составляют систему уравнений для вычисления неизвестных коэффициентов  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_1'$ ,  $m'$ . Замыкающее эту систему уравнение определяется режимом распространения волны горения.

#### Кинетический режим распространения фильтрационной волны горения

В кинетическом режиме горения исходное конденсированное вещество полностью расходуется в зоне реакции ( $\eta_\Phi = \eta(x > \xi) = 1$ ), тогда как окислитель имеется по обе стороны от фронта и не лимитирует процесс. При нулевом порядке реакции по окислителю уравнение диффузии

<sup>2</sup> Во избежание недоразумений, связанных с кажущейся неопределенностью  $\partial T / \partial x$  при наличии  $\delta$ -источника, укажем, что это противоречие легко снимается, если учесть, что  $\delta$ -источник можно интерпретировать в виде ограниченной функции, локализованной в конечной, но сколь угодно малой области с непрерывным распределением температурного градиента. Отметим в этой связи, что результат (18) легко получить, аппроксимируя  $\delta$ -источник ступенчатой функцией, решая уравнение (17), а затем переходя к пределу бесконечно узкой зоны реакции.

<sup>3</sup> Исследование теплодиффузионной устойчивости ламинарного пламени с учетом граничного условия (18) проведено в работе [10].

отщепляется от общей системы и явно не участвует в дальнейшем анализе, ограничивая лишь область применимости результатов условием реализации кинетического режима горения [8]

$$G^0 a_0 > u^0 \rho_0 \mu,$$

где  $G^0$  — подаваемый в зону реакции расход газа;  $a_0$  — концентрация окислителя вдали от фронта.

Массовая скорость горения однозначно связана со скоростью продвижения фронта реакции  $u$  относительно несгоревшего вещества:

$$m = \rho_0 u, \quad u = -d\xi/dt, \quad m' = -\varepsilon \omega \rho_0. \quad (20)$$

Требование нетривиальной разрешимости системы однородных уравнений (12), (15), (16), (19), (20) приводит к дисперсионному соотношению

$$\begin{aligned} z_{20} - 2k(1 + \Omega_1) + z_{10} \left( \Omega_1 + k \frac{1 + g_2}{1 + g_1} \right) - z_{10} z_{20} \frac{1 + g_2}{2(1 + g_1)} &= 0, \\ \Omega_1 &= \frac{\Omega}{1 - g_1} \frac{C^0}{c_1 u^0}, \quad z_{10} = 1 + \sqrt{1 + 4\Omega + s^2}, \quad z_{20} = \\ &= 1 - \sqrt{1 + 4\Omega(1 - \delta_r) + s^2}, \\ g_1 &= g \frac{\delta_r(1 + s/2)\Omega}{(\Omega - s/2)}, \quad g_2 = g \frac{\delta\Omega}{\Omega - s/2}, \end{aligned} \quad (21)$$

При искривлениях фронта ( $s > 0$ ) величина  $g$  определяется выражением

$$g = - \frac{f_1 c_1 u^0}{2(f_1 + f_2) C^0 \Omega} \left\{ s + 2\Omega \frac{C^0}{c_1 u^0} + \frac{G_1^0}{\mu_r m^0} \left( 1 - \frac{f_2}{f_1} \right) s \right\}.$$

В случае одномерных возмущений уравнение (12) заменяется на (13). Вид дисперсионного соотношения (21) при этом не меняется, величина  $g$  зависит от схемы процесса горения и равна одному из значений, вычисленному ранее.

**Устойчивость плоской волны горения ( $s = 0$ ).** Проанализируем (21), ограничившись малыми значениями параметра  $\delta_r = \mu_r c_r / c_r$ , т. е. слабым поглощением (выделением) газа в реакции в расчете на грамм исходного вещества ( $|\mu_r| \ll 1$ ).

В линейном по  $\delta_r$  приближении уравнение (21) для частоты возмущения  $\Omega$  принимает вид ( $s = 0$ )

$$\begin{aligned} \Omega^2 + b_1 \Omega + b_2 &= 0, \\ b_1 &= -k_1^2 + k_1[(4\alpha - 1) - \alpha\delta_r] + \alpha(1 - \alpha) + \alpha^2\delta_r, \\ b_2 &= \alpha[k_1^2(\alpha - 1) + k_1\alpha], \quad k_1 = k - 1, \\ \alpha &= u_0(c_1 + c_r \mu_r \rho_0 g_{01}) / (u^0 c_1 + c_r G_1^0). \end{aligned} \quad (22)$$

Вместе с величиной  $g_{01}$  значение  $\alpha$  определяется не только характеристиками системы, но и режимом фильтрации. При естественной фильтрации, регулируемой потреблением газа в зоне реакции,  $\alpha = 1$  как для спутного ( $g_{03} = 0, G_1^0 = 0$ ), так и для встречного ( $g_{04} = -1, G_1^0 = -\mu_r m^0$ ) потоков окислителя.

Для вынужденной фильтрации ( $G_0$  — абсолютное значение задаваемого потока газа) при спутном течении имеем:

$$g_{01} = -1, \quad G_2^0 = -G_0, \quad G_1^0 = G_2^0 - \mu_r \rho_0 u^0, \quad \alpha = \alpha_1 = \frac{c_2 u^0}{c_2 u^0 - c_r G_0^0},$$



при встречном потоке

$$G_1^0 = G_0, \quad g_{02} = 0, \quad \alpha = \alpha_2 = c_1 u^0 / (c_1 u^0 + c_r G_0).$$

Учитывая связь между потоком окислителя и скоростью распространения фронта в кинетическом режиме, а также ограничение на параметр  $\alpha$ , связанное с кризисом горения во встречном потоке [8], укажем интервал изменения  $\alpha$  при спутной ( $\alpha_1$ ) и встречной ( $\alpha_2$ ) вынужденной фильтрации с заданным расходом  $G_0$

$$\alpha_1 > 1/(1 - \delta_\pi), \quad 1/(1 + \delta_0) > \alpha_2 > k_1/(1 + k_1),$$

$$\delta_\pi = c_r \mu / a_0 c_\pi \mu_\pi, \quad \delta_0 = c_r \mu / c_k a_0.$$

В условиях фиксированного перепада давления

$$g_0 = g_{05} = \frac{r_2}{r_1 + r_2}, \quad \alpha = \alpha_5 = \frac{1 - \frac{c_r \mu_r p_0 r_2}{c_1 (r_1 + r_2)}}{1 + c_r G_1^0 / u_0 c_1}.$$

Выражая  $G_1^0$  через давления  $p_{10}$  и  $p_{20}$  на внешних границах пористой среды с учетом разрыва потоков на фронте горения

$$G_1^0 = (p_{10}^2 - p_{20}^2 - r_2 \mu_r m^0) / (r_1 + r_2),$$

окончательно получим

$$\alpha = \alpha_5 = \frac{1 - \frac{\delta_r r_2}{r_1 + r_2}}{1 - \frac{\delta_r r_2}{r_1 + r_2} + \frac{p_{10}^2 - p_{20}^2}{r_1 + r_2} \cdot \frac{\delta_r}{m^0}}.$$

Как и при заданном расходе, встречному течению ( $p_{10} > p_{20}$ ) отвечают значения  $\alpha < 1$ , спутному течению ( $p_{10} < p_{20}$ ) —  $\alpha > 1$ .

Подставляя в (22)  $\Omega = i\psi$ , имеем уравнение, определяющее границу устойчивого ( $k < k^*$ ) горения

$$(k_1^*)^2 - k_1^* [(4\alpha - 1) - \alpha \delta_r] - [\alpha(1 - \alpha) + \alpha^2 \delta_r] = 0.$$

Для больших значений  $k^*$  можно приближенно полагать

$$k^* = k_1^* + 1 \approx \alpha(4 - \delta_r).$$

При вынужденной фильтрации спутный поток ( $\alpha = \alpha_1 > 1$ ) стабилизирует, а встречный ( $\alpha = \alpha_2 < 1$ ) дестабилизирует фронт горения. При естественной фильтрации направление потока не оказывает влияния на устойчивость горения ( $\alpha_3 = \alpha_4 = 1$ ). Область стационарных режимов расширяется для реакций с газопоглощением ( $\delta_r < 0$ ) и сужается при выделении газа во фронте ( $\delta_r > 0$ ). Переход через критическое значение  $k = k^*$  в неустойчивую область ( $k > k^*$ ) сопровождается колебаниями температуры и скорости горения с частотой

$$\psi = \sqrt{(k - 1)^2 \alpha (\alpha - 1) + (k - 1) \alpha^2}.$$

Экспоненциальное развитие неустойчивости ( $\text{Im } \Omega = 0$ ) начинается при значениях  $k$ , больших  $k^{**}$ , определяемых уравнением

$$\Delta = b_1^2 (k^{**}) - 4b_2 (k^{**}) = 0.$$

Пульсирующий характер распространения фронта при этом сохраняется, как показывают численные расчеты нестационарного горения безгазовых систем в аналогичной ситуации [11–13]. При  $\alpha = 1/(k - 1)$  один из корней характеристического уравнения (22) обращается в нуль. Одно-

временно теряются стационарные решения системы (1)–(5), т. е. наступает срыв горения [8].

**Устойчивость фронта горения к искривлениям** с длиной волны, много большей толщины прогретого слоя ( $s \rightarrow 0$ ), определяется тем же уравнением (22), что и устойчивость плоского фронта. Различие между двумя этими случаями заключается в значении величины  $\alpha$ . В случае длинноволновых искривлений ( $s \rightarrow 0$ )

$$g = g_{s0} = -f_1/(f_1 + f_2), \quad \alpha_{s0} = \frac{c_1 u^0}{C^0} \left( 1 - \frac{f_1}{f_1 + f_2} \delta_r \right).$$

Характер потери устойчивости стационарного горения определяется отношением  $\alpha_{s0}/\alpha$ , зависящим от параметра  $\delta_r$  и режима фильтрации.

При спутной естественной и встречной вынужденной фильтрации газа

$$\alpha_{s0}/\alpha = 1 - f_1 \delta_r (f_1 + f_2)^{-1}.$$

Поскольку увеличение  $\alpha$  приводит к повышению устойчивости, то в рассматриваемых случаях дестабилизация волны начинается с колебаний плоского фронта при  $\delta_r > 0$  (газовыделения) и с искривлений поверхности бегущими волнами при  $\delta_r < 0$ . При спутной вынужденной и встречной естественной фильтрации

$$\alpha_{s0}/\alpha = [1 - f_1 \delta_r (f_1 + f_2)^{-1}] (1 - \delta_r)^{-1}$$

ситуация, противоположная предыдущей, — газовыделение во фронте приводит к двумерной, поглощение газа — к одномерной неустойчивости. При заданном перепаде давления характер потери устойчивости определяется не только величиной  $\delta_r$ , но и отношением размеров сгоревшей и несгоревшей областей

$$\alpha_{s0}/\alpha = [1 - f_1 \delta_r (f_1 + f_2)^{-1}] [1 - \delta_r f_1 l_2 (f_1 l_2 + f_2 l_1)^{-1}].$$

Начальному этапу горения в спутном потоке ( $l_2 < l_1$ ) отвечает двумерная неустойчивость при  $\delta_r > 0$  и одномерная неустойчивость при  $\delta_r < 0$ . Во встречном потоке закономерность обратная.

**Спектр инкрементов.** При одинаковых проницаемостях  $f_1 = f_2$  и пренебрежимо малом газовыделении во фронте реакции ( $\mu_r = 0$ ) можно построить спектр инкрементов возмущений с различными длинами волн. Дисперсионное соотношение (21) в этом случае приводится к виду

$$\begin{aligned} \Omega^3 + B_2 \Omega^2 + B_1 \Omega + B_0 &= 0, \\ B_2 &= -k_1^2 + k_1 [(4\alpha - 1)] + \alpha (1 - \alpha) + s^2/4, \\ B_1 &= k_1^2 (\alpha - 1) \alpha + k_1 \alpha (s^2 + \alpha) - \frac{\alpha s^2}{4} (2\alpha - 1), \\ B_0 &= \frac{\alpha^2 s^2}{4} \left( k_1^2 + k_1 - \frac{s^2}{4} \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Уравнение (23) анализировалось численно. Как и в случае безгазовых систем [10, 11, 14], при наличии искривлений потеря устойчивости фильтрационного фронта горения наступает при меньших значениях  $k$ , чем в плоском фронте — зависимость  $k^*(s)$  имеет слабый минимум (рис. 1).

Спектр инкрементов  $\Omega(s^2, k)$  при различных значениях  $\alpha$  представлен на рис. 2. Характер спектра является общим для всех трех случаев. Потеря устойчивости начинается с возбуждения длинных (на порядок больше прогретого слоя) бегущих волн на поверхности горения. При уда-



лении от предела устойчивости быстро нарастает инкремент плоских возмущений фронта. Вблизи границы экспоненциальной неустойчивости скорость развития автоколебаний плоского фронта лишь незначительно меньше скорости нарастания искривлений.

В условиях практического равенства инкрементов двух гармоник квазиустановившийся режим горения может оказаться весьма чувствительным к характеру начального возмущения фронта. Можно предположить, что возмущения с основной модой в виде плоской деформации волны горения (что обычно имеет место при зажигании) приведут к одномерным пульсациям фронта [12], тогда как преобладание амплитуды быстрорастущего искривления в спектре начального возмущения вызовет бегущие волны на поверхности горения [15].

При протяженности фронта  $l_\phi$  меньше критической  $l_*(k) = 4\pi l s_*^{-1}(k)$ , где  $s_*$  отвечает границе неустойчивых искривлений для заданного значения  $k$  (см. рис. 2, а),  $l$  — толщина прогретого слоя, нестационарность реализуется в виде синфазных по сечению фронта автоколебаний, так как искривления затухают. С увеличением размера  $l_\phi > l_*$  при соответствующем начальном искривлении фронта возможно появление волн, бегущих по поверхности горения. Наличие в спектре возмущений искривления с максимальной скоростью роста должно приводить к последовательному возрастанию числа бегущих волн при увеличении протяженности фронта.

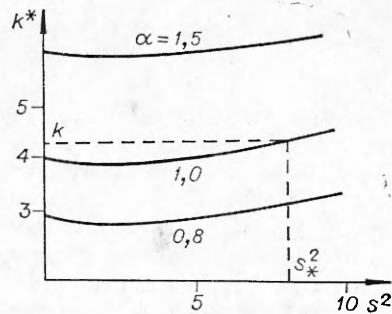


Рис. 1. Зависимость критического значения  $k^*$  от волнового числа для кинетического режима горения  $\delta_r = 0$ . При  $s > s_*(k)$  искривления затухают, плоский фронт ( $s=0$ ) неустойчив.

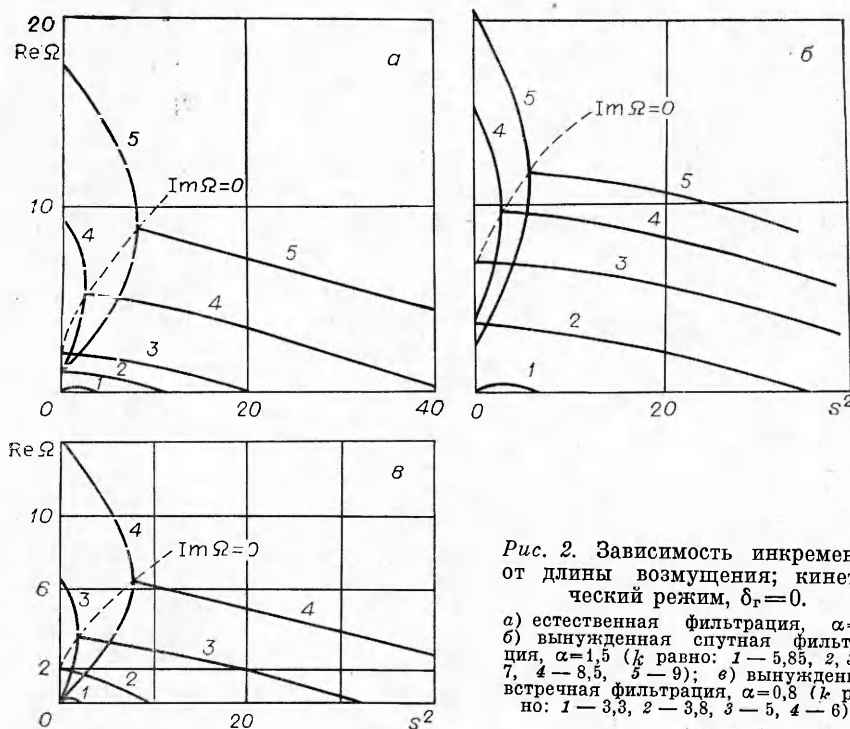


Рис. 2. Зависимость инкремента от длины возмущения; кинетический режим,  $\delta_r = 0$ .

а) естественная фильтрация,  $\alpha=1$ ; б) вынужденная спутная фильтрация,  $\alpha=1,5$  ( $k$  равно: 1 — 5,85, 2 — 7, 3 — 8,5, 4 — 9); в) вынужденная встречная фильтрация,  $\alpha=0,8$  ( $k$  равно: 1 — 3,3, 2 — 3,8, 3 — 5, 4 — 6).

### Устойчивость фильтрационного режима распространения волны горения в пористой среде

При фильтрационных режимах горения в зоне реакции полностью расходуется газообразный окислитель и скорость выгорания конденсированного вещества лимитируется подводом газообразного реагента.

Необходимое для замыкания системы (12), (15), (16), (19) уравнение получим, составляя баланс потоков окислителя в зоне реакции. При больших по сравнению с диффузионными скоростями фильтрации ( $v/v_0 \sim \sim lG_0/D\rho \gg 1$ ,  $l$  — масштаб зоны фильтрации) можно не учитывать диффузионные процессы, локализованные в узком пограничном слое вблизи зоны реакции, рассматривая последнюю как поверхность разрыва концентрации. Опуская в уравнении (2) диффузионные члены и интегрируя его совместно с (3), (4) в окрестности зоны реакции, получим балансные соотношения на нестационарном фронте

$$x = \xi: m = \mu^{-1}(G_1 a_1 - G_2 a_2), \quad m = \rho_0 u|_{\Phi}, \\ m = \mu_r^{-1}(G_2 - G_1). \quad (24)$$

Концентрации окислителя перед фронтом реакции ( $a_1$ ) и за ним ( $a_2$ ) связаны условием полного потребления газообразного реагента  $a_1 a_2 = 0$ . Ненулевое значение концентрации соответствует содержанию окислителя  $a_0$  в исходной смеси. Исключая из уравнений (24) величину  $G_2$  и линеаризуя получающееся соотношение между скоростью выгорания  $m$  и потоком  $G_1$ , получим недостающее для замыкания системы (12), (15), (16), (19) уравнение

$$m' = G_1' \mu_r \frac{a_1 - a_2}{\mu_r a_2 + \mu}. \quad (25)$$

Подставляя (25) в (12), имеем

$$G_1' = \xi l^{-1} s [G_2^0 - G_1^0 (f_2/f_1)] / \left[ (f_2/f_1) + \frac{\mu_r a_1 + \mu}{\mu_r a_2 + \mu} \right]. \quad (26)$$

Уравнение (26) допускает предельный переход от двумерных к одномерным ( $s = 0$ ) возмущениям. Тот же результат ( $G_1'(s = 0) = 0$ ) получается при непосредственном анализе одномерной устойчивости.

Дисперсионное соотношение, утверждающее нетривиальную разрешимость системы однородных уравнений (15), (16), (19), (25), (26), имеет вид:

$$2k[1 - \beta s - z_1(1 - \beta_3)] = z_{10}(\beta_2 s - \beta s) + z_{20}(1 - \beta_2 s) - 0.5 z_{10} z_{20} \cdot (1 - \beta_3), \\ \beta = \beta_0 \left( 1 + \beta_1 \frac{1 + s/2}{\Omega - s/2} \right), \quad \beta_2 = \beta_0 \beta_1 \frac{1 + s/2}{\Omega - s/2}, \quad \beta_3 = \beta_2 s / (1 + s/2), \quad (27) \\ \hat{\rho}_0 = \frac{1}{2} \frac{1 + G_1^0 (1 - f_2/f_1) (\mu_r m^0)^{-1}}{1 + (1 + f_2/f_1) \frac{\mu_r a_2 + \mu}{\mu_r (a_1 - a_2)}}, \quad \beta_1 = \frac{c_r q \mu_r a_2 + \mu}{Q \frac{a_1 - a_2}{\mu_r}}.$$

При  $s = 0$  существует единственный корень уравнения  $\Omega = 0$ , указывающий, что плоский фронт горения всегда устойчив с точностью до сдвига.

Устойчивость фронта относительно искривлений определяется параметром  $\beta$ , характеризующим условия подачи окислителя в зону реакции, и величиной  $\beta_1$ , определяющей теплофизическое воздействие газового потока на искривление фронта. Приведем значения параметров  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  для различных схем процесса горения в случае отсутствия газообразных продуктов реакции ( $\mu_r = -\mu$ ):

1) естественная встречная фильтрация ( $G_2^0 = 0$ ,  $a_2 = 0$ ,  $a_1 = 1$ ):

$$\beta_0 = -1/2, \beta_1 = \delta_r/(1 + \delta_r), \delta_r = \mu c_r \eta_{\Phi}^0 / c_k,$$

2) естественная спутная фильтрация ( $G_1^0 = 0$ ,  $a_2 = 1$ ,  $a_1 = 0$ ):

$$\beta_0 = 1/2, \beta_1 = 0,$$

3) вынужденная встречная фильтрация ( $a_2 = 0$ ,  $a_1 = a_0$ ,  $f_1 = f_2$ ):

$$\beta_0 = -a_0/2(2 - a_0), \beta_1 = \delta_r/(a_0 + \delta_r),$$

4) вынужденная спутная фильтрация ( $a_1 = 0$ ,  $a_2 = a_0$ ,  $f_1 = f_2$ ):

$$\beta_0 = a_0/2(2 - a_0), \beta_1 = \delta_r(1 - a_0)/[\delta_r(1 - a_0) - a_0].$$

Уравнение (27) имеет вещественные корни. Подстановка в выражения для  $z_{10}$ ,  $z_{20}$  значения  $\Omega = 0$  дает связь между параметрами волны на границе устойчивости. При малых  $\delta_r$  (теплоемкость газа незначительна) основным параметром, определяющим устойчивость, является  $\beta_0$ .

На рис. 3 приведены критические значения температурного коэффициента  $k^*$  на пределе устойчивости фронта горения к искривлениям масштаба  $s$  при различных значениях параметра  $\beta_0$ . Области неустойчивости ( $\Omega > 0$ ,  $k > k^*$ ) существуют лишь в случае отрицательных значений  $\beta_0$ ; при  $\beta_0 \geq 0$  фронт горения устойчив не только к плоским деформациям, но и к искривлениям.

При  $\beta_1 = 0$  ( $\delta_r = 0$ ) частота возмущений  $\Omega$  определяется выражением

$$\Omega_{1,2} = 0,25(-b \pm 2f\sqrt{(k - \beta s)^2 - 4\beta s(k - 1)}),$$

где  $b = 1 + s^2 + (2k - 1)(2\alpha s - 1) - 2f^2$ ,  $f = 1 + \beta s - k$ .

Зависимость инкремента от длины волны возмущения в области неустойчивости имеет резкий максимум (рис. 4) при определенном масштабе искривления  $\bar{\lambda}_m(k)$ , выраженном в единицах прогретого слоя стационарной волны горения ( $l$ ). По аналогии с теплодиффузионным пламенем при  $L > 1$ , имеющим подобный спектр инкрементов, для неустойчивых фильтрационных режимов ( $\beta_0 < 0$ ) следует ожидать формирования ячейки структуры в волне горения с характерным масштабом  $\bar{l}_m = \bar{\lambda}_m l$  [16].

Результаты приведенного анализа подтверждаются имеющимися численными решениями системы нестационарных уравнений фильтрационного горения (1)–(5) в одномерной постановке [17, 18]. Двумерные задачи фильтрационного горения численно не исследовались.

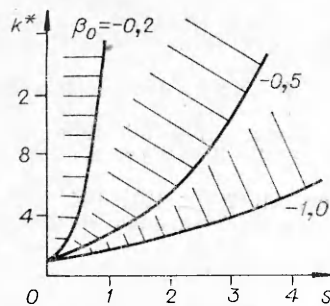


Рис. 3. Границы устойчивости  $k^*(s)$  при различных  $\beta_0$ . Фильтрационный режим;  $\delta_r = 0$ . Области неустойчивого горения ( $k > k^*$ ) заштрихованы.

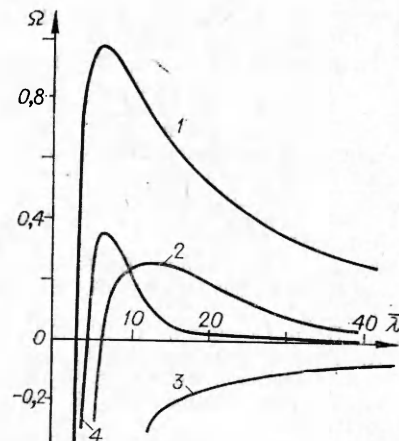


Рис. 4. Зависимость частоты  $\Omega$  от длины возмущения  $\lambda$ . Фильтрационный режим:  $\delta_r = 0$ ;  $\beta_0 = -1$  (1),  $-0,5$  (2, 4),  $0$  (3);  $k = 5$  (1–3),  $10$  (4).

\*   \*  
\*

Представляет интерес сопоставить выводы приведенного анализа с результатами работы [19], опубликованной после написания настоящей статьи. Приведенный в [19] расчет обобщает коротковолновую [4] и длинноволновую [20] асимптотики исследования устойчивости фильтрационного горения для одного из рассмотренных выше вариантов процесса — при встречной естественной фильтрации окислителя. По некоторым пунктам результаты [19], полученные в предположении квазистационарности скорости волны горения, существенно расходятся с выводами данного анализа.

Для кинетического режима распространения в обоих случаях сделан вывод о колебательной неустойчивости фронта реакции, однако заключение [19] о дестабилизирующей роли газового потока (для одномерных и двумерных возмущений) противоречит как результатам приведенного выше расчета устойчивости, так и результатам численного эксперимента [5, 17].

Противоположные выводы получены и по вопросу об устойчивости к искривлениям фронта реакции с неполным выгоранием твердого реагента. В отличие от заключения [19] об устойчивости такого режима в данной работе делается вывод об абсолютной неустойчивости плоской волны горения с неполным превращением пористого реагента. Отметим в этой связи экспериментальные данные, приведенные в [21]. При встречной фильтрации окислителя в режимах неполного превращения наблюдалась неравномерность выгорания твердого реагента по сечению образца. При спутной фильтрации окислителя неоднородностей во фронте не наблюдалось. Такая картина находится в полном соответствии с приведенными результатами анализа устойчивости.

Авторы благодарят А. Г. Мержанова за интерес к работе.

*Поступила в редакцию  
20/XII 1980*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Мержанов, А. К. Филоненко, И. П. Боровинская. Докл. АН СССР, 1973, 208, 4, 305.
2. А. К. Филоненко, В. И. Вершинников. ФГВ, 1975, 11, 3, 353.
3. А. О. Богопольский, Я. А. Шарифов. ФГВ, 1976, 12, 1, 9.
4. А. Д. Лебедев, Г. С. Сухов, Л. П. Ярин. ФГВ, 1976, 12, 6, 879.
5. А. П. Алдушин, Б. С. Сеплярский. Теория фильтрационного горения пористых металлических образцов. Препринт, Черноголовка, 1977.
6. А. Г. Мержанов, И. П. Боровинская, Ю. Е. Володин. Докл. АН СССР, 1972, 206, 4, 905.
7. А. П. Алдушин, А. Г. Мержанов, Б. И. Хайкин. Докл. АН СССР, 1974, 215, 3, 612.
8. А. П. Алдушин, Б. С. Сеплярский. Докл. АН СССР, 1978, 241, 1, 72.
9. Г. И. Баренблатт, Я. Б. Зельдович, А. Г. Истратов. ПМТФ, 1962, 4, 21.
10. А. П. Алдушин, С. Г. Каспарян. Докл. АН СССР, 1979, 244, 1, 67.
11. А. П. Алдушин, С. Г. Каспарян. Теплодиффузионная неустойчивость волны горения. Препринт, Черноголовка, 1978.
12. К. Г. Шкадинский, Б. И. Хайкин, А. Г. Мержанов. ФГВ, 1971, 7, 1, 19.
13. А. П. Алдушин, Т. М. Мартемьянова и др. ФГВ, 1973, 9, 5, 613.
14. Г. М. Махвиладзе, Б. В. Новожилов. ПМТФ, 1971, 5, 51.
15. Т. П. Ивлева, А. Г. Мержанов, К. Г. Шкадинский. Докл. АН СССР, 1978, 239, 5, 1086.
16. А. П. Алдушин, С. Г. Каспарян. Докл. АН СССР, 1979, 274, 5, 1112.
17. Б. С. Сеплярский, А. П. Алдушин. — В сб.: Химическая физика процессов горения и взрыва. Горение конденсированных систем. Черноголовка, 1977.

18. А. П. Алдушин, Б. С. Сеплярский, К. Г. Шкадинский. ФГВ, 1980, 16, 1, 36.
19. Г. С. Сухов, Л. П. Ярин. ФГВ, 1980, 16, 3, 34.
20. А. Д. Лебедев, Г. С. Сухов, Л. П. Ярин. ФГВ, 1977, 13, 1, 10.
21. А. Н. Питюлин. Канд. дис. ОИХФ АН СССР, 1980.

## ГОРЕНИЕ ГАЗОВЗВЕСЕЙ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ПОРОШКОВ (ТРЕХЗОННАЯ МОДЕЛЬ)

*В. М. Кудрявцев, А. В. Сухов, А. В. Воронежский, А. П. Шпара*  
(Москва)

В последние годы проводятся интенсивные исследования воспламенения и горения газовзвесей металлических порошков. Знание закономерностей этих процессов важно для ряда отраслей народного хозяйства. Несмотря на актуальность данной проблемы, многие задачи еще не решены.

Как правило, в реальных процессах воспламенение и горение газовзвесей металлических порошков протекает при высоких давлениях, а влияние давления на характеристики горения, как следует из экспериментальных данных, имеет ряд особенностей, некоторые из которых не поддаются объяснению с позиций имеющихся моделей. Кроме того, существующие методики расчета не позволяют описать процессы воспламенения и горения газовзвесей частиц в рамках единой модели, что приводит к существенным погрешностям, особенно при расчетах переходных режимов, стадии формирования фронта пламени и так далее.

Данная работа посвящена аналитическому исследованию процессов воспламенения и горения газовзвесей частиц металлов. Рассмотрим основные положения предлагаемой модели. Принимается, что частицы имеют одинаковый начальный размер, расстояние между ними в процессе воспламенения и горения остается неизменным, процессы тепло- и массообмена обладают сферической симметрией, квазистационарны и протекают в пределах приведенной пленки.

Макропроцесс воспламенения и горения газовзвеси частиц металла рассматривается как сумма микропроцессов воспламенения и горения отдельных частиц металла. Это позволяет свести расчет газовзвеси в целом к расчету отдельной частицы в ее составе, для чего вводится понятие «условного» объема, которое определяется как объем газовой среды, приходящийся на одну частицу. Отличительная особенность модели состоит в том, что понятие «условного» объема используется не только на стадии воспламенения, как это сделано в работе [1], а распространено и на стадию горения.

Таким образом, согласно определению «условного» объема, его радиус можно рассчитать по следующей зависимости:

$$r_y = r_{s0} \sqrt[3]{\frac{\rho_m}{\rho_{23}} \frac{1 - \eta_m}{\eta_m} + 1}.$$

Здесь  $r$  — радиус;  $\rho$  — плотность;  $\eta$  — относительная массовая концентрация металлического порошка в газовзвеси; индексы:  $y$  — «условный» объем,  $s$  — поверхность частицы,  $m$  — конденсированный металл,  $0$  — начальное значение параметра.