ПМТФ, № 1, 1974

УДК 532.5 : 532.135

МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ ГАЗОНАПОЛНЕННОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ В ВЯЗКОУПРУГИХ ПОЛИМЕРНЫХ СРЕДАХ

С. П. Левицкий, А. Т. Листров

(Воронеж)

Механическое поведение полимерных материалов характеризуется рядом особенностей, которые на феноменологическом уровне находят описание в рамках усложненных континуальных моделей [1-3]. К числу таких особенностей прежде всего относится различного рода проявления вязкоупругости, учет которой необходим при анализе процессов течения и деформирования полимеров.

В настоящей работе исследуются малые колебания газонаполненной сферической полости в вязкоупругой полимерной среде, описываемой восьмиконстантным реологическим уравнением [3]. Получено точное решение уравнения малых колебаний полости и изучено влияние реологических параметров среды на характер колебаний. Рассмотренная задача представляет, в частности, интерес в связи с проблемами акустической кавитации в водных растворах полимеров [4-6].

Восьмиконстантное реологическое уравнение [3], используемое для описания механического поведения ряда полимерных сред, имеет вид

$$\tau_{ik}+\lambda_1\frac{D\tau_{ik}}{Dt}+\mu_0\tau_{jj}e_{ik}-\mu_1(\tau_{ij}e_{jk}+\tau_{jk}e_{ij})+\nu_1\tau_{jn}e_{jn}\delta_{ik}=\tag{1}$$
$$=2\eta_0\left(e_{ik}+\lambda_2\frac{De_{ik}}{Dt}-2\mu_2e_{ij}e_{jk}+\nu_2e_{jn}e_{jn}\delta_{ik}\right)$$
$$\tau_{ik}=p_{ik}+p\delta_{ik},\qquad e_{ik}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i}+\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right),\quad \omega_{ik}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i}-\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right)$$
$$\frac{D\tau_{ik}}{Dt}=\frac{\partial\tau_{ik}}{\partial t}+v_j\frac{\partial\tau_{ik}}{\partial x_j}+\omega_{ij}\tau_{jk}+\omega_{kj}\tau_{ij}$$

Здесь p_{ik}, e_{ik} и ω_{ik} — соответственно тензор напряжений, тензор скоростей деформаций и тензор вихря; p — изотропное давление; v_i — проекции вектора скорости на координатные оси x_i; λ_1, λ_2, μ_0, μ_1, μ_2, η_0, ν_1, ν_2 — реологические константы; D/Dt — производная Яуманна.

Рассмотрим малые радиальные колебания газонаполненной сферической полости радиуса R в неограниченной несжимаемой вязкоупругой среде (1) с плотностью ρ. Введем сферическую систему координат r, θ, φ с началом в центре полости. Полагая течение сферически симметричным, из уравнения неразрывности

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2v_r)=0\tag{2}$$

находим

$$v_r=R^2\dot{R}r^{-2},\qquad \dot{R}=dR/dt\tag{3}$$

Запишем проекцию на ось r уравнения движения сплошной среды в напряжениях

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)=-\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\partial\tau_{rr}}{\partial r}+\frac{2(\tau_{rr}-\tau_{\varphi\varphi})}{r}\tag{4}$$

Здесь учтено, что в силу сферической симметрии $\tau_{\varphi\varphi} = \tau_{\theta\theta}$. Интегрируя уравнение (4) по r от R до ∞ с учетом (3) и переходя к новой переменной $y = {}^1/_3\,(r^3 - R^3)$, получим уравнение движения границы полости в виде

$$\rho\,(R\ddot{R} + {}^3/_2\dot{R}^2) = p\,(R) - p\,(\infty) + \tau_{rr}\,(\infty) - \tau_{rr}\,(R) + + 2\int\limits_0^\infty \frac{\tau_{rr} - \tau_{\varphi\varphi}}{3y + R^3}\,dy \tag{5}$$

В (5) через $\tau_{rr}\,(R)$, $p\,(R)$ и $\tau_{rr}\,(\infty)$, $p\,(\infty)$ обозначены напряжение и давление на поверхности полости и на бесконечности соответственно.

Для $p\,(R)$ имеем граничное условие [4]

$$p\,(R) = p_1\,(R) - 2\sigma R^{-1} + \tau_{rr}\,(R), \quad p_1\,(R) = p_{10}\,(R_0 R^{-1})^{3k} \tag{6}$$

где $p_1\,(R)$ и p_{10} — давление газа внутри полости в произвольный и начальный моменты времени соответственно, R_0 — начальный радиус полости, σ — коэффициент поверхностного натяжения, k — показатель политропы. Величина p_{10} определяется из условия равновесия полости под действием давления p_∞ в начальный момент времени

$$p_{10} = p_\infty + 2\sigma R_0^{-1} \tag{7}$$

Выпишем уравнения для τ_{rr} и $\tau_{\varphi\varphi}$. Подставляя (3) в (1) и переходя к переменной y, получим

$$\begin{gathered}
\lambda_1 \frac{\partial\tau_{rr}}{\partial t} + \tau_{rr} + (4\mu_1 - 2\mu_0 - 2\nu_1)\frac{R^2\dot{R}}{3y + R^3}\,\tau_{rr} + \\
+ (2\nu_1 - 4\mu_0)\,\frac{R^2\dot{R}}{3y + R^3}\,\tau_{\varphi\varphi} = -\,4\eta_0\left[\frac{R^2\dot{R}}{3y + R^3} + \lambda_2\,\frac{2R\dot{R}^2 + R^2\ddot{R}}{3y + R^3} + \right. \\
\left. + (4\mu_2 - 3\nu_2 - 3\lambda_2)\frac{R^4\dot{R}^2}{(3y + R^3)^2}\right] \\
\lambda_1 \frac{\partial\tau_{\varphi\varphi}}{\partial t} + \tau_{\varphi\varphi} + (2\mu_0 - 2\mu_1 + 2\nu_1)\,\frac{R^2\dot{R}}{3y + R^3}\,\tau_{\varphi\varphi} + \\
+ (\mu_0 - 2\nu_1)\,\frac{R^2\dot{R}}{3y + R^3}\,\tau_{rr} = 2\eta_0\left[\frac{R^2\dot{R}}{3y + R^3} + \lambda_2\,\frac{2R\dot{R}^2 + R^2\ddot{R}}{3y + R^3} - \right. \\
\left. - (2\mu_2 - 6\nu_2 + 3\lambda_2)\,\frac{R^4\dot{R}^2}{(3y + R^3)^2}\right]
\end{gathered} \tag{8}$$

Представим $p\,(\infty)$ в виде

$$p\,(\infty) = p_\infty - p_0 \sin \omega t \tag{9}$$

где $p_0\,/\,p_\infty \ll 1$. Под действием периодически изменяющегося давления полость начнет совершать малые радиальные колебания вблизи положения равновесия. Полагая $R = R_0 + \Delta R$, где ΔR — малое отклонение радиуса от величины R_0, проведем линеаризацию уравнений (5) и (8). В результате получим следующую систему линейных уравнений для определения ΔR и τ_{rr}:

$$\begin{gathered}
\rho R_0 \frac{d^2\,(\Delta R)}{dt^2} + \frac{3k}{R_0}\left[p_\infty + \frac{2\sigma}{R_0}\left(1 - \frac{1}{3k}\right)\right]\Delta R = \\
= p_0 \sin \omega t + 3\int\limits_0^\infty \frac{\tau_{rr}}{3y + R_0{}^3}\,dy, \qquad \tau_{\varphi\varphi} = -\,\frac{1}{2}\,\tau_{rr}
\end{gathered} \tag{10}$$

$$\lambda_1\,\frac{\partial\tau_{rr}}{\partial t} + \tau_{rr} = -\,\frac{4\eta_0 R_0{}^2}{3y + R_0{}^3}\left(\frac{d\,(\Delta R)}{dt} + \lambda_2\,\frac{d^2\,(\Delta R)}{dt^2}\right) \tag{11}$$

Начальные условия имеют вид

$$\Delta R = d(\Delta R) / dt = \tau_{rr} = 0 \quad \text{при } t = 0$$

Решение системы (10), (11) построим с помощью операционного исчисления [7]. Применяя к уравнениям системы преобразование Лапласа, находим выражение для изображения ΔR

$$\Delta R^* = \gamma(\lambda_1^{-1} + s)[(s^2 + \omega^2)(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)]^{-1} \tag{12}$$

Здесь s — комплексная переменная преобразования Лапласа; s_1, s_2, s_3 — корни кубического уравнения

$$s^3 + as^2 + bs + c = 0 \tag{13}$$

$$a = \lambda_1^{-1} + 2\alpha\lambda_2\lambda_1^{-1}, \quad b = \beta + 2\alpha\lambda_1^{-1}, \quad c = \beta\lambda_1^{-1}$$

$$\alpha = 2\eta_0(\rho R_0^2)^{-1}, \quad \gamma = p_0\omega(\rho R_0)^{-1}$$

$$\beta = 3k[p_\infty + 2\sigma R_0^{-1}(1 - (3k)^{-1})](\rho R_0^2)^{-1}$$

Используя формулы Кардано, запишем решение уравнения (13) в виде

$$s_1 = A + B - a/3, \quad s_{2,3} = -{}^1/_2(A + B) \pm i\sqrt{3}(A - B) / 2 - a/3 \tag{14}$$

$$A = \sqrt[3]{-u/2 + \sqrt{Q}}, \quad B = \sqrt[3]{-u/2 - \sqrt{Q}}, \quad Q = (\vartheta/3)^3 + (u/2)^2$$

$$u = 2(a/3)^3 - ab/3 + c, \quad v = -{}^1/_3 a^2 + b$$

Применяя теперь к соотношению (12) обратное преобразование Лапласа, находим выражение для ΔR. В зависимости от знака величины Q возможны следующие три случая.

1. $Q > 0$. Уравнение (13) имеет один вещественный корень (s_1) и два комплексно-сопряженных корня (s_2 и s_3). Представляя $s_{2,3}$ в виде $s_{2,3} = \delta \pm i\mu$, получим

$$\begin{aligned}\Delta R = {} & \gamma\omega^{-1}D\sin(\omega t + \alpha_1) + \frac{\gamma e^{\delta t}\sin(\mu t + \alpha_2)}{\mu[4\delta^2\mu^2 + (\delta^2 - \mu^2 + \omega^2)^2]^{1/2}} + \\ & + \frac{\gamma(\lambda_1^{-1} + s_1)e^{\delta t}\sin(\mu t + \alpha_3)}{\mu[\mu^2(3\delta^2 - \mu^2 + \omega^2 - 2\delta s_1)^2 + [(\delta - s_1)(\delta^2 + \omega^2 - \mu^2) - 2\delta\mu^2]^2]^{1/2}} + \\ & + \frac{\gamma(\lambda_1^{-1} + s_1)e^{s_1 t}}{(s_1^2 + \omega^2)(s_1^2 - 2\delta s_1 + \delta^2 + \mu^2)}\end{aligned} \tag{15}$$

$$D = \left\{\frac{[\omega(\omega^2 - b) + (s_1 + \lambda_1^{-1})2\omega\delta]^2 + [(a\omega^2 - c) + (\lambda_1^{-1} + s_1)(\omega^2 - \delta^2 - \mu^2)]^2}{[4\omega^2\delta^2 + (\omega^2 - \delta^2 - \mu^2)^2][\omega^2(\omega^2 - b)^2 + (a\omega^2 - c)^2]}\right\}^{1/2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = -\frac{2\omega\delta[\omega^2(\omega^2 - b)^2 + (a\omega^2 - c)^2] + (s_1 + \lambda_1^{-1})\omega(\omega^2 - b)[4\omega^2\delta^2 + (\omega^2 - \delta^2 - \mu^2)^2]}{(\omega^2 - \delta^2 - \mu^2)[\omega^2(\omega^2 - b)^2 + (a\omega^2 - c)^2] + (s_1 + \lambda_1^{-1})(a\omega^2 - c)[4\omega^2\delta^2 + (\omega^2 - \delta^2 - \mu^2)^2]}$$

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{2\delta\mu}{\mu^2 - \omega^2 - \delta^2}, \quad \operatorname{tg}\alpha_3 = \frac{\mu(3\delta^2 - \mu^2 + \omega^2 + 2\delta s_1)}{(s_1 - \delta)(\delta^2 - \mu^2 + \omega^2) + 2\delta\mu^2}$$

2. $Q = 0$. Уравнение (13) имеет три действительных корня, два из которых равны. Формула для ΔR имеет вид

$$\begin{aligned}\Delta R = {} & \gamma\omega^{-1}D\sin(\omega t + \alpha_1) + \frac{\gamma(s_1 + \lambda_1^{-1})}{(s_2 - s_1)^2(s_1^2 + \omega^2)}e^{s_1 t} + \\ & + \frac{\gamma(\lambda_1^{-1} + s_1)[2s_2(s_1 - s_2) - (s_2^2 + \omega^2)] - 2\gamma s_2(s_2 - s_1)^2}{(s_2^2 + \omega^2)^2(s_2 - s_1)^2}e^{s_2 t} + \frac{\gamma(\lambda_1^{-1} + s_2)}{(s_2^2 + \omega^2)(s_2 - s_1)}te^{s_2 t}\end{aligned} \tag{16}$$

$$D = (s_1{}^2 + \omega^2)^{-1/2} (s_2{}^2 + \omega^2)^{-1} (s_2 - s_1)^{-2} \{(\lambda_1^{-1} + s_2)^2 (s_1{}^2 + \omega^2) \times$$
$$\times (s_2 - s_1)^2 - 2 (\lambda_1^{-1} + s_1) (\lambda_1^{-1} + s_2) (s_2 - s_1) [s_1 (s_2{}^2 - \omega^2) +$$
$$+ 2\omega^2 s_2] + (\lambda_1^{-1} + s_1)^2 (s_2{}^2 + \omega^2)^2\}^{1/2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{2\omega s_2 (s_2 - s_1) (s_1{}^2 + \omega^2) (\lambda_1^{-1} + s_2) - \omega (\lambda_1^{-1} + s_1) (s_2{}^2 + \omega^2)^2}{(s_2{}^2 - \omega^2) (s_2 - s_1) (s_1{}^2 + \omega^2) (\lambda_1^{-1} + s_2) - s_1 (\lambda_1^{-1} + s_1) (s_2{}^2 + \omega^2)^2}$$

3. $Q < 0$. Уравнение (13) имеет три различных действительных корня. В этом случае

$$\Delta R = \gamma\omega^{-1} D \sin (\omega t + \alpha_1) + \frac{\gamma (\lambda_1^{-1} + s_1)}{(s_1{}^2 + \omega^2) (s_1 - s_2) (s_1 - s_3)} e^{s_1 t} + \tag{17}$$
$$+ \frac{\gamma (\lambda_1^{-1} + s_2)}{(s_2{}^2 + \omega^2) (s_2 - s_1) (s_2 - s_3)} e^{s_2 t} + \frac{\gamma (\lambda_1^{-1} + s_3)}{(s_3{}^2 + \omega^2) (s_3 - s_1) (s_3 - s_2)} e^{s_3 t}$$

$$D = \left\{ \frac{[\omega (\omega^2 - b) + (\lambda_1^{-1} + s_1) \omega (s_2 + s_3)]^2 + [(a\omega^2 - c) + (\lambda_1^{-1} + s_1) (\omega^2 - s_2 s_3)]^2}{[\omega^2 (s_2 + s_3)^2 + (\omega^2 - s_2 s_3)^2] [\omega^2 (\omega^2 - b)^2 + (a\omega^2 - c)^2]} \right\}^{1/2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = -$$
$$- \frac{\omega (s_2 + s_3) [\omega^2 (\omega^2 - b)^2 + (a\omega^2 - c)^2] + (\lambda_1^{-1} + s_1) \omega (\omega^2 - b) [\omega^2 (s_2 + s_3)^2 + (\omega^2 - s_2 s_3)^2]}{(\omega^2 - s_2 s_3) [\omega^2 (\omega^2 - b)^2 + (a\omega^2 - c)^2] + (\lambda_1^{-1} + s_1) (a\omega^2 - c) [\omega^2 (s_2 + s_3)^2 + (\omega^2 - s_2 s_3)^2]}$$

Соотношения (15)—(17) исчерпывают все возможные решения поставленной задачи. Нетрудно убедиться в том, что во всех трех случаях $\operatorname{Re} \{s_i\} \leqslant 0$ $(i = 1, 2, 3)$. Поэтому при $t \to \infty$ в формулах (15)—(17) останется лишь член $\gamma\omega^{-1} D \sin (\omega t + \alpha_1)$, характеризующий вынужденные колебания полости с частотой ω. Амплитуда колебаний определяется величиной D.

Изучим детально два предельных случая: $\lambda_1 \to 0$ и $\lambda_1 \to \infty$.

При $\lambda_1 = 0$ уравнение (11) описывает жидкость, которой требуется некоторое время, чтобы прийти в движение под действием внезапно приложенной силы [8]. Условие $Q > 0$ для такой среды означает, что $\beta (1 + 2\alpha\lambda_2) > \alpha^2$. Формула (15) примет вид

$$\Delta R = \gamma M [\omega^{-1} \sin (\omega t + \psi_1) + \varkappa^{-1} e^{-\varepsilon_1 t} \sin (\varkappa t + \psi_2)] \tag{18}$$

$$M = [4\alpha^2\omega^2 + (\beta - \omega^2 z)^2]^{-1/2}, \quad \varepsilon_1 = \alpha z^{-1}, \quad z = 1 + 2\alpha\lambda_2$$

$$\operatorname{tg} \psi_1 = \frac{2\gamma\omega}{\omega^2 z - \beta}, \quad \operatorname{tg} \psi_2 = \frac{2\alpha (\beta z - \alpha^2)^{1/2}}{2\alpha^2 + \omega^2 z^2 - \beta z}, \quad \varkappa = z^{-1} (\beta z - \alpha^2)^{1/2}$$

Определим резонансную частоту ω_p из условия экстремальности амплитуды M. Получим

$$\omega_p = z^{-1} (\beta z - 2\alpha^2)^{1/2} \tag{19}$$

Явление резонанса наблюдается лишь тогда, когда $\beta z > 2\alpha^2$. В случае $\alpha^2 < \beta z \leqslant 2\alpha^2$ максимальная амплитуда формально реализуется при $\omega = 0$. Исследуем влияние времени ретардации λ_2 на характер колебаний. При $\lambda_2 = 0$ формула (19) дает выражение для резонансной частоты $\omega_p{}^\circ$ в ньютоновской жидкости. Если выполняется неравенство $\beta > 4\alpha^2$, то для любых $\lambda_2 \neq 0$ $\omega_p < \omega_p{}^\circ$ и при возрастании λ_2 резонансная частота монотонно убывает. Если $\beta < 4\alpha^2$, то вначале, при увеличении λ_2 от 0 до $(2\alpha)^{-1}(4\alpha^2\beta^{-1} - 1)$, величина ω_p возрастает от $\omega_p{}^\circ$ до $^1/_4 \sqrt{2\beta}\, \alpha^{-1}$, а затем опять монотонно убывает до нуля. Амплитуда колебаний при резонансе $M_p = (2\alpha\varkappa)^{-1}$. При увеличении λ_2 величина M_p возрастает. Коэффициент затухания определяется значением ε_1 и с ростом λ_2 убывает. Отметим, что коэффициент затухания в вязкоупругой жидкости всегда меньше, чем в ньютоновской. Наконец, из (18) следует, что при увеличении λ_2 уменьшается частота собственных колебаний полости и возрастает сдвиг по фазе между колебаниями полости и давления на бесконечности.

В случае $Q = 0$ в результате предельного перехода при $\lambda_1 \to 0$ в формуле (16) получим

$$\Delta R = \gamma z (\alpha^2 + \omega^2 z^2)^{-1} [\omega^{-1} \sin (\omega t + \psi_3) + te^{-\varepsilon_1 t} + \\ + 2\alpha z (\alpha^2 + \omega^2 z^2)^{-1} e^{-\varepsilon_1 t}], \quad \operatorname{tg} \psi_3 = 2\alpha\omega z (\omega^2 z^2 - \alpha^2)^{-1} \tag{20}$$

Из (20) следует, что максимальная амплитуда вынужденных колебаний полости при данной частоте ω реализуется в среде с $\lambda_2 = (2\alpha)^{-1} (\alpha\omega^{-1} - 1)$. Если $\alpha\omega^{-1} \leqslant 1$, то зависимость амплитуды колебаний от параметра λ_2 носит монотонный характер, при этом амплитуда максимальна, если $\lambda_2 = 0$, т. е. в ньютоновской жидкости.

Переходя к пределу при $\lambda_1 \to 0$ в формуле (17), получим выражение для ΔR в случае $Q < 0$

$$\Delta R = \gamma\omega^{-1} M \sin (\omega t + \psi_1) + {}^1/_2 \gamma (\alpha^2 - \beta z)^{-1/2} e^{-\varepsilon_2 t} [(\varepsilon_2^2 + \\ + \omega^2)^{-1} - (\varepsilon_3^2 + \omega^2)^{-1} e^{(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) t}], \quad \varepsilon_{2,3} = z^{-1} [\alpha + (\alpha^2 - \beta z)^{1/2}] \tag{21}$$

Так как условие $Q < 0$ при $\lambda_1 = 0$ принимает вид $\beta z < \alpha^2$, то в этом случае формулу (19) для резонансной частоты использовать нельзя. Максимальная амплитуда формально реализуется при $\omega = 0$.

Рассмотрим другой предельный случай. Устремим λ_1 и η_0 к бесконечности, при этом положим, что $\eta_0 / \lambda_1 \to G$. Тогда уравнение (11) описывает несжимаемое вязкоупругое тело модели Фойгта [9]. Условие $Q > 0$ теперь принимает вид $\beta + 2E > \lambda_2^2 E^2$, где $E = 2G (\rho R_0^2)^{-1}$. Из соотношения (15) получаем

$$\Delta R = \gamma N [\omega^{-1} \sin (\omega t + \varphi_1) + q^{-1} e^{-n_1 t} \sin (qt + \varphi_2)] \tag{22}$$

$$N = [4\omega^2 n_1^2 + (d - \omega^2)^2]^{-1/2}, \quad d = \beta + 2E, \quad n_1 = \lambda_2 E$$

$$q = (d - n_1^2)^{1/2}, \quad \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{2\omega n_1}{\omega^2 - d}, \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{2n_1 q}{\omega^2 - d + 2n_1^2}$$

Колебания, определяемые формулой (22), имеют резонансный характер при частоте $\omega_p = (d - 2n_1^2)^{1/2}$. Резонансная амплитуда $N_p = (2n_1 q)^{-1}$. При увеличении λ_2 величины ω_p и N_p убывают. Коэффициент затухания определяется значением n_1 и пропорционален λ_2. Отметим также, что при увеличении λ_2 возрастает сдвиг по фазе между колебаниями полости и давления на бесконечности. При $\lambda_2 = 0$ формулы (22) описывают малые колебания газонаполненной полости в несжимаемом упругом теле.

В случае $Q = 0$ для среды Фойгта получаем из (16)

$$\Delta R = \gamma (\omega^2 + n_1^2)^{-1} [\omega^{-1} \sin (\omega t + \varphi_3) + te^{-n_1 t} + \\ + 2n_1 (n_1^2 + \omega^2)^{-1} e^{-n_1 t}] \tag{23}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_3 = 2\omega n_1 (\omega^2 - n_1^2)^{-1}$$

Влияние λ_2 здесь усматривается непосредственно.

Наконец, приведем формулу для ΔR в среде Фойгта в случае $Q < 0$

$$\Delta R = \gamma\omega^{-1} N \sin(\omega t + \varphi_1) + {}^1/_2\gamma (n_1^2 - d)^{-1/2} [(n_3^2 + \omega^2)^{-1} e^{-n_3 t} - (n_2^2 + \omega^2)^{-1} e^{-n_2 t}], \quad n_{2,3} = n_1 \pm (n_1^2 - d)^{1/2} \tag{24}$$

В заключение отметим, что при использовании соотношений (22)—(24) следует считать $\sigma = 0$.

Поступила 28 III 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Математические методы построения новых моделей сплошных сред. Усп. матем. н., 1965, т. 20, вып. 5.
2. *Буевич Ю. А.* О кинематике упруго-вязких сред с конечными деформациями. ПММ, 1968, т. 32, вып. 2.
3. *Oldroyd J. G.* Non — newtonian effects in steady motion of some idealized elastico viscous liquids. Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1958, vol. 245, No. 1241.
4. *Перник А. Д.* Проблемы кавитации. Л., «Судостроение», 1966.
5. *Fogler H. S., Goddard J. D.* Oscillations of a gas bubble in viscoelastic liquids subject to acoustic and impulsive pressure variations. J. Appl. Phys., 1971, vol. 42, No. 1.
6. *Tanasawa I., Yang W. J.* Dynamic behavior of a gas bubble in viscoelastic liquids. J. Appl. Phys., 1970, vol. 41, No. 11.
7. *Дёч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. М., «Наука», 1965.
8. *Бетчов Р., Криминале В.* Вопросы гидродинамической устойчивости. М., «Мир», 1971.
9. *Рейнер М.* Реология. М., «Наука», 1965.