

УДК 532.54

О НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ УРАВНЕНИЯ
ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Н. Н. Коцина

(*Москва*)

Асимптотическое поведение решений параболического типа при неограниченном возрастании времени исследовано для разных случаев в работах [1–6].

В данной работе рассматриваются две начально-краевые задачи. Найдено решение уравнения теплопроводности с нелинейной правой частью и с нелинейным граничным условием. Показано, что в зависимости от значений начальной функции и констант, входящих в условия задачи, решение соответствующей задачи стремится либо к устойчивому стационарному решению, либо к периодическому решению. Нахождению периодических решений этих двух задач, встречающихся в различных разделах гидродинамики (диффузии, подземной гидродинамики), и исследованию асимптотического поведения соответствующих начально-краевых задач при некоторых условиях посвящены работы [7, 8].

1. Рассмотрим в промежутке $0 < x < l$ начально-краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u)$$

$$F(u) = \begin{cases} c & \text{при } u(x^\circ, t) < u_* \\ -d & \text{при } u(x^\circ, t) > u_{**} \end{cases} \quad (u_{**} < u_*, c > 0, d > 0) \quad (1.1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x)$$

Здесь x° — некоторая внутренняя точка промежутка $0 < x < l$.

Легко видеть, что уравнению и граничным условиям (1.1) удовлетворяют стационарные решения

$$v(x) = \frac{c}{2a^2} x(l-x) \quad (1.2)$$

$$w(x) = -\frac{d}{2a^2} x(l-x) \quad (1.3)$$

Исследование методом малых возмущений показывает, что эти стационарные решения устойчивы.

Будем считать для определенности, что при $\varphi(x^\circ) < u_*$ $F(u) = c$, а при $\varphi(x^\circ) > u_*$ $F(u) = -d$. Тогда решение задачи (1.1) до некоторого момента времени будет описываться выражениями

$$u_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \{C_n \exp(-\lambda_n^2 t) - c\alpha_n [1 - \exp(-\lambda_n^2 t)]\} \sin \frac{\pi n x}{l} \quad (1.4)$$

$$u_2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \{D_n \exp(-\lambda_n^2 t) + d\alpha_n [1 - \exp(-\lambda_n^2 t)]\} \sin \frac{\pi n x}{l} \quad (1.5)$$

Формула (1.4) имеет место при $\varphi(x^\circ) < u_*$, (1.5) — при $\varphi(x^\circ) > u_*$.

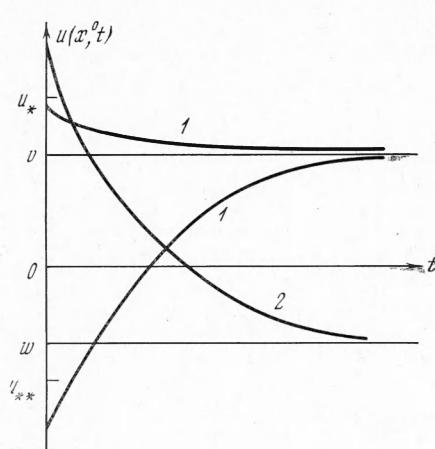
Здесь, как и в работе [7], введены обозначения

$$\lambda_n = \frac{\pi a n}{l}, \quad \alpha_n = \frac{2l^2[(-1)^n - 1]}{a^2 \pi^3 n^3} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1.6)$$

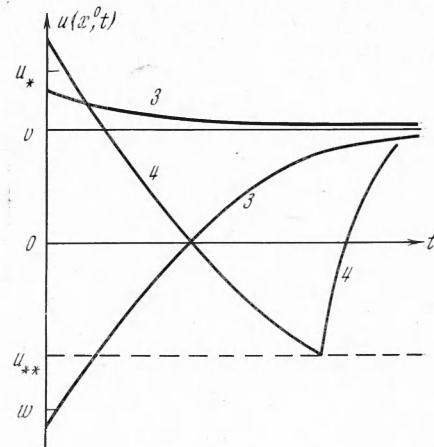
где C_n и D_n — коэффициенты Фурье функции $\varphi(x)$, которую считаем удовлетворяющей условиям Дирихле

$$C_n = D_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx \quad (1.7)$$

Нетрудно убедиться, что при стремлении времени t к бесконечности решение $u_1(x, t)$, определенное формулой (1.4), стремится к $v(x)$, решение $u_2(x, t)$ (1.5) — к $w(x)$. Таким образом, если $\varphi(x^\circ) < v(x^\circ) < u_*$, то при



Фиг. 1



Фиг. 2

неограниченном возрастании времени t решение (1.4) стремится к стационарному решению $v(x)$. Аналогично, если $\varphi(x^\circ) > u_*$ и $w(x^\circ) > u_{**}$, то (1.5) стремится к стационарному решению $w(x)$. Можно видеть, что в зависимости от соотношений между величинами u_* , u_{**} , $v(x^\circ)$ и $w(x^\circ)$ осуществляется один из четырех случаев поведения решения задачи (1.1).

Примерный вид зависимости $u(x^\circ, t)$ для этих случаев представлен соответственно на фиг. 1—4.

1°. $u_{**} < w(x^\circ) < v(x^\circ) < u_*$.

Если $\varphi(x^\circ) < u_*$, решение описывается формулой (1.4). При $t \rightarrow \infty$ $u_1(x, t) \rightarrow v(x)$, т. е. решение стремится к стационарному решению (1.2) (фиг. 1, кривые 1) (во всяком случае, если $\varphi(x^\circ) < v(x^\circ)$).

При $\varphi(x^\circ) > u_*$ решение описывается формулой (1.5). При $t \rightarrow \infty$ $u_2(x, t) \rightarrow w(x)$, т. е. решение стремится к стационарному решению (1.3) (фиг. 1, кривая 2).

2°. $w(x^\circ) < u_{**} < v(x^\circ) < u_*$.

Для $\varphi(x^\circ) < u_*$ решение описывается формулой (1.4). При $t \rightarrow \infty$ $u_1(x, t) \rightarrow v(x)$ (фиг. 2, кривые 3).

Если $\varphi(x^\circ) > u_*$, решение описывается формулой (1.5) ($u_2(x, t)$) до момента времени $t = T_1$, когда $u_2(x^\circ, T_1) = u_{**}$. Начиная с момента $t = T_1$ решение описывается формулой (1.4) ($u_1(x, t)$), в которой t следует заменить на $t - T_1$, а C_n — коэффициенты Фурье функции $u_2(x, T_1)$, где

$u_2(x, t)$ дано выражением (1.5). При $t \rightarrow \infty u_1(x, t) \rightarrow v(x)$ (фиг. 2, кривая 4).

3°. $u_{**} < w(x^\circ) < u_* < v(x^\circ)$.

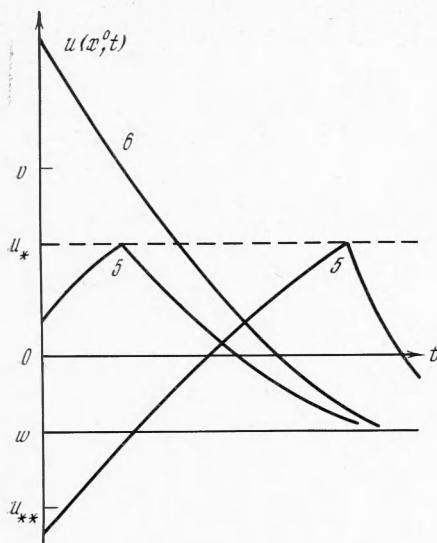
В случае $\varphi(x^\circ) < u_*$ решение описывается формулой (1.4) ($u_1(x, t)$) до момента $t = T_1$, когда $u_2(x^\circ, T_1) = u_{**}$. Начиная с момента T_1 решение описывается выражениями (1.5) ($u_2(x, t)$), где нужно t заменить на $t - T_1$, а D_n — коэффициенты Фурье функции $u_1(x, T_1)$. При $t \rightarrow \infty u_2(x, t) \rightarrow w(x)$ (фиг. 3, кривые 5).

Если $\varphi(x^\circ) > u_*$, решение описывается формулой (1.5) ($u_2(x, t)$). При $t \rightarrow \infty u_2(x, t) \rightarrow w(x)$ (фиг. 3, кривая 6).

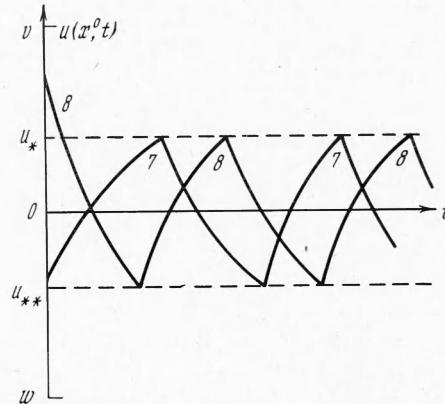
Возможны еще две картины, аналогичные описанным выше.

4°. $w(x^\circ) < u_{**} < u_* < v(x^\circ)$.

При $\varphi(x^\circ) < u_*$ решение описывается формулой (1.4) до момента $t = T_1$, когда $u_1(x^\circ, T_1) = u_*$, затем формулой (1.5), пока не будет $t = T_2$, где $u_2(x^\circ, T_2) = u_{**}$ и т. д. Следовательно, решение имеет колебательный характер. В работе [7] выписано это решение и при некоторых ограничениях



Фиг. 3



Фиг. 4

ниях показано, что при $w(x^\circ) < u_{**} < u_* < v(x^\circ)$ оно стремится к периодическому (фиг. 4, кривая 7).

Для $\varphi(x^\circ) > u_*$ решение снова имеет колебательный характер, описываясь то формулой (1.5), то формулой (1.4), и при безграничном росте времени t стремится к периодическому (фиг. 4, кривая 8).

Таким образом, при стремлении времени t к бесконечности решение начально-краевой задачи стремится либо к одному из двух устойчивых стационарных решений, либо к периодическому решению, найденному в работе [7]. Следовательно, имеет место жесткий режим возбуждения автоколебаний.

В работах [9, 10] рассмотрены периодические решения релейных систем с распределенными параметрами.

2. Рассмотрим теперь в промежутке $-l < x < 0$ другую начально-краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial u(-l, t)}{\partial x} = F[u(-l, t)], \quad u(0, t) = 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x) \quad (2.1)$$

Здесь $F(u)$ — трехзначная S -образная функция

$$F(u) = \begin{cases} hu + q_1 & \text{при } u < u_* \\ f(u) & \text{при } u_{**} < u < u_* \\ & (u_* > u_{**}, q_2 > q_1, h \geq 0) \\ hu + q_2 & \text{при } u > u_{**} \end{cases} \quad (2.2)$$

где $f(u)$ — непрерывная функция с отрицательной производной $f'(u) < 0$, такая, что $f(0) = 0$, $f(u_*) = hu_* + q_1$, $f(u_{**}) = hu_{**} + q_2$. (Здесь и в дальнейшем штрих означает производную.)

Задача (2.1), (2.2) имеет следующие стационарные решения:

$$u \equiv 0, \quad u = A_i x \quad (u_{**} \leq -A_i l \leq u_*, \quad i = 1, 2, \dots) \quad (2.3)$$

$$v(x) = q_1 x / (1 + hl) \quad (2.4)$$

$$w(x) = q_2 x / (1 + hl) \quad (2.5)$$

При этом A_i — корни уравнения

$$A_i = f(-A_i l)$$

Нетрудно видеть, что стационарные решения (2.4) и (2.5) устойчивы.

Стационарные решения (2.3) соответствуют ветви $F(u) = f(u)$. При этом, как и для случая $u \equiv 0$ [11], решение $u = A_i x$ устойчиво, если выполняется неравенство $-lf'(-A_i l) < 1$, и неустойчиво, если $-lf'(-A_i l) > 1$. В самом деле, исследование устойчивости стационарного решения $u = A_i x$ в силу (2.1), (2.2) сводится к отысканию возмущений $u'(x, t)$ вида $e^{\lambda_n t} \psi_n(x)$ и к решению уравнения

$$a^2 \psi_n''(x) = \lambda_n \psi_n(x) \quad (2.6)$$

с граничными условиями

$$\psi_n'(-l) = f'(-A_i l) \psi_n(-l), \quad \psi_n(0) = 0 \quad (2.7)$$

для определения функции $\psi_n(x)$. Уравнению (2.6) и второму условию (2.7) удовлетворяют функции $\psi_n(x) = \sin \omega_n x$ и $\psi(x) = \operatorname{sh} \Omega x$. В первом случае из (2.6) и (2.7) получаем следующие уравнения для нахождения величин ω_n и λ_n :

$$\operatorname{tg} \omega_n l = -\frac{\omega_n}{f'(-A_i l)}, \quad \lambda_n = -a^2 \omega_n^2 \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.8)$$

во втором случае имеем

$$\operatorname{th} \Omega l = -\frac{\Omega}{f'(-A_i l)}, \quad \lambda = a^2 \Omega^2 \quad (2.9)$$

Таким образом, в первом случае выполняется неравенство $\lambda_n < 0$ (решение устойчиво), во втором случае $\lambda > 0$ (решение неустойчиво). Из первого равенства (2.9) ясно, что неустойчивость осуществляется при условии

$$-lf'(-A_i l) > 1 \quad (2.10)$$

В частности, для стационарного решения $u \equiv 0$, которое имеет место для любой функции $f(u)$ с описанными выше свойствами, условия устойчивости и неустойчивости принимают вид

$$-lf'(0) < 1, \quad -lf'(0) > 1 \quad (2.11)$$

Остановимся теперь на случае, когда число s корней уравнения $A = f(-Al)$ конечно, причем $-lf'(-Al) \neq 1$ ($i = 1, 2, \dots, s$). Пусть для определенности выполнены следующие неравенства:

$$u_{**} < -A_1l < -A_2l < \dots < -A_{s-1}l < -A_sl < u_*$$

Тогда устойчивые стационарные решения будут чередоваться с неустойчивыми. Пусть стационарное решение $u = A_i x$ неустойчиво. Тогда $u = A_{i-1}x$ и $u = A_{i+1}x$ устойчивы. Аналогично тому, как это было сделано для случая $u \equiv 0$ в работе [11], можно сравнить нелинейное интегральное уравнение, к решению которого сводится начально-краевая задача (2.1), (2.2), где положено $F(u) = f(u)$, с соответствующим линейным интегральным уравнением, для которого $F(u) = A_i - l^{-1}(u + A_i l)$.

Оказывается, что, если $-A_{i-1}l < \varphi(-l) < -A_il$, то при $t \rightarrow \infty$ решение нелинейной задачи стремится к $A_{i-1}x$. Если $-A_il < \varphi(-l) < -A_{i+1}l$, решение стремится к $A_{i+1}x$. Если стационарное решение $u = A_s x$ устойчиво и $-A_sl < \varphi(-l) < u_*$, то решение задачи стремится к $A_s x$. Аналогично этому, если $u = A_1 x$ устойчиво и $u_{**} < \varphi(-l) < -A_1l$, то решение стремится к $A_1 x$. Если же стационарное решение $A_s x$ неустойчиво и $-A_sl < \varphi(-l) < u_*$, то через конечный промежуток времени T_1 функция $u(-l, t)$ достигнет значения u_* . Аналогично, если стационарное решение $u = A_1 x$ неустойчиво, то при $u_{**} < \varphi(-l) < -A_1l$ в момент T_1 функцией $u(-l, t)$ будет достигнуто значение u_{**} . Начиная с этого момента времени, функция $F(u)$, входящая в граничное условие, будет принимать значения либо $hu + q_1$, либо $hu + q_2$. Ветвь $F(u) = f(u)$ теперь не нужно принимать во внимание. Решение задачи (2.1), (2.2) описывается выражениями

$$u_1(x, t) = \frac{q_1 x}{1 + hl} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(-\lambda_n^2 t) \sin \alpha_n x \quad (2.12)$$

$$u_2(x, t) = \frac{q_2 x}{1 + hl} + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \exp(-\lambda_n^2 t) \sin \alpha_n x \quad (2.13)$$

где λ_n — корни уравнения

$$\operatorname{tg} \frac{\lambda_n l}{a} = -\frac{\lambda_n}{ah} \quad \left(\alpha_n = \frac{\lambda_n}{a}, \quad n = 1, 2, \dots \right) \quad (2.14)$$

C_n и D_n — коэффициенты Фурье функций $\varphi(x) = q_1 x / (1 + hl)$ и $\varphi(x) = -q_2 x / (1 + hl)$ соответственно [8], при этом в формулах (2.12) и (2.13) нужно за начальный момент времени $t = 0$ принять момент $t = T_1$, а за начальную функцию $\varphi(x)$ — функцию $u(x, T_1)$. Здесь $u(x, t)$ — решение задачи (2.1), (2.2) для ветви $F(u) = f(u)$. Если $-A_sl < \varphi(-l) < u_*$, воспользуемся формулой (2.13), если же $u_{**} < \varphi(-l) < -A_1l$ — формулой (2.12).

Если рассматриваются ветви $F(u) = hu + q_j$ ($j = 1, 2$) функции $F(u)$, то будем снова считать для определенности, что при $\varphi(-l) < u_*$ имеет место решение (2.12), а при $\varphi(-l) > u_*$ — решение (2.13).

Как и для первой задачи, если $\varphi(-l) < v(-l) < u_*$, то при $t \rightarrow \infty$ $u_1(x, t) \rightarrow v(x)$; если $\varphi(-l) > u_*$ и $w(-l) > u_{**}$, то при $t \rightarrow \infty$ $u_2(x, t) \rightarrow w(x)$. Таким образом, если положить $x^2 = -l$, то при $t \rightarrow \infty$ решение задачи (2.1), (2.2) либо стремится к одному из устойчивых стационарных решений (2.3), либо для задачи сохраняются все возможные кар-

тины поведения решения задачи (1.1), описанные в предыдущем пункте (фиг. 1—4). В работе [8] получено колебательное решение, представленное на фиг. 4, и показано, что при определенных условиях оно стремится к периодическому.

Таким образом, решение второй задачи также стремится либо к одному из стационарных решений (2.3)–(2.5), либо к периодическому решению.

Поступила 17 IX 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Стабилизация решений некоторых дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве. Докл. АН СССР, 1956, т. 111, № 1.
2. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Стабилизация решений параболических уравнений. Докл. АН СССР, 1956, т. 111, № 2.
3. Горьков Ю. П. О периодических решениях параболических уравнений. Дифференциальные уравнения, 1966, т. 2, № 7.
4. Горьков Ю. П. О поведении решения краевой задачи для квазилинейного параболического уравнения второго порядка при $t \rightarrow \infty$. Дифференциальные уравнения, 1970, т. 6, № 6.
5. Зеленяк Т. И. О стабилизации решений краевых задач для параболического уравнения второго порядка с одной пространственной переменной. Дифференциальные уравнения, 1968, т. 4, № 1.
6. Руденко Э. Н. К вопросу об асимптотической устойчивости решений параболических уравнений. Дифференциальные уравнения, 1970, т. 6, № 1.
7. Ко chin Н. Н. Об изменении уровня грунтовых вод при поливах. ПМТФ, 1971, № 4.
8. Ко chin Н. Н. Об асимптотическом поведении решений некоторых нелинейных задач гидродинамики. ПММ, 1971, т. 35, вып. 6.
9. Колесов Ю. С. О периодических решениях одного класса дифференциальных уравнений с гистерезисной нелинейностью. Докл. АН СССР, 1967, т. 176, № 6.
10. Колесов Ю. С. Периодические решения релейных систем с распределенными параметрами. Матем. сб., 1970, т. 83, № 3.
11. Гохштейн А. Я. Об устойчивости стационарных состояний электролитических систем. Докл. АН СССР, 1963, т. 149, № 4.