ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУХ ВОДОНОСНЫХ ГОРИЗОНТОВ, РАЗДЕЛЕННЫХ СЛАБОПРОНИЦАЕМОЙ ПРОСЛОЙКОЙ

В. А. Васильев *(Ташкент)*

Рассматривается осесимметричная неустановившаяся фильтрация в слоистом водоносном комплексе, состоящем из двух хорошо проницаемых пластов, разделенных слабопроницаемым прослоем. Верхний пласт имеет слабопроницаемую кровлю (покровный слой), содержащий зеркало грунтовых вод, а нижний — подстилается водоупором (фигура). Режим фильтрации — всюду упругий. Напорно-безнапорный случай не рассматривается.

В работах [1–5] аналогичная задача рассматривается либо при условии, что напор в одном пласте остается неизменным, при заборе воды из другого, либо не учитывается проницаемость кровли верхнего пласта, либо предполагается, что фильтрация через прослойку подчиняется «жесткому» режиму. В. М. Шестаков [6] рассматривает эту задачу, считая, что кровля верхнего пласта непроницаема, и для случая, когда оба пласта имеют одинаковую проводимость, получает приближенное решение.

Обозначение

r, z — радиальная и вертикальная координаты;
h — напор, отсчитываемый от кровли верхнего пласта;
h_0 — напор в начальный момент;
k — коэффициент фильтрации;
m — мощность пластов;
$\langle m_1 \rangle$ — средняя мощность покровного слоя;
T — фильтрационная поводимость;
μ° — коэффицент упругой водоотдачи;
μ_1 — коэффициент водоотдачи покровного слоя;
a — коэффициент пьезопроводности;
α_1, α_3 — коэффициенты перетекания через покровный слой и прослойку;

$$T = km, \quad a = T / \mu^\circ, \quad \alpha_1 = k_1 / \langle m_1 \rangle, \quad \alpha_3 = k_3 / m_3$$

Смысл цифровых индексов (внизу) ясен из фигуры.

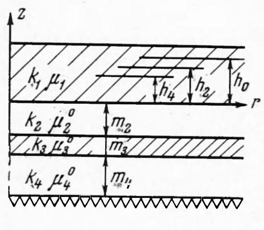
1. Линейные дифференциальные уравнения задачи, полученные в предположении, что вертикальная составляющая скорости фильтрации в пределах покровного слоя не зависит от координаты z, имеют вид

$$\mu_1 \frac{\partial h_1}{\partial t} = \alpha_1 (h_2 - h_1), \qquad \mu_2^\circ \frac{\partial h_2}{\partial t} = T_2 \Delta h_2 - k_3 \left[\frac{\partial h_3}{\partial z}\right]_{z=-m_2} - \alpha_1 (h_1 - h_2)$$

$$\mu_3 \frac{\partial h_3}{\partial t} = T_3 \frac{\partial^2 h_3}{\partial z^2}, \qquad \mu_4^\circ \frac{\partial h_4}{\partial t} = T_4 \Delta h_4 + k_3 \left[\frac{\partial h_3}{\partial z}\right]_{z=-m_2-m_3}, \qquad \Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial}{\partial r}\right) \tag{1.1}$$

Третье уравнение этой системы, описывающее движение в прослойке при упругом режиме, дано М. С. Хантушем [5].

Предполагается, что в начальный момент времени движение отсутствует, а совершенная скважина, забирающая воду из нижнего пласта, имеет нулевой радиус. В этом случае начальные и граничные условия задачи будут



$$h_1(r,\ 0) = h_2(r,\ 0) = h_3(r,\ z,\ 0) = h_4(r,\ 0) = h_0 \tag{1.2}$$

$$h_3(r, -m_2,\ t) = h_2(r,\ t)$$

$$h_3(r,\ -m_2-m_3,\ t) = h_4(r,\ t)$$

$$\lim_{r \to 0} 2\pi T_4 r \frac{\partial h_4}{\partial r} = -Q, \qquad \lim_{r \to 0} 2\pi T_2 r \frac{\partial h_2}{\partial r} = 0 \tag{1.3}$$

Здесь Q — постоянный дебит скважины. Применяя к системе (1.1) интегральное преобразование Лапласа, получим для изображений

$$S_1 = S_2 \frac{\alpha_1}{p\mu_1 + \alpha_1} \qquad (S \doteqdot h_0 - h) \tag{1.4}$$

$$S_3 = \frac{S_2 \operatorname{sh}[\sigma(z + m_2 + m_3)] - S_4 \operatorname{sh}[\sigma(z + m_2)]}{\operatorname{sh}(\sigma m_3)} \qquad \left(\sigma = \left(\frac{p}{a_3}\right)^{1/2}\right) \tag{1.5}$$

$$T_2 \Delta S_2 - \omega_2^2 S_2 + S_4 \alpha_3 \frac{\sigma m_3}{\operatorname{sh}(\sigma m_3)} = 0, \quad \omega_2^2 = p\mu_2^\circ + \alpha_1 \frac{p\mu_1}{p\mu_1 + \alpha_1} + \alpha_3 \sigma m_3 \operatorname{cth}(\sigma m_3)$$

$$T_4 \Delta S_4 - \omega_4^2 S_4 + S_2 \alpha_3 \frac{\sigma m_3}{\operatorname{sh}(\sigma m_3)} = 0, \quad \omega_4^2 = p\mu_4^\circ + \alpha_3 \sigma m_3 \operatorname{cth}(\sigma m_3) \tag{1.6}$$

Здесь S — изображение понижений напора по Лапласу. Решение системы уравнений (1.6) имеет очень сложный вид, поэтому ниже рассматриваются приближенные решения, более удобные для расчетов.

2. Пусть время t, в течение которого производится забор воды из пласта, не меньше, чем наибольшее значение чисел $10\,\mu_1/\alpha_1$, $10\,\mu_3^\circ/\alpha_3$. Учитывая, что в этом случае в области изображений значения параметра p должны быть не больше $0.1\,\alpha_1/\mu_1^\circ$ и $0.1\,\alpha_3/\mu_3^\circ$, можно положить приближенно

$$\sigma m_3 \operatorname{cth}(\sigma m_3) = 1 + \frac{p\mu_3^\circ}{3\alpha_3}\,\frac{\sigma\mu_3}{\operatorname{sh}(\sigma m_3)} = 1, \quad \frac{p\mu_1}{p\mu_1+\alpha_1} = p\,\frac{\mu_1}{\alpha_1}, \quad \frac{\alpha_1}{p\mu_1+\alpha_1} = 1 \qquad (2.1)$$

Уравнения (1.4) и (1.6) при этом примут вид

$$S_1 = S_2 \qquad (2.2)$$

$$T_2\Delta S_2 - w_2^2\, S_2 + \alpha_3\, S_4 = 0, \qquad \omega_2^2 = p\,\mu_2^* + \alpha_3$$

$$T_4\,\Delta S_4 - \omega_4^2\, S_4 + \alpha_3\, S_2 = 0, \qquad \omega_4^2 = p\,\mu_4^* + \alpha_3 \qquad (2.3)$$

$$\mu_2^* = \mu_1 + \mu_2^\circ + {}^1/_3\,\mu_3^\circ, \qquad \mu_4^* = \mu_4^\circ + {}^1/_3\,\mu_3^\circ \qquad (2.4)$$

Решение системы (2.3), ограниченное при $r \to \infty$, разыскивается в виде

$$S_2 = ACK_0\,(r\beta_1) + DBK_0\,(r\beta_2), \qquad S_4 = CK_0\,(r\beta_1) + DK_0\,(r\beta_2) \qquad (2.5)$$

Здесь $K_0\,(r\,\beta)$ — модифицированная функция Бесселя второго рода нулевого порядка (2.6)

$$A = 1 + \frac{p\mu_4^* - T_4\beta_1^2}{\alpha_3}, \quad \beta^2 = \frac{1}{2T_2}\left\{p\left(\mu_2^* + \mu_4^*\,\frac{T_2}{T_4}\right) + \alpha_3\left(1 + \frac{T_2}{T_4}\right) + \sqrt{M}\right\}$$

$$B = \frac{1}{1 + (p\mu_2^* - T_2\beta_2^2)/\alpha_3}, \quad M = 4\alpha_3^2\,\frac{T_2}{T_4} + \left\{p\left(\mu_2^* - \mu_4^*\,\frac{T_2}{T_4}\right) + \alpha_3\left(1 - \frac{T_2}{T_4}\right)\right\}^2$$

Постоянные C и D определяются условиями (1.3). Таким образом, решение задачи в области изображений для больших значений времени откачки t имеет вид

$$S_2(r,\ p) = \frac{Q}{2\pi T_4 p}\,\frac{AB}{A-B}\,\{K_0(r\beta_2) - K_0(r\beta_1)\},$$

$$S_4(r,\ p) = \frac{Q}{2\pi T_4 p}\,\frac{1}{A-B}\,\{AK_0(r\beta_2 - BK_0\,(r\beta_1)\}, \quad S_1\,(r,\ p) = S_2, (rp) \qquad (2.7)$$

Рассмотрим примеры частных схем движения, когда оригиналы функций определяются через табулированные функции.

1°. Ввиду большой неоднородности пород, слагающих водоносные толщи, точность гидрогеологических параметров мала. Предполагая, что проводимости T_2 и T_4, а также коэффициенты упругой водоотдачи μ_2° и μ_4° имеют одинаковый порядок, полагая $T_2 = T_4 = T$, $\mu_2^\circ = \mu_4^\circ = \mu^\circ$, из (2.7) получим

$$\beta^2 = (1/T)\,\{p\,(\mu^\circ + {}^1/_2\,\mu_1 + {}^1/_3\mu_3^\circ) + \alpha_3 \pm \alpha_3\,\sqrt{1 + p^2\mu_1^2/4\alpha_3^2\}}$$

Так как параметр p мал, то приближенно можно положить

$$\beta_1^2 = \frac{p}{a} + 2\,\frac{\alpha_3}{T}, \qquad \beta_2^2 = \frac{p}{a}, \qquad a = \frac{T}{\mu^\circ + {}^1/_2\mu_1 + {}^1/_3\,\mu_3^\circ}$$

$$\frac{A}{A-B} = \frac{1}{2}; \qquad \frac{AB}{A-B} = \frac{1}{2}; \quad \frac{B}{A-B} = -\frac{1}{2} \qquad (2.8)$$

и (2.7) принимает вид

$$S_2 = \frac{Q}{4\pi Tp}\,\{K_0\,(r\beta_2) - K_0\,(r\beta_1)\}, \quad S_4 = \frac{Q}{4\pi Tp}\,\{K_0\,(r\beta_2) + K_0\,(r\beta_1)\} \qquad (2.9)$$

Пользуясь правилами операционного исчисления, находим оригиналы

$$p^{-1}K_0\,(r\beta_1) \risingdotseq {}^1/_2\,W\,(u,\ \delta), \qquad p^{-1}\,K_0\,(r\beta_2) \risingdotseq -{}^1/_2\,\mathrm{Ei}\,(-u)$$

$$-\mathrm{Ei}\,(-u) = \int_u^\infty e^{-\lambda}\,\frac{d\lambda}{\lambda}, \quad W\,(u,\ \delta) = \int_u^\infty \exp\left(-\lambda - \frac{\delta^2}{4\lambda}\right)\frac{d\lambda}{\lambda}$$

$$\left(u = \frac{r^2}{4at}, \quad \delta = r\left(\frac{2\alpha_3}{T}\right)^{1/2}\right)$$

Функция $W(u, \delta)$ табулирована М. С. Хантушем [5]. Пользуясь этими соотношениями, получаем

$$h_1 = h_2, \qquad h_2 = h_0 - \frac{Q}{8\pi T}\{-\operatorname{Ei}(-u) - W(u, \delta)\}$$

$$h_4 = h_0 - \frac{Q}{8\pi T}\{-\operatorname{Ei}(-u) + W(u, \delta)\} \tag{2.10}$$

В частности, если кровлю верхнего водоносного горизонта считать непроницаемой, то соотношение для h_1 отпадает. Полагая в (2.8) $\mu_1 = 0$, получим решение задачи, данное В. М. Шестаковым [6], найденное им путем замены уравнения для прослойки уравнением в конечных разностях. Однако у В. М. Шестакова в выражении коэффициента пьезопроводности $a = T / /(\mu^\circ + \alpha\mu_3^\circ)$ вместо $\alpha = 1/3$ указано $\alpha = 1/2$.

Для разности напоров верхнего и нижнего пластов

$$h_2(r, t) - h_4(r, t) = \frac{Q}{4\pi T} W(u, \delta)$$

имеет место предельное соотношение

$$[h_2(r, t) - h_4(r, t)]_{t=\infty} = \frac{Q}{2\pi T} K_0(\delta) \tag{2.11}$$

Практически неустановившийся характер этой разности перестает сказываться для $u < 0.10\,\delta^2$. Используя известное предельное соотношение

$$\lim_{p\to 0} pF(p) = f(\infty) \qquad (F(p) \div f(t))$$

из (2.8) получаем, что формула (2.11) сохраняет вид и при различных значениях проводимостей пластов, если считать, что в общем случае

$$\delta = r\left(\alpha_3 \frac{T_2 + T_4}{T_2 T_4}\right)^{1/2} \tag{2.12}$$

2°. Предполагая, что забор воды производится из верхнего пласта и считая, что T_4 значительно больше T_2 (теоретически $T_4 \to \infty$), получим схему, соответствующую случаю, когда нижний, более водообильный слой имеет постоянный, не зависящий от работы скважины напор $h_4 = \text{const}$. Полагая в (2.6) проводимость $T_4 \to \infty$, найдем

$$\beta_1^2 = \frac{p}{a} + \frac{\alpha_3}{T_2}, \qquad \beta_2^2 = 0, \qquad \frac{A}{A - B} = 1 \tag{2.13}$$

и, следовательно, решение задачи принимает вид

$$h_1 = h_2, \quad h_2 = h_0 - \frac{Q}{4\pi T_2} W(u, \delta) \qquad \left(u = \frac{r^2}{4at}, \quad a = \frac{T_2}{\mu_2^*}, \quad \delta = r\left(\frac{\alpha_3}{T_2}\right)^{1/2}\right) \tag{2.14}$$

Для установившегося движения

$$h_2(r) = h_0 - \frac{Q}{2\pi T_2} K_0(\delta) \tag{2.15}$$

4. Если время откачки из скважины мало, так что t не превосходит наименьшее из чисел $0.1\ \mu_3^\circ / \alpha_3$, $0.1\ \mu_1 / \alpha_1$ и соответствует значению параметра p, не меньшему наибольшего из чисел $10\,\alpha_3 / \mu_3^\circ$, $10\,\alpha_1 / \mu_1$, то приближенно

$$\frac{\sigma m_3}{\operatorname{sh}(\sigma m_3)} = 0, \qquad \frac{p\mu_1}{p\mu_1 + \alpha_1} = 1, \qquad \frac{\alpha_1}{p\mu_1 + \alpha_1} = 0, \qquad \alpha_1 = 0 \tag{3.1}$$

Для этого случая уравнения (1.4) и (1.6) записываются в виде

$$S_1 = 0, \quad \Delta S_2 - \omega_2^2 S_2 = 0, \quad \omega_2^2 = T_2^{-1}(p\mu_2^\circ + k_3\sqrt{p / a_3})$$

$$\Delta S_4 - \omega_4^2 S_4 = 0, \quad \omega_4^2 = T_4^{-1}(p\mu_4^\circ + k_3\sqrt{p / a_3}) \tag{3.2}$$

Решение этой системы, ограниченное при $r \to \infty$ и удовлетворяющее условиям (1.2) и (1.3), получается следующим:

$$S_1 = S_2 = 0, \qquad S_4 = \frac{Q}{2\pi T_2 p} K_0(r\omega_4) \tag{3.3}$$

Заметим, что

$$\frac{1}{p} K_0(r\omega_4) \div \frac{1}{2}\int_u^\infty e^{-\lambda} \operatorname{erfc}\left(\frac{\nu\sqrt{u}}{\sqrt{\lambda(\lambda - u)}}\right)\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{1}{2} H(u, \nu) \tag{3.4}$$

$$\left(u = \frac{r^2}{4a_4 t}, \quad a_4 = \frac{T_4}{\mu_4^\circ}, \quad \nu = \frac{rk_3}{4T_4}\left(\frac{a_4}{a_3}\right)^{1/2}\right)$$

Функция $H(u, \nu)$ табулирована М. С. Хантушем [5]. Поэтому решение задачи для малых значений времени t имеет вид

$$h_1 = h_2 = h_0, \quad h_4(r, t) = h_0 - \frac{Q}{4\pi T_4} H(u, \nu) \tag{3.5}$$

Полученное решение указывает на важность учета упругого режима фильтрации как в основных водоносных горизонтах, так и в слабопроницаемой прослойке. Подпитывание через слабопроницаемый слой при учете упругого режима фильтрации в нем значительно уменьшает понижение уровня в пласте, из которого производится откачка, так как передача напоров от одного горизонта к другому происходит с запаздыванием во времени. Отсюда следует, что если откачка из скважины производится с целью выявления взаимодействия пластов и определения гидрогеологических параметров, то время откачки должно быть не меньше того, которое получается по оценке (3.1).

Например, положив $k_1 = 0.1$ *м/сутки*, $k_3 = 10^{-4}$ *м/сутки*, $\langle m_1 \rangle = 100$ *м*, $m_3 = 10$ *м*, $\mu_1 = 0.1$, $\mu_3^\circ = 10^{-4}$, по оценкам (3.1) получаем, что снижения напоров можно ожидать не раньше, чем через сутки непрерывной работы скважины.

Поступила 12 IX 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. Гостехиздат, 1952.
2. Чарный И. А. Фильтрация в пласте с непроницаемой кровлей и подошвой, разделенном слабопроницаемой перемычкой. Тр. Моск. нефт. ин-та, 1966, т. 33.
3. Бегматов В., Рыбакова С. Т. К взаимодействию водоносных пластов, разделенных слабопроницаемыми пластами. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 2.
4. Бочевер Ф. М., Гармонов И. В., Лебедев А. В., Шестаков В. М. Основы гидрогеологических расчетов. Изд. «Недра», 1965.
5. Хантуш М. С. Новое в теории перетекания. Сб. «Вопросы гидрогеологических расчетов». Изд. «Мир», 1964.
6. Шестаков В. М. О влиянии упругого режима фильтрации в раздельных слоях на взаимодействие водоносных горизонтов. Изв. высш. учебн. завед. Геология и разведка, 1963, № 10.

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ФИЛЬТРАЦИИ МЕТОДОМ СТАТИСТИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ

***В. А. Исякаев** (Башкирская АССР, г. Октябрьский)*

Основные задачи фильтрации жидкости при достаточно сложных граничных условиях часто решаются разностными методами [1]. В этом случае при малом шаге сетки приходится иметь дело с системой большого числа алгебраических уравнений, количество которых может доходить до 10^{10}. При обычных методах решения систем (итераций, исключения неизвестных и т. д.) приходится находить все решения, что при большом количестве неизвестных и, как правило, медленной сходимости методов решения представляет большие трудности.

В задаче притока жидкости к опробователю пластов на кабеле достаточно знать значение давления в точках, расположенных в непосредственной близости к поверхности стока. Поэтому для решения данной задачи применен метод статистических испытаний (Монте-Карло), широко используемый для решения плоских задач фильтрации [2].

Обозначения

p — давление;
t — время;
$\varkappa$ — коэффициент пьезопроводности;
H — мощность пласта;
D — диаметр скважины;
d — диаметр стока опробователя;
F — площадь стока;
β — коэффициент сжимаемости жидкости;
β° — коэффициент сжимаемости пористой среды;
β^* — приведенный коэффициент сжимаемости;
m — коэффициент пористости;
k — проницаемость пористой среды;
W — число шагов блуждающей частицы;
μ — абсолютная вязкость жидкости;
$D(\xi)$ — статистическая оценка дисперсии;
m_k — число попаданий в сток на 100 испытаний;
m_0 — число попаданий в сток на 1000 испытаний;
ε — абсолютная ошибка;
δ — относительная ошибка.