

5. Накоряков В. Е., Шрейбер И. Р. Распространение малых возмущений в парожидкостной смеси.— В кн.: Проблемы теплофизики. Новосибирск, «Наука», 1974.
8. Бетчелор Г. К. Волны сжатия в суспензии газовых пузырьков в жидкости.— Сб. пер. Механика, 1968, № 3.
7. Crespo A. Sound and shock waves in liquids containing bubbles.—«The Physics of Fluids», 1969, vol. 12, N 11.
8. Ивандаев А. И., Нигматулин Р. И. Особенности распространения слабых возмущений в двухфазных средах с фазовыми переходами.— ПМТФ, 1970, № 5.
9. Нигматулин Р. И. Мелкомасштабные течения и поверхностные эффекты в гидродинамике многофазных сред.— ПММ, 1971, т. 35, вып. 3.
10. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959.
11. Лабунцев Д. А., Муратова Г. М. Физические и методические основы формулировки задач тепло- и массообмена при фазовых превращениях. Тепло- и массоперенос. Том II. Минск, 1972.
12. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Техиздат, 1953.
13. Нигматулин Р. И., Шагапов В. Ш. Структура ударных волн в жидкости с пузырьками газа.— «Изв. АН СССР. МЖГ», 1974, № 4.

УДК 532.516.2

ВЛИЯНИЕ МАЛОЙ ВЯЗКОСТИ НА ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ В ФОРМЕ ЭЛЛИПСА

В. А. Батицев

(Ростов-на-Дону)

Изучается действие малой вязкости на плоское потенциальное течение со свободной границей в форме эллипса, полученное в работе [1]. Пусть в начальный момент времени жидкость с полем скоростей

$$(1) \quad v_x = \sqrt{2}x/2, \quad v_y = -\sqrt{2}y/2$$

заклучена внутри круга $x^2 + y^2 \leq 1$, граница которого — свободная поверхность. Давление и касательное напряжение на свободной границе S_t при всех $t \geq 0$ равны нулю, внешние силы отсутствуют. Соответствующее течение идеальной несжимаемой жидкости потенциально и имеет вид [1]

$$(2) \quad v_x = \tau\tau^{-1}x, \quad v_y = -\tau\tau^{-1}y, \\ p = -0,5\tau\tau (x^2\tau^{-2} + y^2\tau^2 - 1),$$

$$\int_1^\tau \sqrt{1 + \rho^{-4}} d\rho = \lambda t (\lambda = \text{const}), \quad \tau(0) = 1, \quad \dot{\tau} = d\tau/dt.$$

Решение (2) допускает следующую интерпретацию. С ростом t свободная граница $x^2 + y^2 = 1$ деформируется в эллипс $L_t: x^2\tau^{-2} + y^2\tau^2 = 1$ с полуосями $\tau(t)$, $\tau^{-1}(t)$. Из (2) следует, что $\tau \rightarrow \infty$, $\tau^{-1} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и $\lambda > 0$. При этом эллипс вытягивается вдоль оси Ox . Если $\lambda < 0$, то $\tau \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и эллипс вытягивается вдоль оси Oy .

При исчезающей вязкости ($\nu \rightarrow 0$) вблизи свободной границы S_t возникает явление пограничного слоя, заключающееся в быстром измене-

нии производных скорости и появлении конечной завихренности. Всюду вне области пограничного слоя вязкая жидкость ведет себя подобно идеальной.

Течение вязкой несжимаемой жидкости описывается уравнениями Навье — Стокса

$$(3) \quad \partial \mathbf{v} / \partial t + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \varepsilon^2 \Delta \mathbf{v}, \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (\varepsilon^2 = 1/\operatorname{Re})$$

с начальным условием (1), кинематическим и динамическими условиями на свободной границе S_t [2]

$$(4) \quad \partial F / \partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla F = 0;$$

$$(5) \quad 4n_x n_y \frac{\partial v_x}{\partial x} + (n_y^2 - n_x^2) \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = 0;$$

$$(6) \quad p - 2\varepsilon^2 \left[n_x^2 \frac{\partial v_x}{\partial x} + n_y^2 \frac{\partial v_y}{\partial y} + n_x n_y \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right] = 0.$$

Здесь $F(x, y, t) = 0$ — уравнение свободной границы S_t в неявной форме; $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ — единичный вектор внутренней нормали к свободной границе S_t ; Re — число Рейнольдса. Величины, входящие в (3)–(6), безразмерны.

Задача (3)–(6) решается асимптотическим методом пограничного слоя [3]. Асимптотические разложения решения задачи при $\varepsilon \rightarrow 0$ строятся в виде

$$(7) \quad \mathbf{v} \sim \sum_{k=0}^N \varepsilon^k \mathbf{v}_k(x, y, t) + \sum_{k=0}^{N+1} \varepsilon^k \mathbf{h}_k(x, y, t, \varepsilon);$$

$$p \sim \sum_{k=0}^N \varepsilon^k p_k(x, y, t) + \sum_{k=0}^{N+1} \varepsilon^k q_k(x, y, t, \varepsilon);$$

$$\tilde{\zeta} \sim \sum_{k=0}^{N+1} \varepsilon^k \tilde{\zeta}_k(x, t), \quad \mathbf{v}_k = (v_{xk}, v_{yk}), \quad \mathbf{h}_k = (h_{xk}, h_{yk}),$$

где $y = \tilde{\zeta}(x, t)$ — уравнение свободной границы S_t .

Функции \mathbf{v}_0, p_0 описывают течение идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей L_t при начальном условии (1), значения их определяются выражениями [2].

Функции \mathbf{v}_k, p_k находятся в результате первого итерационного процесса [3] и удовлетворяют линейным уравнениям вида

$$(8) \quad \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial t} + \sum_{i+j=k} (\mathbf{v}_i, \nabla) \mathbf{v}_j = -\nabla p_k + \Delta \mathbf{v}_{k-2},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_k = 0, \quad \mathbf{v}_k|_{t=0} = 0 \quad (\mathbf{v}_{-1} \equiv 0, \quad k \geq 1).$$

В силу условия $\operatorname{rot} \mathbf{v}_0 = 0$ из (8) следует $\operatorname{rot} \mathbf{v}_k = 0$. Вводя Φ_k соотношением $\mathbf{v}_k = \operatorname{grad} \Phi_k$, из (8) получаем уравнения для определения Φ_k, p_k

$$(9) \quad \Delta \Phi_k = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial t} + \tau \tau^{-i} x \frac{\partial \Phi_k}{\partial x} - \tau \tau^{-i} y \frac{\partial \Phi_k}{\partial y} + p_k = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{v}_i \mathbf{v}_{k-1}.$$

Функции пограничного слоя \mathbf{h}_k, q_k проявляют себя в окрестности свободной границы S_t и компенсируют невязку у \mathbf{v}_k, p_k при выполнении динамического условия (5). Для построения функций \mathbf{h}_k, q_k вводим подвижные

локальные координаты (ρ, φ) вблизи границы L_t по формулам

$$x = \tau(1 - \rho\tau^{-2}\delta^{-1})\cos \varphi, \quad y = \tau^{-1}(1 - \rho\tau^2\delta^{-1})\sin \varphi,$$

$$\delta = \sqrt{\tau^2 \sin^2 \varphi + \tau^{-2} \cos^2 \varphi}, \quad \varphi \in [0, 2\pi],$$

где $x = \tau \cos \alpha$, $y = \tau^{-1} \sin \alpha$ — параметрические уравнения эллипса L_t ; ρ — расстояние от точки (x, y) до L_t ; φ — значение параметра α , соответствующее точке на L_t , ближайшей к (x, y) .

Определим уравнения, которым удовлетворяют функции \mathbf{h}_k, q_k . Пусть $h_{\rho k}, h_{\varphi k}, v_{\rho k}, v_{\varphi k}$ — соответственно компоненты векторов $\mathbf{h}_k, \mathbf{v}_k$ в координатах (ρ, φ) . Подставляя (7) в (3) и учитывая (8), (2), полученные уравнения записываем в локальных координатах. Разлагаем известные коэффициенты в ряды Тейлора по степеням ρ и учитываем справедливое при $\rho = 0$ соотношение $\partial\rho/\partial t + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla\rho = 0$, которое выражает свойство границы L_t быть жидким контуром для всех $t \geq 0$. Полагаем $\rho = \varepsilon s$ и приравниваем нулю коэффициенты при $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \dots, \varepsilon^N$. Как показано в [4], $\mathbf{h}_0 = \mathbf{u}_0 = \mathbf{h}_{\rho 1} = q_1 = 0$. Для определения \mathbf{h}_k, q_k получаются уравнения

$$(10) \quad \partial h_{\varphi k} / \partial t + sa(t, \varphi) \partial h_{\varphi k} / \partial s - a(t, \varphi) h_{\varphi k} = \partial^2 h_{\varphi k} / \partial s^2 + F_{k-1},$$

$$\partial q_{k+1} / \partial s = -2\tau\tau^{-1}\delta^{-2} \sin 2\varphi h_{\varphi k} + M_{k-1},$$

$$\frac{\partial h_{\rho, k+1}}{\partial s} = \sum_{n=0}^k s^n \delta^{-(3n+1)} \left(\delta^{-2} h_{\rho, k-n} - \frac{\partial^2 h_{\varphi, k-n}}{\partial \varphi^2} \right),$$

$$\mathbf{h}_k|_{t=0} = 0, \quad \mathbf{h}_k|_{s=\infty} = 0, \quad q_k|_{s=\infty} = 0, \quad F_0 = M_0 = 0.$$

Здесь $a(t, \varphi) = \tau\tau^{-1}\delta^{-2}(\tau^{-2}\cos^2\varphi - \tau^2\sin^2\varphi)$, а F_{k-1}, M_{k-1} известны и выражаются через $\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_k; \mathbf{h}_0, \dots, \mathbf{h}_{k-1}$.

Аналогично, применяя первый и второй итерационные процессы одновременно к динамическому условию (5), получим краевое условие для $h_{\varphi k}$ в (10) при $s = 0$

$$(11) \quad \partial h_{\varphi k} / \partial s = -(\delta^{-1} \partial v_{\rho, k-1} / \partial \varphi + \partial v_{\varphi, k-1} / \partial \rho + \delta^{-3} v_{\varphi, k-1}) + Q_{k-1} \quad (\rho = 0), \quad Q_0 = 0.$$

Для определения $h_{\varphi 1}$ положим $k = 1$ в (10), (11), введем новую функцию H по формуле $H = \delta h_{\varphi 1}$ и сделаем замену переменных $\xi = \delta(t, \varphi)s$, $t_1 = t$. Наконец, введя переменную β по формуле

$$\beta = \int_0^t \delta^2(t, \varphi) dt,$$

для $H(\xi, \varphi, \beta)$ получим задачу

$$\partial H / \partial \beta = \partial^2 H / \partial \xi^2,$$

$$H|_{\beta=0} = 0, \quad H|_{\xi=\infty} = 0, \quad \partial H / \partial \xi = \psi(\beta, \varphi) \quad (\xi = 0),$$

где $\psi(\beta, \varphi)$ — значение функции $2\tau\tau^{-1}\delta^{-2} \sin 2\varphi$ в переменных (β, φ) . Решение последней задачи в старых переменных имеет вид

$$h_{\varphi 1} = 2\delta^{-1} \pi^{-1/2} \sin 2\varphi \int_0^t \frac{\tau(u)}{\tau(u)} [\beta(t, \varphi) - \beta(u, \varphi)]^{-1/2} \times$$

$$\times \exp \left[-\frac{\delta^2(t, \varphi) s^2 / 4}{\beta(t, \varphi) - \beta(u, \varphi)} \right] du.$$

Из (10) находим

$$q_2 = 4\dot{\tau} \tau^{-1} \delta^{-4} \sin^2 2\varphi \int_0^t \frac{\dot{\tau}(u)}{\tau(u)} \operatorname{erfc} \left[\frac{s\delta(t, \varphi)}{2\sqrt{\beta(t, \varphi) - \beta(u, \varphi)}} \right] du.$$

Далее определим уравнения, которым удовлетворяют функции $\zeta_k(t, \varphi)$. Пусть $\rho = \zeta(t, \varphi, \varepsilon) \sim \sum_{k=0}^N \varepsilon^k \zeta_k(t, \varphi)$ — уравнение свободной границы S_t в локальных координатах, причем $\zeta_0 = 0$, так как $\rho = 0$ есть уравнение L_t . Полагаем $F = -\rho + \zeta(t, \varphi, \varepsilon)$ и, применяя первый и второй итерационные процессы одновременно к (4) [3], получим

$$(12) \quad \begin{aligned} \partial \zeta_k / \partial t - a(t, \varphi) \zeta_k &= [h_{\rho k} + v_{\rho k}]_{\rho=0} + N_{k-1}, \\ \zeta_k|_{t=0} &= 0, \quad N_0 = N_1 = 0 \quad (k \geq 1). \end{aligned}$$

Аналогично поступая с динамическим условием (6) на S_t , получим краевые условия для систем (9) на L_t

$$(13) \quad \begin{aligned} p_k + q_k + \delta \ddot{\tau} \zeta_k &= 2\partial v_{\rho, k-2} / \partial \rho + D_{k-1} \quad (\rho = 0), \\ D_0 &= D_1 = 0 \quad (k \geq 1). \end{aligned}$$

Как показано в [4], $p_1 = \dot{\zeta}_1 = v_1 = 0$, а N_{k-1} , D_{k-1} известны.

Теперь полагаем $k = 2$ в (9), (12), (13), исключаем p_2 и вводим функцию η по формуле $\eta = \delta \zeta_2$. Для определения Φ_2 , η получаем следующую задачу в эллипсе $D_t(x^2\tau^{-2} + y^2\tau^2 \leq 1)$

$$(14) \quad \begin{aligned} \Delta \Phi_2 &= 0, \\ \partial \Phi_2 / \partial t - \ddot{\tau} \eta &= 4\dot{\tau} \tau^{-1} \delta^{-4} \sin^2 2\varphi \ln \tau - 2a(t, \varphi) \quad (\rho = 0), \\ \partial \eta / \partial t - \delta \partial \Phi_2 / \partial \rho &= 4\delta^{-4} (\tau^{-2} \cos^2 \varphi - \tau^2 \sin^2 \varphi) \quad (\rho = 0), \\ \eta &= \Phi_2 = 0 \quad (t = 0). \end{aligned}$$

В области D_t переходим к эллиптическим координатам $(\sigma, \theta): x = c \operatorname{ch} \sigma \cos \theta$, $y = c \operatorname{sh} \sigma \sin \theta$ ($\sigma \geq 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$), где $\tau = c \operatorname{ch} \sigma_0$, $\tau^{-1} = c \operatorname{sh} \sigma_0$ — полуоси эллипса, $\sigma = \sigma_0$ — уравнение контура L_t . Функции Φ_2 , η разыскиваем в виде рядов

$$\Phi_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k(\tau) \frac{\operatorname{ch} k\sigma}{\operatorname{ch} k\sigma_0} \cos k\theta, \quad \eta = \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k(\tau) \cos k\theta.$$

Из (14) для коэффициентов ω_k , η_k получим систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\tau^2}{\sqrt{1+\tau^4}} \frac{d\omega_k}{d\tau} - \frac{2\tau^4}{(1+\tau^2)^2} \eta_k &= A_k(\tau), \\ \frac{\tau^2}{\sqrt{1+\tau^4}} \frac{d\eta_k}{d\tau} + kc_k \omega_k &= B_k(\tau), \\ \omega_k = \eta_k &= 0 \quad (\tau = 1). \end{aligned}$$

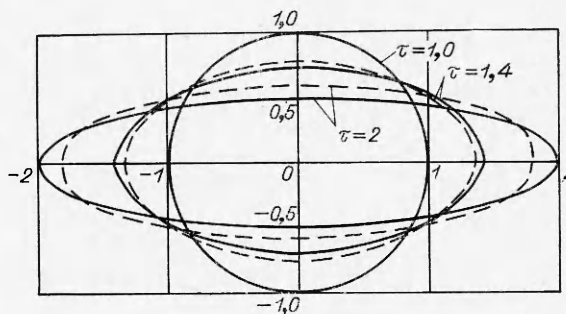
Коэффициенты A_k , B_k , c_k известны

$$\begin{aligned} A_0 &= -\frac{2\tau}{(1+\tau^2)\sqrt{1+\tau^4}} \left(1 - \tau^2 - \frac{4\tau^2 \ln \tau}{1+\tau^2} \right), \\ A_{2k} &= \frac{8\tau^3 (\tau^2 - 1)^{k-2}}{\sqrt{1+\tau^4} (1+\tau^2)^{k+1}} \left(\tau^2 - 1 - 2 \frac{\tau^4 - 2k\tau^2 + 1}{\tau^2 + 1} \ln \tau \right), \end{aligned}$$

$$D_{2k} = \frac{16k\tau^2 \ln \tau}{(1 + \tau^2)^2} \left(\frac{\tau^2 - 1}{\tau^2 + 1} \right)^{k-1}, \quad A_{2k+1} = B_{2k+1} = 0 \quad (k \geq 0),$$

$$c_0 = c_{-2} = 0, \quad c_2 = \frac{2\tau^2}{1 + \tau^4}; \quad c_{2k} = \frac{c_2 + c_{2k-2}}{1 + c_2 c_{2k-2}} \quad (k \geq 1).$$

Решение последней системы получено численно на ЭВМ М-222 методом Рунге — Кутты. На фигуре изображен вид свободной границы при $\tau=1$, $\tau=1,4$ и $\tau=2$, сплошной линией изображена граница L_i , штриховой — S_i . Как в случае, когда эллипс вытягивается с течением времени, так и в случае, когда он сплюсчивается, действие вязкости замедляет процесс, вязкость стремится «округлить» свободную границу.



Автор выражает благодарность Л. С. Срубцику, В. И. Юдовичу за постановку задачи и обсуждение результатов.

Поступила 15 III 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л. В. Задача о неустановившемся движении жидкости со свободной границей.— В кн.: Общие уравнения и примеры. Новосибирск, «Наука», 1967.
2. Ламб. Гидродинамика. М.— Л., Гостехиздат, 1947.
3. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром.— «Усп. мат. наук», 1957, т. 12, № 5 (77).
4. Батицев В. А., Срубчик Л. С. Об асимптотике свободной поверхности жидкости при исчезающей вязкости.— «Докл. АН СССР», 1975, т. 222, № 4.

УДК 539.21

НАЧАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ПСЕВДООЖИЖЕНИЯ

Ю. А. Бувевич, Г. А. Минаев

(Москва)

При протекании газа или капельной жидкости в зернистом слое на частицы действуют гидродинамические силы, которые приводят к существенному изменению напряженного состояния по сравнению со статическим состоянием, характерным для данного слоя при отсутствии потока. В частности, при определенных режимах течения становится возможным появление в слое растягивающих нормальных напряжений, вызывающих локальные нарушения сплошности слоя и его фактическое разрушение как сыпучей сплошной среды. При этом частицы теряют регулярные контакты одна с другой и переходят во взвешенное («псевдооживленное») состояние. Несмотря на большое число эмпирических исследований псевдооживленных систем самых разных типов и широкое распространение техники псевдооживления в разных отраслях промышленности, фундаментальный вопрос о причинах и условиях перехода слоя частиц в псевдо-