

14. Мамин В. М. К вопросу о механизме излучения дискретного тона сверхзвуковыми струями // Исследования по вибрационному горению и смежным вопросам.— Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1974.
15. Гапонов С. А., Желтухин Н. А. Неустойчивость и акустика сверхзвуковых струй и пограничных слоев // Модели механики неоднородных систем.— Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1989.
16. Мамин В. М. Экспериментальное исследование тонального излучения, возникающего при истечении сверхзвуковых струй // Исследования по вибрационному горению и смежным вопросам.— Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1974.
17. Норэм Т. Д. Снижение дискретной составляющей шума сверхзвуковых струй // АКТ.— 1983.— Т. 1, № 11.
18. Скучик Е. Основы акустики.— М.: Мир, 1976.— Ч. 2.
19. Глазнев В. Н. Автоколебания при истечении сверхзвуковых нерасчетных струй // Моделирование в механике.— 1987.— Т. 1, № 6.
20. Миронов С. Г. Положение точки замыкания обратной связи при автоколебаниях свободных сверхзвуковых струй // Газовые струи: Тез. XV Всесоюз. семинар.— Ленинград, 1990.

г. Новосибирск

Поступила 16/V 1991 г.

УДК 532.529

A. B. Федоров

СТРУКТУРА КОМБИНИРОВАННОГО РАЗРЫВА В ГАЗОВЗВЕСЯХ ПРИ НАЛИЧИИ ХАОТИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ ЧАСТИЦ

В [1] выведены условия на комбинированном разрыве (КБР) в газовзвеси, т. е. на такой линии в пространстве (x, t) , где некоторые параметры течения испытывают разрыв, но отсутствует поток массы частиц. Там же дан краткий обзор работ в области механики гетерогенных сред и газовой динамики в каналах с резко изменяющейся геометрией, в которых изучаются сходные проблемы. Ниже исследуется структура КБР в газовзвесях с учетом хаотического давления частиц. При этом, как и в [1], структура КБР понимается в смысле существования течения газа, который набегает на облако частиц и тормозится или ускоряется в нем.

Рассмотрим конечное облако мелких частиц, диспергированных в одномерном пространстве. Пусть в это облако втекает газ. На кромке облака параметры газа претерпевают разрывы, а в дальнейшем газ протекает через совокупность частиц с переменной концентрацией. На некотором конечном расстоянии от входа в облако газ вытекает из него. Изучим данное течение на основе модели механики гетерогенных сред. Уравнения, описывающие КБР, выведены в [1] для случая, когда пре-небрегается хаотическим движением частиц. В данном варианте записанные в сопутствующей системе координат эти условия имеют вид

$$(1) \quad [\rho_i u_i] = 0, \quad i = 1, 2, \quad p_2 = p_\sigma m_2, \quad p_\sigma = \text{const}, \\ [c_1 u_1 + m_1 p] = [m_1] p', \quad [c_2 u_2 + m_2 p + p_2] = [m_2] p', \\ m_1 + m_2 = 1, \quad p = a^2 \rho, \quad c_i = \rho_i u_i, \quad c_2 = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_1 = u.$$

Здесь u_i, m_i — скорость и объемная концентрация i -й фазы; $i = 1$ — газ; $i = 2$ — частицы; p — давление газа; p_2 — хаотическое давление частиц; $p' = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x_0(t)-\varepsilon}^{x_0(t)+\varepsilon} p(x, t) \delta(x - x_0(t)) dx$ — давление, действующее вдоль фронта КБР. Уравнения сохранения массы, импульса для каждой из фаз в системе координат $\xi = x - Dt$ таковы:

$$(2) \quad c_1 \dot{u} + m_1 \dot{p} = -m_2 f, \quad p = a^2 \rho, \quad c_1 = \rho m_1 = \rho_0 u_0, \\ p_2 + m_2 \dot{p} = m_2 f, \quad m_1 + m_2 = 1, \quad f = \rho_2 c_D \operatorname{Re} u / 24 \tau_{ct} m_2, \quad \tau_{ct} = 2r^2 \rho_{22} / 9 \mu$$

(точка означает производную $d/d\xi$). Тогда постановка задачи об определении структуры КБР в газовзвеси сводится к краевой задаче: найти функции $(\rho, u, p, m_2, p_2) = \Phi$, константу L в области $R_\xi \{R_\xi : \xi \in (0, L)\}$, удовлетворяющие в ней уравнениям (2), краевым условиям (1) при $\xi = 0$ и условию

$$(1') \quad M = M_k \text{ при } \xi = L.$$

Сведем задачу (1), (1'), (2) к изучению краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения. Уравнения (2) обладают законом сохранения импульса для смеси в целом: $p + c_1 u + p_2 = c_2 = p_0 + c_1 u_0$. Используя следствие уравнения неразрывности для газа, записанное в виде $p = a^2 c_1 / m_1 u = c_2 - c_1 u - p_\sigma m_2$, найдем $dm_2/d\xi = (du/d\xi)(m_1 \times (p - c_1 u)/(p + m_1 p_\sigma))$, $p = -c_1 u - p_\sigma m_2$, из которого вытекает $p = -ux(c_1 up + pp_\sigma m_1)/u(p + m_1)$. Подставив его в первое уравнение из (2), получим

$$(3) \quad B_1(M) \frac{M^2 - \tilde{a}^2}{M^2} \dot{M} = - \frac{\rho_2}{\tau_{ct} c_1} \frac{c_D \text{Re}}{24} M,$$

где $B_1(M) = (m_2 P + m_1)/(P + m_1)$; $P = p/p_\sigma$; $\tilde{a}^2 = m_1/(m_1 + m_2 P)$.

Пусть $p_\sigma \rightarrow 0$, тогда $P \rightarrow \infty$, $B_1 \rightarrow m_2$, $\tilde{a} \rightarrow 0$ и (3) переходит в уравнение $c_1 \dot{u} = m_2 f$, которое использовалось в [1] для описания КБР в смеси без хаотического давления частиц.

Перепишем краевые условия в задаче (1), (1'), (2) в терминах функции M , что будет означать получение адиабаты Гюгонио для КБР (при $\xi = 0$):

(4)

$$H(M, M_0) = m_1 M_0 M^2 + m_1 M (m_2 p_\sigma - (1 + M_0^2)) + M_0 = A M^2 + B M + C = 0$$

($p_\sigma = p_\sigma / \rho_0 a^2$, $M_0 = u_0/a$). Две ветви решения (4) имеют вид $M^\pm = (-B \pm \sqrt{\tilde{D}})/2A$ (A, B, C — коэффициенты квадратного трехчлена, дискриминант $\tilde{D} = m_1 [(m_2 p_\sigma - \alpha)^2 - (m_2 p_\sigma - \alpha)^2 m_2 - 4M_0^2]$, $\alpha = 1 + M_0^2$). Функция $\tilde{D}(m_1)/m_1$ представляет собой полином третьей степени относительно m_1 , три корня которого, найденные при $p_\sigma \gg 1$, имеют вид $m_1^\pm \approx 1 - (1 \pm M_0^2)^2/p_\sigma$, $m_1^0 \approx 4M_0^2/p_\sigma$. Отсюда, поскольку $\tilde{D}(m_1 = 1) > 0$, корни уравнения (4) существуют при

$$(5) \quad m_1 \in (m_1^0, m_1^+) = I_1, \quad m_1 \in (m_1^-, 1) = I_2, \quad m_* = m_1^-.$$

Легко видеть при этом, что в интервале I_1 значения M^\pm отрицательны, т. е. не определяют физически корректного решения. В I_2 исследуем M^\pm более подробно. Пусть $\tilde{D} = 0$, тогда $M^\pm = M_* = m_1^{-1/2}$ и в точке разворота при $p_\sigma \gg 1$ $M_* \approx 1 + m_2/2 > 1$. В этом же приближении $\tilde{a} \sim 1 - m_2 P$, отсюда $M_*/\tilde{a} \approx 1 + m_2(0,5 + P) > 1$. Кроме того, при $m_1 = 1$ $M^\pm = M_0^{-1}, M_0$. Выбирая $M_0 < 1$, получим в силу непрерывности функции $M^\pm(m_1)$, что при некотором $m_{**} \in (m_*, 1)$ $M_-/\tilde{a} = 1$, т. е. кривая конечных состояний за КБР обладает свойствами, аналогичными тем, что имеются при $p_\sigma = 0$ [1], изменяются лишь количественные характеристики. Эта ситуация остается справедливой и для $M_0 > 1$. Отсюда следует

Утверждение. Положительное решение уравнения (4), определяющего параметры течения газа за фронтом КБР при $p_\sigma \gg 1$, существует в области $m_1 \in I_2$ в виде верхней (сверхзвуковой) и нижней (смешанной) ветви решений. При этом на нижней ветви решения при $m_1 \in (m_*, m_{**}) = I_{22}$ параметры за фронтом КБР сверхзвуковые, при $m_1 \in (m_{**}, 1) = I_{21}$ дозвуковые, при $m_1 = m_{**}$ звуковые ($M_-/\tilde{a} = 1$).

Таблица 1

| m_1 | L_m | $L_m \bar{m}_2$ | L_m |
|---------|-------------|-----------------|--------|
| 0,9967 | \tilde{M} | 1,46 | 442,0 |
| 0,9970 | 0,302 | 3,78 | 1259 |
| 0,99927 | 0,120 | 32,1 | 4585,9 |

Таблица 2

| M_0 | \tilde{M} | $\bar{m}_2 L$ |
|-------|-------------|---------------|
| 0,1 | 0,133 | 25,7 |
| 0,2 | 0,251 | 6,05 |
| 0,3 | 0,401 | 1,68 |
| 0,4 | 0,554 | 0,538 |
| 0,5 | 0,802 | 0,057 |

Таким образом, показано, что при $1 \geq m_1 \geq m_* \approx 1 - (1 - M_0^2)^2 / p_\sigma$ условия (4) на КБР позволяют найти значение функции $M = \tilde{M}(m_1)$ за фронтом КБР. Добавляя сюда условие $M = M_k$ на свободной границе $\xi = L$, видим, что задача (1), (2) сведена к краевой задаче (3), (1'), (4). При этом функция m_1 определяется из интегралов сохранения как $m_1 = m_1(M)$.

Рассмотрим некоторые аспекты качественного поведения задачи (3), (1'), (4). Пусть $M_0 < 1$, $m_1 \in (m_{**}, 1)$. Тогда значение \tilde{M} , принадлежащее нижней ветви решения (4), меньше 1, поэтому $\tilde{M} > 0$ и дозвуковой поток газа с трением разгоняется вплоть до скорости звука. Здесь m_1 находится из уравнения $m_1^2 M p_\sigma + m_1 M (1 + M_0^2 - M_0^2 M - p_\sigma) - M_0 = 0$. При этом определяется также и длина облака частиц L , точка в которой $M = M_k$. Отметим, что в точке течения, где $M_k = 1$, имеется бесконечный градиент скорости.

Аналогичное движение газа изучалось в [2] применительно к описанию течения в трубе с учетом трения и теплоподвода. Введено, в частности, понятие: максимум приведенной длины трубы для некоторого начального состояния.

Следуя [2], определим максимальную длину облака частиц L_m как размер, при котором на задней кромке $M_k = 1$. Тогда, если $M_0 < 1$, $m_1 \in (m_{**}, 1) = I_{21}$, то при $L < L_m$ на подходе к задней границе облака реализуется дозвуковой режим, при $L = L_m$ — звуковой.

Вообще говоря, можно построить формальное решение и при $M_0 < 1$, $m_1 \in I_{22}$, когда $\tilde{M} > 1$ и принадлежит нижней ветви. Однако здесь придется делать искусственное предположение о работе передней кромки КБР как сопла Лаваля, которое переводит непрерывно-дозвуковое течение в сверхзвуковое. В силу (3) $\tilde{M} < 0$ и течение тормозится до звукового (либо при $L < L_m$ до сверхзвукового). На случае $L > L_m$ следует остановиться особо, он стационарно не реализуется.

При $M_0 < 1$, $m_1 \in I_2$, но $\tilde{M} > 1$, т. е. \tilde{M} принадлежит верхней ветви КБР, решение $M = M(x)$ описывается убывающей функцией. Введем L_* (длину облака, при которой конечное значение есть $M = M_*$). Тогда при $L < L_*$ $M_k > M_*$, при $L = L_*$ $M = M_*$. Однако здесь, как и ранее, проблема в обосновании перехода от $M_0 < 1$ на левой кромке КБР к $\tilde{M} > 1$ на ее заднем фронте. Подобный переход неустойчив.

Пусть $M_0 > 1$. При $m_1 \in I_{21}$, $L < L_m$ на выходе из облака имеем дозвуковое течение, при $L = L_m$ — звуковое. Если $m_1 \in I_{22}$, сверхзвуковое течение с $M_0 > 1$ при входе в стесненное пространство (газовзвесь) тормозится до $\tilde{M} \in (1, M_*)$ ($M_* \equiv M^\pm(m_*)$) и при $L < L_m$ переходит на выходе из облака в сверхзвуковое с меньшей скоростью, при $L = L_m$ — в звуковое. Если же $m_1 \in (m_{**}, 1)$, а \tilde{M} принадлежит верхней ветви, то L_* определяется, как и выше. При $L < L_*$ конечное состояние $M_k \geq M_*$.

Рассмотрим приближенное аналитическое решение задачи о структуре течения в КБР. Пусть $M_0 = 0,1$, $\rho_{22} = 2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $a_\sigma = 100 \text{ м/с}$, $p_\sigma = \rho_{22} a_\sigma^2 = 2 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2$, $\rho_0 = \rho_{11,0} = 1 \text{ кг/м}^3$, $a = 300 \text{ м/с}$, $p_0 = \rho_0 a^2 = 9 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^2$, $p_\sigma/p_0 = 2,22 \cdot 10^2 \gg 1$, $m_* \sim 0,9967$. Выберем $m_1 \in$

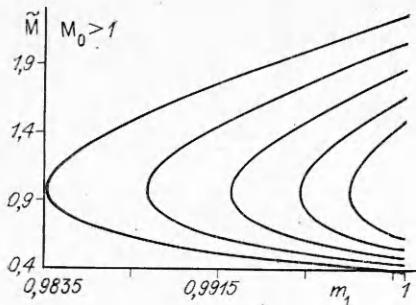


Рис. 1

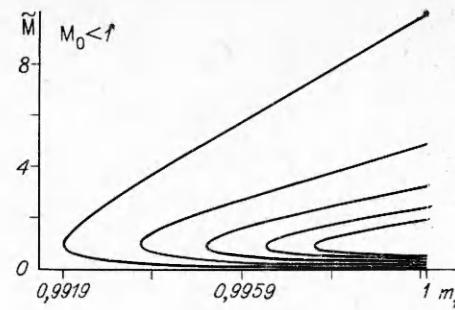


Рис. 2

$\Leftarrow I_{21}$. Поскольку решение для m_1 и m_2 меняется в малых пределах, то можно положить $m_1 \sim 1$, $m_2 \sim m_{20}$ и для $c_D Re = 24$ получим $m_2 x = \ln(\tilde{M}/M) + (\tilde{M}^{-2} - M^{-2})/2$.

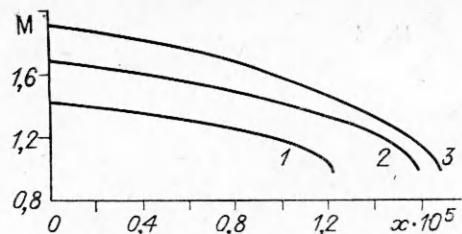
В табл. 1 приведены данные по L_m при $M_0 = 0,1$ для различных m_1 на входе в КБР. Видно, что учет хаотического давления частиц ведет к существенному по сравнению с [1] увеличению длины облака, которое может стационарно распространяться в потоке газа. Эта длина тем больше, чем меньше концентрация частиц.

Представляет интерес влияние начальной скорости потока при фиксированной объемной концентрации m_1 на входе в КБР на L_m . Данные табл. 2 (при $m_1 = 0,999$) указывают на уменьшение приведенной длины облака L_m с ростом M_0 , что естественно в силу увеличения M_0 .

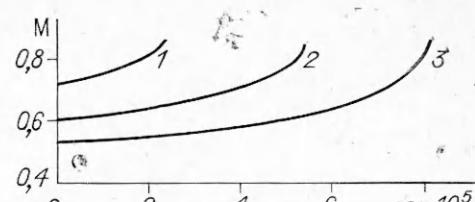
Обсудим результаты в общем случае $m_1 \neq 1$, $m_2 \neq m_{20}$. При проведении численных расчетов использовались в дополнение к вышеприведенным следующие значения констант: $\mu = 2 \cdot 10^{-5}$, $\tau_{ct} = 2R^2\rho_{22}/9\mu$, $\mu_0 = \rho_0 x_0/a$, $x_0 = a\tau_{ct}$ (индексом нуль отмечены параметры, являющиеся масштабами обезразмеривания).

На рис. 1, 2 дана зависимость числа Маха за фронтом КБР для $p_\sigma = 10^2$, $M_0 > 1$ и $M_0 < 1$ соответственно. Как видно, для сверхзвукового набегающего потока характерна более сжатая кривая состояний за фронтом КБР. Границная точка m_* , определяющая область существования действительных состояний за КБР, получена выше в асимптотическом представлении $m_1^- = 1 - (1 - M_0^2)^2/p_\sigma$. Отсюда вытекает, что с ростом скорости движения частиц предельное значение объемной концентрации частиц, при которой существует стационарное течение, убывает.

Остановимся на физической интерпретации верхней и нижней ветвей решения $\tilde{M}(m_1)$. Пусть $M_0 > 1$, т. е. сверхзвуковой поток входит в запыленное пространство. Сечение, в котором течет газ, уменьшается. Следуя газодинамической аналогии с течением в трубке тока, можно установить, что значение скорости потока газа при этом уменьшится. Сверхзвуковой поток затормозится, и дальнейшее движение смеси будет осуществляться в соответствии с (4). Иллюстрацией к этому типу течения является распределение числа Маха вдоль облака для $p_\sigma = 10$, $R = 10^{-4}$ м (радиус частицы), $m_{10} = 0,9758$ (рис. 3, линии 1—3 для $M_0 = 1,7; 1,9; 2,1$). Затормозившись на кромке КБР, газ продолжает тормозиться до скорости $u_* = 1/\sqrt{m_{1*}}$ на выходе из облака при $\xi = L_* = 0$, а концентрация газа падает до $m_1 = m_*$. Если же при $m_1 = m_{10}$ и данные Коши взяты на нижней ветви, то в присоединенной к кромке КБР ударной волне газ тормозится до $\tilde{M} < 1$, а затем разгоняется. Отметим, что качественно подобный тип течения газовзвесей наблюдался в [3]. Там был отмечен факт существования предельной концентрации частиц $m_2 = 0,01$ для бронзы и оргстекла (аналог величины m_* в нашей модели), при которой индивидуальные ударные волны вблизи от частиц сливаются и образуют присоединенный висячий скачок перед облаком частиц. Если $M_k = 0,82$ (как это показано на рис. 4, где обозначение соответствует рис. 3), то приведенная длина облака с увеличением начальной скорости



Р и с. 3



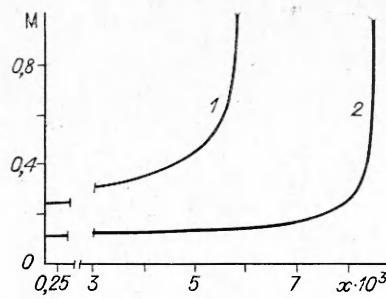
Р и с. 4

газа возрастает. При этом объемная концентрация газа падает до m_{**} , если $M_k = 1$.

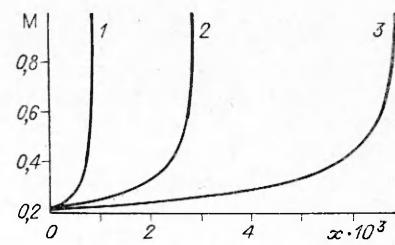
Исследовалось влияние хаотической скорости частиц a_σ на картину течения в зоне релаксации. Оказалось, что увеличение a_σ приводит к уменьшению длины облака L_m (рис. 5, линия 1 для $M_0 = 0,1$, $m_{10} = 0,9919$, $\tilde{M} = 0,1098$, $p_\sigma = 10^2$, линия 2 для $p_\sigma = 10$, $m_{10} = 0,9943$, $\tilde{M} = 0,240$). Действительно, с ростом p_σ убывает предельная концентрация частиц m_{2*} и их становится меньше. Как следствие происходит меньшее рассеивание импульса на частицах, т. е. газ быстрее разгоняется до звуковой скорости. Аналогичное влияние оказывает увеличение радиуса частиц R : с ростом радиуса уменьшается ширина облака. Вызвано это тем обстоятельством, что увеличивается ускорение потока в облаке с большими значениями радиуса частиц. Это легко видеть из оценки $a \approx a_0(1 + 6Re^{2/3})$, где a — ускорение газа, a_0 — его характерное значение, а для коэффициента сопротивления принята для примера формула Клячко $c_D = 24(1 + 6Re^{2/3})/Re$. Иллюстрацией этого положения является рис. 6 ($M_0 = 0,1$, $\tilde{M} = 0,2089$, $p_\sigma = 10$, $m_{10} = 0,9514$, линии 1—3 для $R = 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}$). На рис. 7 приводятся распределения скорости газа в облаке для коэффициента сопротивления Стокса c_D и из [4] (линии 1, 2). Большая длина облака в случае закона Стокса для обтекания частицы обусловлена меньшим ее ускорением в процессе течения, как это было объяснено выше при изучении влияния вариации радиуса.

Представляет интерес распределение концентрации частиц в облаке, изображенное на рис. 8 ($M_0 = 0,1$, $\tilde{M} = 0,1098$, $p_\sigma = 10$) для $R = 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}$ (линии 1—3). Течение здесь подобно течению газа в дозвуковой области сопла Лаваля. Действительно, дозвуковое течение за КБР при $\tilde{M} < 1$ разгоняется под действием втекания газа в сужающееся сечение, поскольку концентрация частиц к концу облака возрастает. Можно отметить довольно резкое изменение проходного сечения газа при $R = 10^{-4}$ м, дальнейшее уменьшение радиуса частиц приводит к стягиванию профиля концентрации частиц.

Иное распределение частиц в облаке, если набегающий поток сверхзвуковой ($m_{10} = 0,9757$, $R = 10^{-4}$, $p_\sigma = 10$, $M_0 = 1,7$, $\tilde{M} = 0,72$, $M_0 = 1,9$, $\tilde{M} = 0,6$, $M_0 = 2,1$, $\tilde{M} = 0,53$), а течение за кромкой дозвуковое. Физически это соответствует присоединенной ударной волне. В данном



Р и с. 5



Р и с. 6

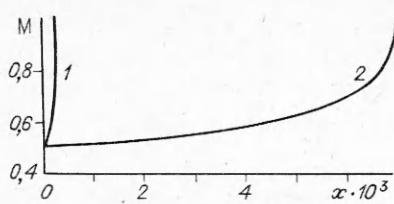


Рис. 7

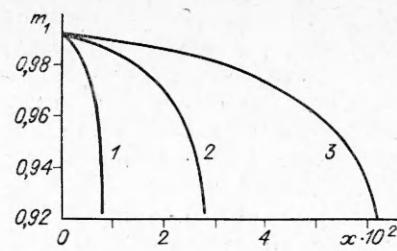


Рис. 8

случае частицы в облаке уплотняются довольно слабо, причем с ростом M_0 облако растет и частицы к концу облака уплотняются.

Таким образом, предложена математическая модель структуры КБР в газовзвеси, учитывающая хаотическое давление частиц. Даны классификация устойчивых и неустойчивых типов стационарных течений газовзвесей в КБР и их численная иллюстрация. В качестве аналога одного из возможных режимов приводится экспериментально наблюдаемый факт существования течения с присоединенной ударной волной на облаке частиц.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федоров А. В., Фомин В. М. К теории комбинированного разрыва в газовзвесях // Физическая газодинамика регулирующих сред.— Новосибирск: Наука, 1990.
2. Черный Г. Г. Газовая динамика.— М.: Наука, 1988.
3. Бойко В. М. Исследование динамики ускорения, разрушения и воспламенения частиц за ударными волнами методами лазерной визуализации: Дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Новосибирск, 1984.
4. Циклаури Г. В., Данилин В. С., Селезнев Л. И. Аднабатные двухфазные течения.— М.: Атомиздат, 1973.

г. Новосибирск

Поступила 4/VII 1991 г.

УДК 532.526

C. E. Грубин, И. Н. Симакин, В. Н. Тригуб

ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК УСТОЙЧИВОСТИ СЖИМАЕМОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ПЛАСТИНЕ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ МАХА

Исследуется устойчивость пограничного слоя на пластине, обтекаемой гелием, при больших числах Маха ($M_\infty = 8-25$). При нахождении профилей скорости и температуры невозмущенного течения учитывалось взаимодействие пограничного слоя с внешним потоком. Для решения задачи линейной теории устойчивости сжимаемых течений построен псевдоспектральный метод, позволяющий при сравнительно небольшом числе базисных функций в представлении приближенного решения рассчитывать характеристики устойчивости в широких диапазонах изменения чисел Рейнольдса и Маха.

Проведено сравнение характеристик устойчивости, полученных в одном случае для профилей, вычисленных с учетом взаимодействия, в другом — для профилей автомодельного решения Блазиуса. Установлено, что при $M_\infty \approx 20$ учет взаимодействия приводит к увеличению критического числа Рейнольдса R_{xc} более чем в 2 раза.

Несмотря на возрастающий интерес к устойчивости гиперзвукового пограничного слоя [1—7], область очень больших чисел Маха ($M_\infty > 10$) исследована явно недостаточно. Основная причина заключается в том, что в большинстве работ изучалась устойчивость пограничного слоя в воздухе, который считался совершенным газом. Диапазон значений M_∞ ,