

тическое поведение системы вблизи первой критической нагрузки является устойчивым для любых r . Однако если учесть вторую поправку $\Lambda_n^{(2)}$ к собственному значению $\Lambda_n^{(0)}$ линеаризованной задачи, то ситуация меняется в худшую сторону, точнее, область устойчивого закритического поведения системы сужается. Действительно, вторая поправка

$$(5.5) \quad \Lambda_n^{(2)} = \frac{21}{512} \gamma_n^4 n^6 + \frac{\gamma_n^4 n^2}{512} r \left[-24\beta^2 + 26\beta - 33 + \frac{(\beta - 2)(5\beta + 6)}{9n^4/r - 1} \right].$$

Покажем, что $\Lambda_n^{(2)} < 0$ для любых β и $n^4 < r < n^2(n + 1)^2$. Для этих значений r выполняется неравенство $9n^4/r - 1 > 5/4$. Поэтому для $\Lambda_n^{(2)}$ имеем оценку

$$\begin{aligned} \Lambda_n^{(2)} &< \gamma_n^4 n^2 \{21n^4 + r[-24\beta^2 + 26\beta - 33 + 4(\beta - 2)(5\beta + 6)/5]\} / 512 = \\ &= \gamma_n^4 n^2 \{21n^4 - r(100\beta^2 - 114\beta + 213)/5\} / 512 < \gamma_n^4 n^2 (21n^4 - 36r) / 512. \end{aligned}$$

Следовательно, $\Lambda_n^{(2)} < 0$ для $r > 7n^4/12$, т.е. везде, где $\Lambda_n^{(1)} < 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П. О продольном изгибе стержней в упругой среде // Изв. С.-Петербург. политехн. ин-та. — 1907. — Т. 7.
2. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем. — М.; Л.: ОГИЗ, 1946.
3. Panayotounakos D.E. Non-linear and buckling analysis of bars lying on an elastic foundation // Int. J. Non-Linear Mech. — 1989. — V. 24(4).
4. El Naschie M.S. Exact asymptotic solution for the initial postbuckling of a strut on a linear elastic foundation // ZAMM. — 1974. — Bd 54, N 11.
5. Томпсон Дж.М.Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике. — М.: Мир, 1985.
6. Waas A.M. Initial postbuckling behavior of beams on non-linear elastic foundations // Mech. Res. Com. — 1990. — V. 17(4).
7. Vallabhan C.V.G., Das Y.C. A refined model for beams on elastic foundations // Intern. J. Solids and Struct. — 1991. — V. 27(5).
8. Найфе Ф.Х. Методы возмущений. — М.: Мир, 1976.
9. Keener J.P., Keller H.V. Perturbed Bifurcation Theory // Arch. Rat. Mech. Anal. — 1973. — V. 50, N 3.
10. Рейсс Э.Л. Потеря устойчивости колонны — элементарный пример бифуркации // Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения. — М.: Мир, 1974.
11. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее применения. — М.: Мир, 1980.
12. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. Кн. 1. — М.: Мир, 1984.

г. Новосибирск

Поступила 7/V 1993 г.

УДК 539.3:534.1

Ю.М. Волчков, Г.В. Иванов, О.Н. Иванова

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОСКИХ РАВНОВЕСНЫХ ФОРМ ТОНКИХ СТЕРЖНЕЙ МЕТОДОМ САМОУРАВНОВЕШЕННЫХ НЕВЯЗОК

Для вычисления плоских равновесных состояний тонких упругих стержней наряду с аналитическими методами [1] используются и численные методы, основанные на сведении нелинейных краевых задач к задачам Коши [2] или к последовательности линейных краевых задач [1, 3].

В [3] последовательные приближения строятся на основе уравнений, нелинейная часть которых принимается равной ее значению в предыдущем

приближении. Указан интервал нагрузок, при которых последовательность приближений сходится.

В [1] последовательные приближения строятся на основе линеаризации уравнений равновесия стержня и решения линеаризованных разностных уравнений прямыми методами. Линеаризованные разностные уравнения могут не удовлетворять условиям устойчивости вычисления их решения «обычной» прогонкой [4]. В [1] использовалась немонотонная прогонка [5]. При построении последовательности приближений на основе решения линеаризованных разностных уравнений прямыми методами возможна ситуация, когда последовательность приближений не сходится. Отсутствие сходимости может возникать, например, из-за того, что одной и той же нагрузке могут отвечать несколько состояний и приближения могут «метаться» между этими разными состояниями. Компенсация этого недостатка построения приближений на основе решения линеаризованных разностных уравнений прямыми методами возможна лишь за счет подбора соответствующих начальных приближений.

Для вычисления равновесных форм тонких стержней можно использовать метод локальных вариаций [6]. Получаемые этим методом последовательности приближений сходятся при любой нагрузке, однако сходимость может быть очень медленной, и поэтому вычисление решений методом локальных вариаций может потребовать значительных затрат вычислительных ресурсов.

Излагаемый ниже алгоритм предназначен для решения задач о плоских формах равновесных состояний тонких упругих стержней при «мертвых» нагрузках. Для решения задач о равновесных состояниях при «следящих» нагрузках этот алгоритм применим лишь в случае, когда решения при «следящих» нагрузках можно получить как предел последовательности решений при «мертвых» нагрузках.

По приведенному ниже алгоритму вычисляются последовательности приближений с монотонно уменьшающимися величинами потенциальной энергии. Поэтому можно получить лишь те состояния равновесия, в которых экстремум потенциальной энергии изгиба и внешних сил не является максимумом.

В алгоритме используется вариационно-разностная формулировка задачи. Последовательности приближений строятся на основе минимизации квадратичного функционала, аппроксимирующего потенциальную энергию изгиба и внешних сил. Рассматриваемые варианты минимизации можно интерпретировать как построение последовательностей приближенных решений линеаризованных разностных уравнений. В этих последовательностях сумма невязок или сумма невязок и сумма моментов невязок линеаризованных уравнений равны нулю в последовательно расширяющейся области. Отсюда название — метод самоуравновешенных невязок.

При достаточно малых величинах вариаций искомых функций уменьшение квадратичного функционала, аппроксимирующего потенциальную энергию изгиба и внешних сил, влечет и уменьшение потенциальной энергии. Это позволяет строить последовательности приближений, сходимость которых обусловлена тем, что им соответствуют монотонно убывающие последовательности энергии. Из численных экспериментов следует, что режим вычисления приближений с монотонно уменьшающимися величинами потенциальной энергии устанавливается после нескольких итераций и без введения каких-либо ограничений на величины вариаций искомых функций.

1. Формулировка задачи. Уравнения плоских равновесных состояний тонких стержней [1] запишем в виде

$$(1.1) \quad \frac{dH}{ds} = p \cos \varphi, \quad \frac{dF}{ds} = -p \sin \varphi;$$

$$(1.2) \quad \frac{dM}{ds} = H \cos \varphi - F \sin \varphi, \quad M = -D \left(\frac{d\varphi}{ds} - \frac{d\varphi_0}{ds} \right);$$

$$(1.3) \quad \frac{dx}{ds} = \cos \varphi, \quad \frac{dy}{ds} = \sin \varphi,$$

где p — поверхностная нагрузка; F, H — компоненты вектора усилий; M — изгибающий момент; $D = D(s)$ — изгибная жесткость стержня; $\varphi(s), \varphi_0(s)$ — угол наклона оси стержня в деформированном и недеформированном состояниях (рис. 1).

Без ограничения общности можно принять

$$(1.4) \quad \varphi(0) = x(0) = y(0) = 0.$$

В качестве граничных условий для φ при $s = l$ положим

$$(1.5) \quad [\alpha M + (1 - \alpha)\varphi]_{s=l} = \gamma$$

(α равно нулю или единице, γ — заданная величина).

Ограничимся рассмотрением класса задач, в которых при $s = l$ заданы величины H, F , и, следовательно, интегрированием уравнений (1.1) могут быть найдены $H(s), F(s)$. Назовем нагрузку «мертвой», если H, F не зависят от $\varphi(s)$, и «следящей», если H, F зависят от $\varphi(s)$. При «мертвых» нагрузках решение задачи сводится к интегрированию уравнений (1.2) при граничных условиях (1.4), (1.5). Координаты x, y оси стержня находятся интегрированием уравнений (1.3) при условиях (1.4).

Решению задачи при «мертвых» нагрузках соответствует экстремум функционала

$$(1.6) \quad \Psi = \frac{1}{2} \int_0^l [D \left(\frac{d(\varphi - \varphi_0)}{ds} \right)^2 - 2(F \cos \varphi + H \sin \varphi)] ds + \alpha \gamma \varphi(l)$$

в классе функций φ , удовлетворяющих условиям (1.4), (1.5), если $\alpha = 0$. Величина Ψ — потенциальная энергия изгиба и внешних сил.

Узлами $s_i = (i - 1)h$ ($i = 1, \dots, N + 1, h = l/N$) разобьем ось стержня на N интервалов и заменим функционал (1.6) конечномерным

$$(1.7) \quad \Psi' = \frac{h}{2} \sum_{i=1}^N \left[D_{i+1/2} \left(\frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i - \varphi_{i+1}^0 + \varphi_i^0}{h} \right)^2 - 2T_{i+1/2} \right] + \alpha \gamma \varphi_{N+1},$$

где

$$(1.8) \quad T_{i+1/2} = F_{i+1/2} \cos \varphi_{i+1/2} + H_{i+1/2} \sin \varphi_{i+1/2}, \\ \varphi_{i+1/2} = \frac{1}{2}(\varphi_i + \varphi_{i+1}), \quad F_{i+1/2} = \frac{1}{2}(F_i + F_{i+1}), \quad H_{i+1/2} = \frac{1}{2}(H_i + H_{i+1}), \\ \varphi_1 = 0, \quad \varphi_{N+1} = \gamma, \quad \text{если } \alpha = 0.$$

Ниже рассматривается задача о построении последовательностей приближений с монотонно уменьшающимися величинами функционала (1.7).

2. Элементы схемы построения последовательностей приближений.

Пусть $\bar{\varphi}_i (i = 1, 2, \dots, N + 1)$ удовлетворяют условиям (1.8). Заменяя φ_i в (1.7) на $\bar{\varphi}_i + u_i$ и полагая

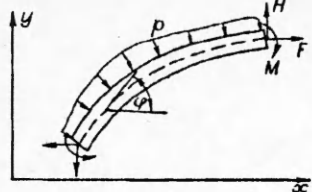


Рис. 1

$$(2.1) \quad \sin \frac{u_i + u_{i+1}}{2} \approx \frac{u_i + u_{i+1}}{2}, \\ \cos \frac{u_i + u_{i+1}}{2} \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{u_i + u_{i+1}}{2} \right)^2,$$

получим квадратичный относительно u функционал

$$(2.2) \quad \Psi'' = \Psi'(\bar{\varphi}_i) + \frac{h}{2} \sum_{i=1}^N \left[D_{i+1/2} \left(\frac{u_i - u_{i+1}}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \tilde{T}_{i+1/2} (u_i + u_{i+1})^2 - \right. \\ \left. - \tilde{Q}_{i+1/2} (u_i + u_{i+1}) + 2D_{i+1/2} \frac{\bar{\varphi}_{i+1} - \bar{\varphi}_i - \varphi_{i+1}^0 + \varphi_i^0}{h} (u_{i+1} - u_i) \right] + \alpha \gamma u_{N+1},$$

где

$$(2.3) \quad \tilde{T}_{i+1/2} = F_{i+1/2} \cos \bar{\varphi}_{i+1/2} + H_{i+1/2} \sin \bar{\varphi}_{i+1/2}, \quad \tilde{Q}_{i+1/2} = \\ = H_{i+1/2} \cos \bar{\varphi}_{i+1/2} - F_{i+1/2} \sin \bar{\varphi}_{i+1/2}, \\ u_1 = 0, u_{N+1} = 0, \text{ если } \alpha = 0.$$

Экстремуму функционала (2.2) при условиях (2.3) соответствует решение системы уравнений

$$(2.4) \quad a_i u_{i-1} + 2b_i u_i + c_i u_{i+1} = f_i, \quad i = 2, 3, \dots, N, \\ u_1 = 0, u_{N+1} = 0, \text{ если } \alpha = 0, \\ d_N u_N + d_{N+1} u_{N+1} + f_{N+1} = 0, \text{ если } \alpha = 1.$$

Здесь

$$(2.5) \quad a_i = -\frac{1}{h} D_{i-1/2} + \frac{h}{4} \tilde{T}_{i-1/2}, \quad c_i = -\frac{1}{h} D_{i+1/2} + \frac{h}{4} \tilde{T}_{i+1/2}, \\ 2b_i = -\frac{1}{h} (D_{i-1/2} + D_{i+1/2}) + \frac{h}{4} (\tilde{T}_{i-1/2} + \tilde{T}_{i+1/2}), \\ f_i = -\frac{h}{2} (\tilde{Q}_{i-1/2} + \tilde{Q}_{i+1/2}) + \frac{1}{h} [D_{i-1/2} (\bar{\varphi}_i - \bar{\varphi}_{i-1} - \varphi_i^0 + \varphi_{i-1}^0) - \\ - D_{i+1/2} (\bar{\varphi}_{i+1} - \bar{\varphi}_i - \varphi_{i+1}^0 + \varphi_i^0)], \quad i = 2, 3, \dots, N; \\ (2.6) \quad d_N = -\frac{1}{h} D_{N+1/2} + \frac{h}{4} \tilde{T}_{N+1/2}, \quad d_{N+1} = \frac{1}{h} D_{N+1/2} + \frac{h}{4} \tilde{T}_{N+1/2}, \\ f_{N+1} = -\frac{h}{2} \tilde{Q}_{N+1/2} + \frac{1}{h} D_{N+1} (\bar{\varphi}_{N+1} - \bar{\varphi}_N - \varphi_{N+1}^0 + \varphi_N^0) + \gamma.$$

Величины f_i ($i = 2, \dots, N+1$) — невязки условий экстремума функционала (1.7) при замене в них φ_i на $\bar{\varphi}_i$. Процесс вычисления решений уравнений (2.4)—(2.6) «обычной» прогонкой [4] может быть неустойчивым. В [1] решения разностных уравнений, аналогичных уравнениям (2.4)—(2.6), находятся немонотонной прогонкой [5].

В предлагаемом методе последовательности приближений, минимизирующие функционал (1.7), строятся на основе последовательностей приближенных решений \tilde{u}_i ($i = 1, 2, \dots, N+1$) уравнений (2.4), удовлетворяющих следующим условиям:

$$(2.7) \quad \Psi''(\bar{\varphi}_i) \geq \Psi''(\bar{\varphi}_i + \tilde{u}_i),$$

причем равенство возможно только тогда, когда

$$\tilde{u}_i = 0, \quad i = 2, \dots, N+1;$$

равенства $\tilde{u}_i = 0$ ($i = 2, \dots, N+1$) возможны лишь при $f_i = 0$ ($i = 2, \dots, N$) и $f_{N+1} = 0$, если $\alpha = 1$, т.е. в случае, когда $\bar{\varphi}_i$ ($i = 2, \dots, N+1$) удовлетворяют условиям экстремума функционала (1.7);

число операций при вычислении \tilde{u}_i ($i = 1, 2, \dots, N+1$), приходящееся на один узел сетки, не зависит от числа узлов сетки;

$$(2.8) \quad |\tilde{u}_i| \leq A, \quad i = 1, 2, \dots, N + 1$$

(A — заданное число).

Заметим, что $\Psi''(\bar{\varphi}_i) = \Psi'(\bar{\varphi}_i)$, различие же величин $\Psi''(\bar{\varphi}_i + \tilde{u}_i)$ и $\Psi'(\bar{\varphi}_i + \tilde{u}_i)$ определяется погрешностью указанной в (2.1) аппроксимации синусов и косинусов и поэтому за счет задания достаточно малой величины A в (2.8) всегда может быть сделано столь малым, чтобы из (2.7) следовало неравенство

$$\Psi'(\bar{\varphi}_i) \geq \Psi'(\bar{\varphi}_i + \tilde{u}_i).$$

Это позволяет строить предлагаемым алгоритмом последовательности приближений с монотонно уменьшающимися величинами функционала (1.7).

Численные расчеты показывают, что режим вычисления приближений с монотонно уменьшающимися величинами функционала (1.7) устанавливается после ряда приближений и без введения ограничений (2.8). Поэтому вводить ограничения (2.8) можно лишь с целью ускорения сходимости последовательности приближений. При этом следует иметь в виду, что введение ограничений (2.8) может сделать сходимость и более медленной по сравнению со сходимостью при счете без ограничений.

Для каждого заданного начального приближения можно найти предлагаемым методом при заданном значении A в (2.8) лишь одно равновесное состояние. Различные равновесные состояния, соответствующие одним и тем же нагрузкам, можно получить, рассматривая разные начальные приближения. В некоторых случаях различные равновесные состояния получаются при одном и том же начальном приближении, но разных значениях A в (2.8) или при разбиении стержня на различное число элементов.

3. Алгоритм вычисления приближений в случае заданного на конце стержня угла поворота. В случае заданного на конце $s = l$ угла поворота оси стержня $u_1 = u_{N+1} = 0$ в (2.4). Поэтому вычисление итераций сводится к вычислению u_i , $i = 2, 3, \dots, N$.

Из численных расчетов следует, что сходимость приближений обычно бывает выше, если строить их чередованием двух вариантов итераций. Один из них основан на построении приближенных решений уравнений (2.4) в виде

$$(3.1) \quad \begin{aligned} u_i^0 &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, N + 1, \quad u_1^{(k)} = \dot{u}_1^{(k)} = u_{N+1}^{(k)} = \dot{u}_{N+1}^{(k)} = 0, \\ u_i^{(k)} &= u_i^{(k-1)} + \dot{u}_i^{(k)}, \quad \dot{u}_i^{(k)} = \gamma^{(k)} + \beta^{(k)} s_i, \quad i = 2, \dots, k + 2, \\ u_i^{(k)} &= \dot{u}_i^{(k)} = 0, \quad i = k + 3, \dots, N + 1, \quad k = 1, 2, \dots, N - 2, \end{aligned}$$

где $\gamma^{(k)}$, $\beta^{(k)}$ определяются последовательно при $k = 1, 2, \dots, N - 2$ условиями экстремума функционала (2.2) после замены в нем u_i на $u_i^{(k)}$. Эти условия можно записать как вариационные уравнения

$$(3.2) \quad \sum_{i=2}^{k+2} z_i^{(k)} \delta \dot{u}_i^{(k)} = 0, \quad z_i^{(k)} = a_i u_{i-1}^{(k)} + 2b_i u_i^{(k)} + c_i u_{i+1}^{(k)} - f_i, \\ k = 1, 2, \dots, N - 2.$$

Из (3.1), (3.2) следует

$$(3.3) \quad \sum_{i=2}^{k+2} z_i^{(k)} = 0, \quad \sum_{i=2}^{k+2} z_i^{(k)} s_i = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N - 2.$$

Уравнения (3.3) означают равенства нулю суммы невязок и суммы моментов невязок уравнений (2.4), и поэтому последовательности (3.1) приближенных решений уравнений (2.4) соответствует последовательность невязок этих уравнений с равными нулю суммой невязок и суммой моментов в последовательно расширяющейся области.

Очевидно, уравнения (3.3) можно записать в виде

$$(3.4) \quad z_2^{(1)} = 0, z_3^{(1)} = 0, \sum_{i=2}^{k+1} (z_i^{(k)} - z_i^{(k-1)}) + z_{k+2}^{(k)} = 0,$$

$$\sum_{i=2}^{k+1} (z_i^{(k)} - z_i^{(k-1)})s_i + z_{k+2}^{(k)}s_{k+2} = 0, k = 2, \dots, N - 2.$$

Из (3.4) нетрудно найти, что коэффициенты уравнений относительно $\gamma^{(k)}, \beta^{(k)}$

$$(3.5) \quad E_1^{(k)}\gamma^{(k)} + L_1^{(k)}\beta^{(k)} + \chi_1^{(k)} = 0,$$

$$E_2^{(k)}\gamma^{(k)} + L_2^{(k)}\beta^{(k)} + \chi_2^{(k)} = 0, k = 1, 2, \dots, N - 2$$

связаны с коэффициентами уравнений относительно $\gamma^{(k-1)}, \beta^{(k-1)}$ рекуррентными формулами:

$$(3.6) \quad E_1^{(1)} = c_2 + a_3 + 2(b_2 + b_3), L_1^{(1)} = (2b_2 + a_3)s_2 + (2b_3 + c_2)s_3,$$

$$E_2^{(1)} = (2b_2 + c_2)s_2 + (2b_3 + a_3)s_3,$$

$$L_2^{(1)} = (2b_2s_2 + a_3s_3)s_2 + (c_2s_2 + 2b_3s_3)s_3,$$

$$\chi_1^{(1)} = -(f_2 + f_3), \chi_2^{(1)} = -(f_2s_2 + f_3s_3),$$

$$E_1^{(k)} = E_1^{(k-1)} + c_{k+1} + a_{k+2} + 2b_{k+2},$$

$$L_1^{(k)} = L_1^{(k-1)} + a_{k+2}s_{k+1} + (c_{k+1} + 2b_{k+2})s_{k+2},$$

$$E_2^{(k)} = E_2^{(k-1)} + c_{k+1}s_{k+1} + (2b_{k+2} + a_{k+2})s_{k+2},$$

$$L_2^{(k)} = L_2^{(k-1)} + a_{k+2}s_{k+1}s_{k+2} + (c_{k+1}s_{k+1} + 2b_{k+2}s_{k+2})s_{k+2},$$

$$\chi_1^{(k)} = a_{k+2}(\gamma^{(k-1)} + \beta^{(k-1)}s_{k+1}) - f_{k+2}, \chi_2^{(k)} = \chi_1^{(k)}s_{k+2}.$$

Из указанной в (3.1) зависимости $\dot{u}_i^{(k)}$ от s_i находим

$$(3.7) \quad h \sum_{i=1}^N \left[D_{i+1/2} \left(\frac{\dot{u}_{i+1}^{(k)} - \dot{u}_i^{(k)}}{h} \right)^2 + \frac{1}{4} \bar{T}_{i+1/2} (\dot{u}_i^{(k)} + \dot{u}_{i+1}^{(k)})^2 \right] \geq$$

$$\geq \frac{1}{h} (D_* - T_*lh) (\dot{u}_*^{(k)})^2,$$

где

$$D_* = \min_i D_{i+1/2}; \bar{T}_* = \max_i (|F_{i+1/2}| + |H_{i+1/2}|);$$

$$\dot{u}_*^{(k)} = \max_i |\dot{u}_i^{(k)}| \quad (i = 2, \dots, N).$$

Согласно (3.7), при условии

$$(3.8) \quad h \leq \frac{D_*}{T_*l}$$

квадратичная часть функционала (2.2) после замены в нем u_i на $u_i^{(k)}$ будет положительно-определенной квадратичной формой относительно $\gamma^{(k)}, \beta^{(k)}$. Поэтому процесс последовательного вычисления $\gamma^{(k)}, \beta^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots, N - 2$) по уравнениям (3.5), (3.6) осуществим и равенства

$$u_i^{(k)} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N, k = 1, 2, \dots, N - 2)$$

возможны лишь в случае, когда $f_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, N$), т.е. когда $\bar{\varphi}_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$) соответствуют экстремуму функционала (1.7). Во всех остальных случаях последовательности приближений (3.1) отвечает монотонно убывающая последовательность значений функционала (2.2):

$$(3.9) \quad \Psi'(\bar{\varphi}_i) = \Psi''(\bar{\varphi}_i) \geq \Psi''(\bar{\varphi}_i + u_i^{(1)}) > \\ > \Psi''(\bar{\varphi}_i + u_i^{(2)}) > \dots > \Psi''(\bar{\varphi}_i + u_i^{(N-2)}).$$

Среди $u_i^{(k)}$ наибольший интерес представляют $u_i^{(N-2)}$, так как им соответствует наименьшее значение функционала (2.2). Вычисление $u_i^{(N-2)}$ целесообразно производить после формирования массивов $\gamma^{(k)}, \beta^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots, N-2$) и осуществлять по формулам

$$(3.10) \quad u_N^{(N-2)} = \gamma_N + \beta_N s_N, \gamma_N = \gamma^{(N-2)}, \beta_N = \beta^{(N-2)}, \\ u_i^{(N-2)} = \gamma_i + \beta_i s_i, \gamma_i = \gamma_{i+1} + \gamma^{(i-2)}, \beta_i = \beta_{i+1} + \beta^{(i-1)}, \\ i = N-1, \dots, 3, \\ u_2^{(N-2)} = \gamma_3 + \beta_3 s_2.$$

При вычислении $\gamma^{(k)}, \beta^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots, N-2$) по уравнениям (3.5), (3.6) и $u_i^{(N-2)}$ ($i = N-1, \dots, 2$) по формулам (3.10) число операций, приходящееся на один узел сетки, не зависит от числа узлов сетки.

При счете без введения ограничения (2.8) найденные $u_i^{(N-2)}$ принимаются в качестве \tilde{u}_i , величины $\bar{\varphi}_i$ заменяются на $\bar{\varphi}_i + \tilde{u}_i$, и производится переход к вычислению следующей итерации.

При счете с введением ограничения (2.8) это ограничение можно сформулировать в виде условий на $\gamma^{(k)}, \beta^{(k)}$, например:

$$(3.11) \quad \max_{2 \leq i \leq k+2} |u_i^{(k)}| = \max(|\gamma^{(k)} + \beta^{(k)} s_2|, |\gamma^{(k)} + \beta^{(k)} s_{k+2}|) \leq \varepsilon, \varepsilon = A/N.$$

В этом случае процесс формирования массивов $\gamma^{(k)}, \beta^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots, N-2$) останавливается при нарушении условий (3.11), вычисляются $u_i^{(k-1)}$ по формулам (3.10) с заменой в них $N-1$ на то значение k , при котором произошло нарушение условий (3.11). Найденные $u_i^{(k-1)}$ принимаются в качестве \tilde{u}_i , величины $\bar{\varphi}_i$ заменяются на $\bar{\varphi}_i + \tilde{u}_i$, и производится переход к вычислению следующей итерации.

В изложенном варианте итераций область самоуравновешенности невязок уравнений (2.4) последовательно расширяется в сторону возрастания номеров узлов сетки. Аналогично формулируется вариант итераций, в котором расширение области самоуравновешенности невязок происходит в сторону уменьшения номеров узлов сетки.

Из численных экспериментов следует, что чередование этих вариантов итераций может существенно ускорять сходимость приближений.

4. Алгоритм вычисления приближений в случае заданного на конце стержня изгибающего момента. Задачи с заданным на конце $s = l$ стержня изгибающим моментом отличаются от рассмотренных в п. 3 задач с заданным на конце $s = l$ углом поворота тем, что в (2.4) условие $u_{N+1} = 0$ заменяется уравнением

$$(4.1) \quad d_N u_{N+1} + d_{N+1} u_{N+1} + f_{N+1} = 0.$$

В рассматриваемом случае также целесообразно для ускорения сходимости строить последовательности приближений, чередуя два варианта итераций.

В варианте итераций с расширением области самоуравновешенности невязок в сторону возрастания номеров узлов сетки величины \tilde{u}_i ($i = 1, 2, \dots, N$) вычисляются по изложенной в п. 3 процедуре, \tilde{u}_{N+1} определяется из уравнения (4.1).

Вариант итераций с расширением области самоуравновешенности невязок в сторону уменьшения номеров узлов сетки в случае (4.1) основан на построении приближенных решений уравнений (2.4) в виде

$$(4.2) \quad u_{N+1}^{(0)} = -f_{N+1} d_{N+1}^{-1}, u_i^{(0)} = 0, i = N, N-1, \dots, 1,$$

$$\begin{aligned} u_{N+1}^{(k)} &= u_{N+1}^{(k-1)} + \dot{u}_{N+1}^{(k)}, \dot{u}_{N+1}^{(k)} = -\dot{u}_N^{(k)} d_N d_{N+1}^{-1}, \\ u_i^{(k)} &= u_i^{(k-1)} + \dot{u}_i^{(k)}, \dot{u}_i^{(k)} = \gamma^{(k)}, i = N, \dots, N+1-k, \\ u_i^{(k)} &= \dot{u}_i^{(k)} = 0, i = N-k, N-k-1, \dots, 1, k = 1, 2, \dots, N-1, \end{aligned}$$

где $\gamma^{(k)}$ определяются последовательно при $k = 1, 2, \dots, N-1$ условием экстремума функционала (2.2) при замене в нем u_i на $u_i^{(k)}$.

Нетрудно показать, что последовательности (4.2) приближенных решений уравнений (2.4) соответствует последовательность невязок этих уравнений с равной нулю суммой в последовательно расширяющейся области. Квадратичную относительно $u_i^{(k)}$ часть функционала (2.2) можно записать как

$$\Delta = \frac{1}{2h} [D_{N+1/2}(\dot{u}_{N+1}^{(k)} - \dot{u}_N^{(k)})^2 + D_{N-k+1/2}(\dot{u}_N^{(k)})^2 + \frac{h^2}{4} \sum_{i=N-k}^N \tilde{T}_{i+1/2}(\dot{u}_i^{(k)} + \dot{u}_{i+1}^{(k)})^2].$$

Очевидно, при условии (3.8)

$$\begin{aligned} \Delta \geq \frac{1}{2h} \{ [2D_* - T_* h(l - \frac{3}{2}h)] (\dot{u}_N^{(k)})^2 - 2(D_* + \frac{1}{4} T_* h^2) \dot{u}_N^{(k)} \dot{u}_{N+1}^{(k)} + \\ + (D_* - \frac{1}{4} T_* h^2) (\dot{u}_{N+1}^{(k)})^2 \} \geq 0, \end{aligned}$$

причем равенство нулю возможно только при $\dot{u}_N^{(k)} = \dot{u}_{N+1}^{(k)} = 0$. Отсюда следует, что при условии (3.8) функционал (2.2) после замены в нем u_i на $u_i^{(k)}$ будет квадратичным полиномом относительно $\gamma^{(k)}$ с положительным коэффициентом при $(\gamma^{(k)})^2$. Поэтому процесс вычисления $\gamma^{(k)}$ осуществим и последовательности (4.2) соответствует последовательность монотонно убывающих значений функционала (2.2).

Величины $\gamma^{(k)}$ вычисляются по рекуррентным формулам

$$\begin{aligned} E^{(1)} \gamma^{(1)} &= f_N + c_N f_{N+1} d_{N+1}^{-1}, E^{(1)} = 2b_N - c_N d_N d_{N+1}^{-1}, \\ E^{(k)} \gamma^{(k)} &= f_{N-k+1} - c_{N-k+1} \gamma^{(k-1)}, E^{(k)} = E^{(k-1)} + a_{N-k+2} + 2b_{N-k+1} + c_{N-k+1}, \\ k &= 2, 3, \dots, N-1. \end{aligned}$$

При счете без введения ограничений (2.8) после формирования массива $\gamma^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots, N-1$) производится вычисление $u_i^{(N-1)}$ по формулам

$$\begin{aligned} u_1^{(N-1)} &= 0, u_i^{(N-1)} = u_{i-1}^{(N-1)} + \gamma^{(N+1-i)}, i = 2, \dots, N, \\ u_{N+1}^{(N-1)} &= -(f_{N+1} + d_N u_N^{(N-1)}) d_{N+1}^{-1}. \end{aligned}$$

Найденные $u_i^{(N-1)}$ принимаются в качестве \tilde{u}_i , величины $\tilde{\varphi}_i$ заменяются на $\tilde{\varphi}_i + \tilde{u}_i$, и производится переход к вычислению следующей итерации.

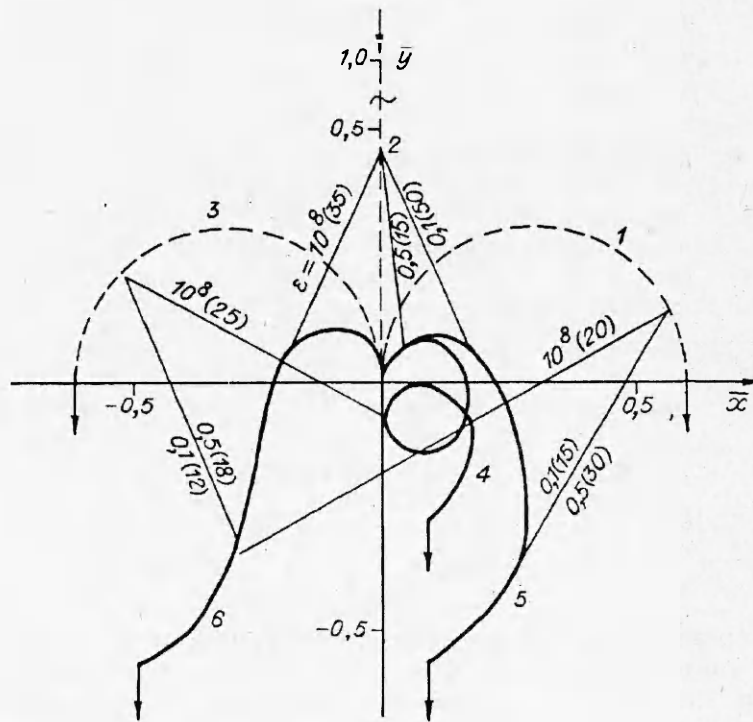
В рассматриваемом случае ограничение (2.8) можно сформулировать в виде

$$(4.3) \quad |\gamma^{(k)}| \leq \varepsilon, \varepsilon = A/N.$$

При счете с ограничением (4.3) в качестве \tilde{u}_i принимаются $u_i^{(k-1)}$, где k — номер, при котором произошло нарушение условия (4.3). Величины $u_i^{(k-1)}$ вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} u_i^{(k-1)} &= 0, k = 1, 2, \dots, N+1-k, \\ u_i^{(k-1)} &= u_{i-1}^{(k-1)} + \gamma^{(N+1-i)}, i = N+2-k, \dots, N, \\ u_{N+1}^{(k-1)} &= -(f_{N+1} + d_N u_N^{(k-1)}) d_{N+1}^{-1}. \end{aligned}$$

5. Результаты численных экспериментов. Проведены численные эксперименты по применению изложенного выше алгоритма для вычисления равновесных форм. При этом рассматривались разные формы стержня в



Р и с. 2

недеформированном состоянии, различные начальные приближения, варьировались число элементов N и величина ϵ в ограничениях (3.11), (4.3). При проведении расчетов использовались безразмерные величины

$$\bar{s} = s/l, \bar{F} = Fl^2/D, \bar{H} = Hl^2/D, \bar{p} = pl^3/D, \\ \bar{\Psi} = \Psi l/D, \bar{x} = x/l, \bar{y} = y/l.$$

Некоторые типичные результаты экспериментов представлены на рис. 2 и в таблице.

На рис. 2 приведены полученные в ходе численных экспериментов равновесные формы упругого стержня (кривые 4—6) под действием вертикальной силы $\bar{H} = -40$, приложенной к концу стержня $\bar{s} = 1$, форма которого в недеформированном состоянии определяется уравнением $\varphi_0 = \pi/2 - 3\pi\bar{s}$. Конец стержня $\bar{s} = 0$ зашкелен. При $\bar{s} = 1$ изгибающий момент равен нулю. Разнообразие и большое количество проведенных численных экспериментов позволяют утверждать, что других равновесных форм у этого стержня при $\bar{H} = -40$, по-видимому, нет.

На рис. 2 штриховыми линиями 1—3 представлены отвечающие уравнениям $\varphi = \pi/2 - \pi\bar{s}$, $\varphi = \pi/2$, $\varphi = \pi/2 + \pi\bar{s}$ формы стержня, которые принимались в качестве начальных приближений при вычислении равновесных форм. Стрелками указан переход начальных приближений в соответствующие равновесные формы при вычислениях с $N = 120$, $\epsilon = 10^8$; 0,5; 0,1, а в скобках — число итераций, после которого четыре значащие цифры в

N	Форма		
	4	5	6
	$\Psi'(\bar{x}, \bar{y})$		
40	-6,2447(0,1293; -0,2494)	-7,1400(0,0821; -0,5995)	51,7565(-0,5483; -0,5641)
80	-6,2667(0,1303; -0,2499)	-7,1536(0,0827; -0,5917)	51,7402(-0,5484; -0,5642)
120	-6,2708(0,1304; -0,2501)	-7,1565(0,0825; -0,5919)	51,7371(-0,5496; -0,5642)

величинах функционала (1.7) и координат конца стержня перестают изменяться. Приближения с погрешностью в величинах функционала энергии и координат конца стержня порядка 10 % достигались за 7—8 итераций.

В вычислениях с $\epsilon = 0,1$ функционал (1.7) монотонно уменьшался при всех итерациях с самого начала, в вычислениях с $\epsilon = 10^8; 0,5$ монотонное уменьшение функционала (1.7) наступало лишь после ряда итераций.

В таблице приведены значения функционала (1.7) и (в скобках) координат конца $\bar{s} = 1$ стержня, соответствующие вычислениям равновесных форм 4—6 при $N = 40, 80, 120$. Эти значения практически совпадают. Число итераций, требуемых для получения равновесных форм, также практически не зависит от числа элементов N .

Работа выполнена при содействии фонда Д. Сороса. Авторы выражают признательность фонду за материальную поддержку их работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов Е.П. Теория и расчет гибких упругих стержней. — М.: Наука, 1986.
2. Wang C.Y. Buckling and postbuckling of a long-hanging elastic column due to a bottom load // Trans. ASME. J. Appl. Mech. — 1983. — V. 50, N 2.
3. Астрахарчик С.В. Метод решения задач большого изгиба тонких упругих стержней и пластин // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики. — 1977. — Вып. 75.
4. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы. — М.: Наука, 1977.
5. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. — М.: Наука, 1978.
6. Черноусько Ф.П., Баничук Н.В. Вариационные задачи механики и управления. — М.: Наука, 1973.

г. Новосибирск

Поступила 13/V 1993 г.

УДК 624.07:534.1

В.В. Нестеренко, А.М. Червяков

ПАРАБОЛИЧЕСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ В ТЕОРИИ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЕЙ И БАЛОК

Предложено уравнение параболического типа, описывающее поперечные колебания балки и учитывающее упругую энергию сдвиговых деформаций. Поправки к частотам классической теории Бернулли — Эйлера, которые дает новое уравнение, в точности совпадают с аналогичными поправками в модели балки Тимошенко. В предложенном подходе нет дополнительной нефизической моды колебаний, предсказываемой моделью Тимошенко.

При расчете поперечных колебаний стержней и балок рабочим инструментом является до сих пор классическая теория Бернулли — Эйлера [1]. Можно отметить лишь два обобщения этой теории. Учет инерции вращения отдельных элементов балки в процессе колебаний выполнен Рэлеем [2]. Существенным продвижением вперед была модель Тимошенко, предложенная в начале нашего века [3]. В ее рамках учитываются не только изгибные, но и сдвиговые деформации балки при поперечных колебаниях. Все попытки получить новые приближения в данной задаче, исходя из точных уравнений трехмерной теории упругости, приводят к чрезвычайно громоздким и сложным построениям (см., например, [4]).

Утвердилось мнение, что успех теории Тимошенко обусловлен тем, что предложенная им модель является гиперболической аппроксимацией точных