$\mathcal{AMS}$ subject classification: 44A10, 45D05, 65R20

# Численный метод решения интегральных уравнений Вольтерра с осциллирующим ядром с использованием преобразования

М. Уддин, А. Хан

Department of basics sciences, university of engineering and technology Peshawar

E-mails: marjan@uetpeshawar.edu.pk (М. Уддин), alammathuet@gmail.com (А. Хан)

**Английская версия этой статьи печатается в журнале "Numerical Analysis and Applications" № 4, Vol. 14, 2021.**

**Уддин М., Хан А.** Численный метод решения интегральных уравнений Вольтерра с осциллирующим ядром с использованием преобразования // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2021. — Т. 24, № 4. — С. 435–444.

В данной работе построена численная схема для аппроксимации класса интегральных уравнений Вольтерра типа свертки с сильно осциллирующими ядрами. Предлагаемый численный метод используется для преобразования интегральных уравнений Вольтерра типа свертки в простые алгебраические уравнения. При помощи обратного преобразования задача преобразуется в интегральное представление в комплексной плоскости, а затем вычисляется с использованием подходящей квадратурной формулы. Численная схема применяется для класса линейных и нелинейных интегральных уравнений Вольтерра типа свертки с сильно осциллирующими ядрами, и некоторые из полученных результатов сравниваются с методами, имеющимися в литературе. Основное преимущество данной схемы — преобразование сильно осциллирующей задачи в неосциллирующую и простую задачу. Таким образом, большой класс подобных интегральных уравнений с ядрами сильно осциллирующего типа может быть очень эффективно аппроксимирован.

**DOI:** 10.15372/SJNM20210407

**Ключевые слова:** *осциллирующие ядра типа свертки, интегральные уравнения Вольтерра, преобразование Лапласа, обратное преобразование Лапласа, численное метод.*

**Uddin M., Khan A.** Numerical method for solving Volterra integral equations with oscillatory kernels using a transform // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2021. — Vol. 24, № 4. — P. 435–444.

In the present work, a numerical scheme is constructed for the approximation of a class of Volterra integral equations of the convolution type with highly oscillatory kernels. The proposed numerical technique transforms the Volterra integral equations of the convolution type into simple algebraic equations. By an inverse transform the problem is converted into an integral representation in the complex plane, and then computed by a suitable quadrature formula. The numerical scheme is applied for a class of linear and nonlinear Volterra integral equations of the convolution type with highly oscillatory kernels, and some of the obtained results are compared with the methods available in the literature. The main advantage of the present scheme is the transformation of a highly oscillatory problem to a non-oscillatory and simple problem. So a large class of a similar type of integral equations having kernels of a highly oscillatory type can be very effectively approximated.

**Keywords:** *oscillatory kernels of convolution type, Volterra integral equations, Laplace transform, inverse Laplace transform, Numerical method.*

# Введение

Интегральные уравнения с осциллирующими ядрами имеют многочисленные применения во многих областях науки и техники, таких как электростатика, механика, механика жидкостей [1, 2] и многих других. Самыми важными из них являются интегральные уравнения Вольтерра (ИУВ) с ядрами типа свертки (см., например, [3–5] и имеющиеся там ссылки). Для точного вычисления сильно осциллирующих интегралов типа свертки за последние годы были разработаны многочисленные методы. Во многих случаях точные аналитические решения такого типа интегральных уравнений с сильно осциллирующими ядрами невозможно получить в замкнутом виде. Следовательно, численные методы могут быть хорошей альтернативой для эффективного вычисления моделей такого типа (см., например, [6, 7]). Некоторые лучшие из разработанных за последнее время численных методов можно найти в [8–10]. Наиболее важной особенностью таких задач является наличие осцилляционного параметра $\omega \gg 1$, который содержится в ядре интегральных уравнений и поэтому становится сильно осциллирующим. В этом случае большинство стандартных методов коллокации трудно использовать для решения интегральных уравнений с большими осцилляциями (см., например, [8, 11–14]).

Интегральные уравнения Вольтерра первого рода более общего вида, которые численно исследовались в прошлом, можно найти в [6, 15–17]. Разработанные для этого методы, где аппроксимируется интеграл, имеют большой параметр осцилляции. Вычисление таких интегралов с использованием квадратурных методов всегда сложно и требует больших затрат (см., например, [18, 19]). Приближенные методы типа Филона оказались лучшими для аппроксимации интегральных уравнений с сильно осциллирующими ядрами (см., например, [11, 20–22]). Необходимо дальнейшее теоретическое и численное изучение осцилляционного поведения таких интегральных уравнений. Основная цель данного исследования — аппроксимировать ИУВ с сильно осциллирующими ядрами типа свертки с помощью метода на основе преобразования. ИУВ с сильно осциллирующими ядрами, рассматриваемые в данном исследовании, определяются следующим образом:

$$\int_0^t \kappa(x,t)e^{i\omega g(x,t)}F(x,y(x))\,dx = f(t), \quad t\in[0,T], \tag{0.1}$$

где $\omega$ — осцилляционный параметр, $\kappa(x,t)$ и $g(x,t)$ — разностное ядро и осциллятор соответственно, $f(t)$ — некоторая гладкая функция, а $F$ — неизвестная нелинейная функция; таким образом, мы заменяем неизвестную нелинейную функцию на другую неизвестную линейную функцию и решаем новые линейные ИУВ с сильно осциллирующими ядрами.

## 1. Анализ метода для интегральных уравнений Вольтерра

Предположим, что $y(t)$ — функция переменной $t$, для которой существует преобразование Лапласа

$$\mathscr{L}[y(t)] = \hat{y}(s) = \int_0^\infty e^{-st}y(t)\,dt,$$

и, следовательно, его обратное преобразование Лапласа

$$y(t) = \frac{1}{2\pi\iota}\int_{c-\iota\infty}^{c+\iota\infty} e^{st}\hat{y}(s)\,ds.$$

ИУВ типа свертки часто легко решать при помощи пары преобразований Лапласа (см., например, [23, 24]). Пусть $y(t)$ — решение ИУВ (0.1). Тогда его обратное преобразование $\hat{y}$ — расширенное в пространстве $Z$ подмножество комплексной плоскости, которое задается следующим образом:

$$\hat{y} : \mathcal{C}\backslash\Sigma_\theta \to Z, \tag{1.1}$$

где

$$\Sigma_\theta = \{s \in \mathcal{C} : |\arg(-s)| \le \theta\}, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \tag{1.2}$$

а за пределами этого сектора $\Sigma_\theta$ функция $\hat{y}(s)$ подчиняется условию

$$\|\hat{y}(s)\| = O(1/|s|).$$

Следовательно, существует постоянная $C_\theta > 0$ такая, что

$$\|\hat{y}(s)\| \le \frac{C_\theta}{|s|}, \quad s \in \mathcal{C}\backslash\Sigma_\theta. \tag{1.3}$$

Таким образом, формула обратного преобразования Лапласа сводится к виду

$$y(t) = \frac{1}{2\pi\iota}\int_\Theta e^{ts}\hat{y}(s)\,ds, \quad t > 0, \tag{1.4}$$

где контур $\Theta$ проходит от предела $c - \iota\infty$ до $c + \iota\infty$. Параметрическое представление пути $\Theta$ определяется следующим образом: $\sigma : (a, b) \to \mathcal{C}$, таким образом, $y(t)$ задается путем

$$y(t) = \frac{1}{2\pi\iota}\int_a^b e^{t\sigma(x)}\hat{y}(\sigma(x))\sigma'(x)\,dx, \quad t > 0. \tag{1.5}$$

Классический метод [25, 26], в котором применяется правило равной длины, используется для аппроксимации приведенного выше интеграла. Таким образом, для заданных $N \ge 1$, $h > 0$, $x_k = kh$, $-N : k : N$, решение $y(t)$ ИУВ (0.1) при любом $t > 0$ можно вычислить с помощью следующей численной схемы:

$$y_N(t) = \frac{h}{2\pi\iota}\sum_{k=-N}^{N} e^{t\sigma(x_k)}\hat{y}(\sigma(x_k))\sigma'(x_k), \quad t > 0. \tag{1.6}$$

Для вычисления обратного $\hat{y}$ алгоритм Талбота с использованием интервала $(-\pi, \pi)$ и модификация с использованием интервала $(a, b)$ для интервала $(-\infty, +\infty)$ помогают найти оценки ошибки по правилу трапеций:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} q(x)\;dx \simeq h\sum_{k=-N}^{N} q(hk), \quad N \ge 1, \quad h > 0. \tag{1.7}$$

Используем (1.2) при выборе $\theta$; тогда для $d > 0$, $\alpha$ может быть выбрано таким образом, чтобы удовлетворялись следующие неравенства:

$$d < \min\{\pi/2 - \alpha, \alpha\}, \qquad d + \alpha + \theta < \pi/2. \tag{1.8}$$

Для отображения $\zeta(w) = -\sin(\alpha + \iota w)$, $w = x + \iota Y$, легко показать, что преобразование $\zeta$ перевело горизонтальный путь $\operatorname{Im} w = Y$, где $-d < Y < d$, в левую ветвь гиперболы в следующем уравнении:

$$\left(\frac{\operatorname{Re} s}{\sin(\alpha - Y)}\right)^2 - \left(\frac{\operatorname{Im} s}{\cos(\alpha - Y)}\right)^2 = 1.$$

Поэтому $\zeta$ преобразовало полосу $S_d$ в левые ветви при $Y = \pm d$. Пусть $\lambda > 0$. Тогда мы имеем отображение

$$s = \sigma(w) = \lambda(1 + \zeta(w)). \tag{1.9}$$

Следовательно, $\Theta$ получено в параметрическом виде, и мы можем вычислить следующее:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Q_t(x)\, dx, \quad t > 0,$$

где отображение $Q_t : S_d \to X$, $t > 0$, определяется как

$$Q_t(w) = \frac{1}{2\pi\iota} \exp(t\sigma(w))\hat{y}(\sigma(w))\sigma'(w).$$

Основное преимущество данной численной схемы (1.6) — ее неосцилляционная природа, которая очень легко и точно вычисляется. Другое преимущество состоит в том, что приближенное решение $u(t)$ в различные моменты времени и его преобразование $\hat{y}$ при $-N : k : N$ может быть параллельно вычислено очень эффективно. Когда оптимальные параметры для заданного пути $\sigma$ выбраны, мы можем сохранить однородную ошибку во временном интервале $[t_0, \wedge t_0]$ при небольшом $\wedge \geq 1$ для любого времени $t \in (t_0, T)$, где $T = \wedge t_0$, $t_0 \geq 0$ [27].

## 2. Численные примеры и применение

Построенная численная схема применяется как для линейных, так и для нелинейных интегральных уравнений Вольтерра (0.1) с сильно осциллирующими ядрами. Этот метод был проверен для ошибки в зависимости от квадратурных узлов и осцилляционных параметров, а также проведено его сравнение с другими методами. Рассмотренный выше гиперболический контур получен в следующем виде:

$$\sigma(x_k) = \eta + \lambda(1 - \sin(\alpha - \iota x_k)). \tag{2.1}$$

Для лучшей точности всех вычислений могут использоваться следующие оптимизированные параметры формы, соответствующие гиперболическому пути, определенному выше: $\eta = 2, \alpha = 0.3812, \lambda = \frac{\delta r_b N}{\varepsilon T}, x_k = hk$, with $\delta = 0.1$, $r_b = 2\pi r$, $r = 0.3431$, $x_k = hk$, $\varepsilon = \cosh^{-1}\left(\frac{1}{\delta\tau\sin(\alpha)}\right)$, $h = \varepsilon/N$, $\tau = t_0/T$, $t_0 = 0.1$, $T = 5$.

**Теорема 1.** [28] *Единственное решение ИУВ первого рода с линейным оператором*

$$\int_0^t \kappa(t-x)e^{i\omega(t-x)}y(x)\, dx = f(t), \quad t \in [0, T], \tag{2.2}$$

*задается путем*

$$y(t) = f'(t) + \int_0^t r_1(t-x)e^{i\omega(t-x)}f'(x)\, dx - i\omega\left(f(t) + \int_0^t r_1(t-x)e^{i\omega(t-x)}f(x)\, dx\right), \tag{2.3}$$

*где $r_1(t-x) = \kappa'(t-x)$ и предполагается, что $\kappa(0) = 1$.*

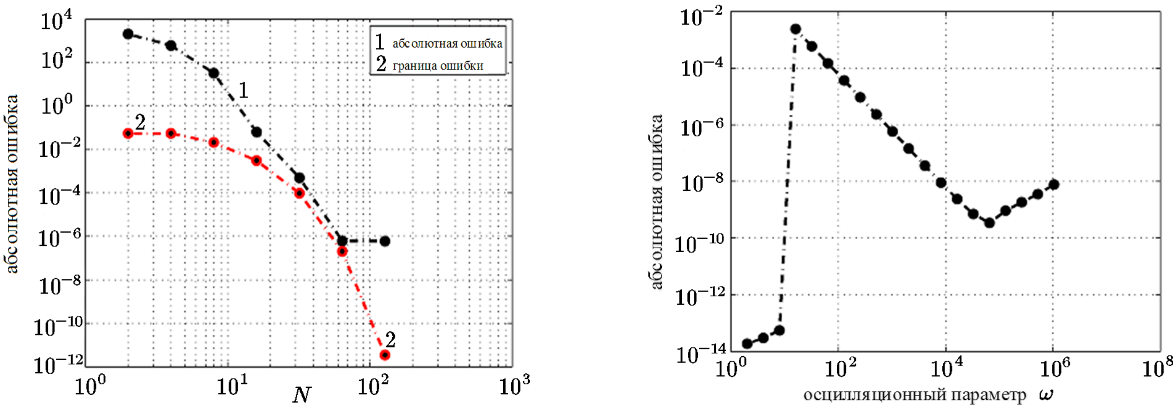
**Задача 1**. Рассмотрим ИУВ (0.1) для следующего функционала:

$$\int_0^t (1 + t - x)e^{i\omega(t-x)}y(x)\, dx = t, \quad t \in [0, T], \tag{2.4}$$

где точное решение может быть получено из (2.3):

$$y(t) = 1 - \frac{1}{(i\omega - 1)^2} - \frac{(i\omega)^2 t}{(i\omega - 1)} + \frac{e^{i(\omega-1)t}}{(i\omega - 1)^2}. \tag{2.5}$$

Численное решение ИУВ (2.4) для различных значений используемых параметров получается с использованием данной численной схемы и показано на рисунке 1. Фактическая ошибка и оценка ошибки $e^{\frac{-cN}{\ln N}}$ численной схемы при $c = 1$ хорошо согласуются при $5 < N < 10^2$. На этом же рис. 1 показана фактическая ошибка в зависимости от параметра $\omega$; можно видеть высокую точность при $1 < \omega < 10$, внезапное ухудшение точности, постепенное увеличение точности при $10 < \omega < 10^5$, а затем постепенное ухудшение точности при $\omega > 10^5$. Рис. 1 также показывает, что для сильно осциллирующих ядер решение является неосциллирующим.



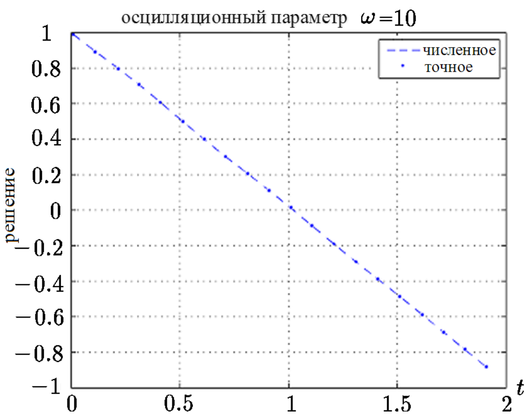




**Рис. 1.** Численное решение задачи 1: фактические и оцененные ошибки в зависимости от $N$ и $\omega$ и сравнение точного и численного решения

**Задача 2**. Мы рассмотрели ИУВ (0.1) в следующем виде:

$$\int_0^t e^{i\omega(t-x)} \ln(y(x))\, dx = \sinh t, \quad t \in [0, T]. \tag{2.6}$$

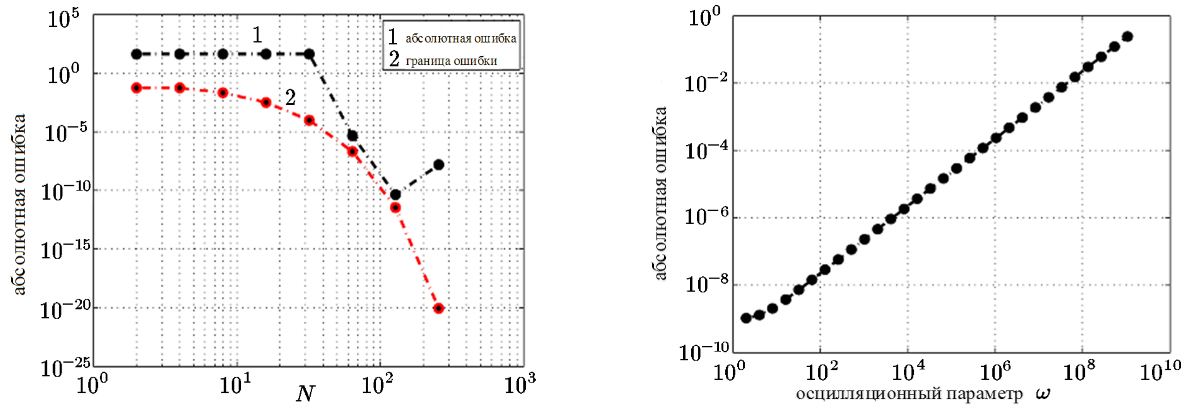
Пусть $v(x) = \ln(y(x))$, выполним преобразование Лапласа и получим решение

$$v(t) = \left(e^{-t}(iw + 1)/2 - e^{t}(iw + 1)/2\right). \tag{2.7}$$

Точное решение задачи определяется следующим образом:

$$y(t) = \exp\left(v(t)\right) = \exp\left(e^{-t}(iw+1)/2 - e^{t}(iw+1)/2\right). \tag{2.8}$$

Мы решили эту задачу с использованием данного метода для различных значений квадратурных узлов вдоль гиперболического контура и осцилляционного параметра. Результаты представлены на рис. 2. Сравнение фактической ошибки и оценки ошибки $e^{\frac{-cN}{\ln N}}$ для $c = 1$ численной схемы для различных квадратурных узлов представлено на рис. 2; они хорошо согласуются при $1 < N < 10^2$. Следует отметить, что решение в этом случае является осциллирующим и точность уменьшается с увеличением осцилляционного параметра $\omega$.



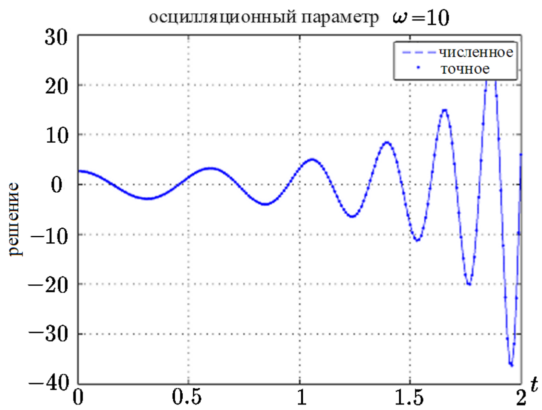




**Рис. 2.** Численное решение задачи 2: фактические и оцененные ошибки в зависимости от $N$ и $\omega$ и сравнение точного и численного решения

**Задача 3**. В этой задаче рассмотрим следующее интегральное уравнение ИУВ:

$$\int_0^t \cos(t-x)e^{i\omega(t-x)}y^2(x)\,dx = f(t), \quad t \in [0,T], \tag{2.9}$$

Пусть $v(x) = y^2(x)$. Выполним преобразование Лапласа и получим решение

$$v(t) = g_1(t) + g_2(t) - g_3(t) - g_4(t). \tag{2.10}$$

Точное решение этой задачи определяется следующим образом:

$$y(t) = \sqrt{v(t)} = \sqrt{g_1(t) + g_2(t) - g_3(t) - g_4(t)}, \tag{2.11}$$

$$g_1(t) = \sin t + t\cos t - i\omega t \sin t, \qquad g_2(t) = \frac{2i\omega e^{i\omega t}}{(-\omega^2+1)^2},$$

$$g_3(t) = \frac{-2\omega^2 \sin(t) + 2i\omega \cos(t)}{(-\omega^2+1)^2}, \qquad g_4(t) = \frac{t\cos(t) - \sin(t) + i\omega t \sin(t)}{(-\omega^2+1)}.$$

Задача решается для различных квадратурных узлов $N$ и при варьировании осцилляционного параметра $\omega$. Результаты показаны на рис. 3. Решение этой задачи является неосциллирующим; оно представлено на рис. 3, где точность увеличивается с увеличением осцилляционного параметра. Значения фактической ошибки и оценок ошибки сравнимы в определенном диапазоне квадратурных узлов. Здесь мы снова использовали следующие оптимизированные параметры формы.

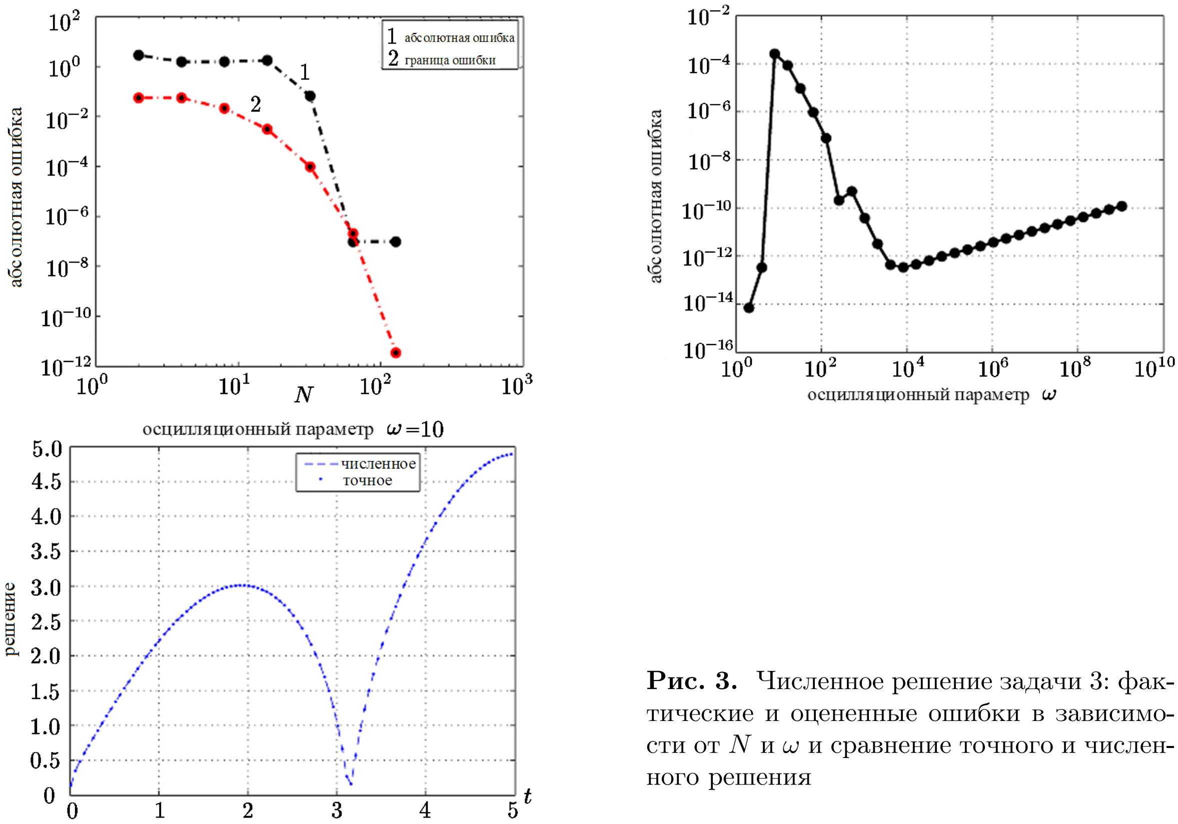



**Рис. 3.** Численное решение задачи 3: фактические и оцененные ошибки в зависимости от $N$ и $\omega$ и сравнение точного и численного решения

**Задача 4**. В этой последней задаче мы рассматриваем следующее линейное интегральное уравнение с сильно осциллирующими ядрами:

$$y(t) + \int_0^t \frac{e^{i\omega(t-x)}}{(t-x)^\alpha} y(x)\,dx = e^t, \tag{2.12}$$

где $\omega$ — осцилляционный параметр, $0 < \alpha < 1$, и точное решение задается в виде

$$y(t) = e^t + \int_0^t r(t-x)e^x dx, \tag{2.13}$$

где функция $r(x)$ определяется следующим образом:

$$r(x) = e^{i\omega x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\Gamma(1-\alpha)x^{1-\alpha})^n}{x\Gamma(n(1-\alpha))}. \tag{2.14}$$

Эта конкретная задача выбрана для сравнения результатов данной численной схемы с другими методами. Численное и точное решения этих задач в разные моменты времени представлены в таблице 1. В табл. 2 представлены значения для различных других квадратурных узлов $N$ и увеличивающихся значений осцилляционного параметра $\omega$. Для сравнения, работа данного численного метода была лучше, чем работа метода, обсуждавшегося в [29].

**Таблица 1.** Приближенное решение задачи 4 при $\alpha = 0.5$, $\omega = 10^4$ с использованием данного метода

| $t$ | $y_{ap}$ | $y_{ex}$ | $\lvert y_{ap} - y_{ex}\rvert$ |
|---|---|---|---|
| 0.01 | $9.9739e-001+1.2345e-002i$ | $9.9777e-001+1.1710e-002i$ | $3.7884e-004$ |
| 0.31 | $1.3463e+000+1.6664e-002i$ | $1.3463e+000+1.6696e-002i$ | $3.0164e-005$ |
| 0.61 | $1.8174e+000+2.2494e-002i$ | $1.8174e+000+2.2483e-002i$ | $1.7133e-005$ |
| 0.71 | $2.0085e+000+2.4860e-002i$ | $2.0085e+000+2.4843e-002i$ | $4.0389e-009$ |
| 0.91 | $2.4532e+000+3.0364e-002i$ | $2.4532e+000+3.0369e-002i$ | $1.1908e-005$ |

**Таблица 2.** Приближенное решение задачи 4 при $\alpha = 0.5$, $\omega = 10^4$, $t = 0.91$, ошибка $= \lvert y_{ap} - y_{ex}\rvert$ с использованием данного метода

| $N$ | $\omega = 1$ | $\omega = 10^2$ | $\omega = 10^4$ |
|---|---|---|---|
| 60 | $8.5490e-003$ | $1.7358e-002$ | $1.7937e-002$ |
| 80 | $1.8834e-007$ | $1.6597e-004$ | $1.2324e-005$ |
| 100 | $8.6442e-013$ | $1.6559e-004$ | $1.1908e-005$ |
| 120 | $5.3380e-013$ | $1.6559e-004$ | $1.1908e-005$ |
| 150 | $4.8173e-013$ | $1.6559e-004$ | $1.1908e-005$ |
| [30] | $0.1130e-003$ | $0.5620e-002$ | $0.1800e-003$ |

## 3. Выводы

Решение линейных и нелинейных интегральных уравнений Вольтерра с сильно осциллирующими ядрами — сложная задача ввиду наличия осцилляционного параметра в ядрах ИУВ, особенно когда эти ИУВ имеют осциллирующие решения. Численные алгоритмы, разработанные за последние годы для вычисления обратного преобразования Лапласа, как правило, менее точны и плохо обусловлены (см., например, [31, 32] и имеющиеся там ссылки). Однако данный численный метод, основанный на численном вычислении формулы обратного L-преобразования, работал хорошо. Мы применили численную схему для линейных и некоторых нелинейных ИУВ с сильно осциллирующими ядрами и получили результаты очень высокого порядка точности. Фактическая ошибка и граница ошибки численной схемы хорошо согласуются в некотором диапазоне квадратурных узлов. Данная численная схема — очень хорошая альтернатива для аналогичных типов ИУВ с сильно осциллирующими ядрами.

## Литература

1. **Ding H.J., Wang H.M., and Chen W.Q.** Analytical solution for the electroelastic dynamics of a nonhomogeneous spherically isotropic piezoelectric hollow sphere // Archive of Applied Mechanics. — 2003. — Vol. 73, № (1-2). — P. 49–62.

2. **Paola Baratella.** A nyström interpolant for some weakly singular linear Volterra integral equations // J. of Computational and Applied Mathematics. — 2009. — Vol. 231, № 2. — P. 725–734.
3. **Ralph Chill and Jan Prüss.** Asymptotic behaviour of linear evolutionary integral equations // Integral Equations and Operator Theory. — 2001. — Vol. 39, № 2. — P. 193–213
4. **Sunil Kumar, Amit Kumar, Devendra Kumar, Jagdev Singh, and Arvind Singh.** Analytical solution of Abel integral equation arising in astrophysics via laplace transform // J. of the Egyptian Mathematical Society. — 2015. — Vol. 23, № 1. — P. 102–107.
5. **Chandler-Wilde Simon N., Graham Ivan G., Langdon Stephen, and Spence Euan A.** Numerical asymptotic boundary integral methods in high-frequency acoustic scattering // Acta Numerica. — 2012. — Vol. 21. — P. 89–305.
6. **Hermann Brunner.** Collocation methods for Volterra integral and related functional differential equations, volume 15. — Cambridge University Press, 2004.
7. **Kirane Mokhtar and Rogovchenko Yuri V.** On oscillation of nonlinear second order differential equation with damping term // Applied Mathematics and Computation. — 2001. — Vol. 117, № (2-3). — P. 177–192.
8. **Davies Penny J. and Duncan Dugald B.** Stability and convergence of collocation schemes for retarded potential integral equations // SIAM J. on Numerical Analysis. — 2004. — Vol. 42, № 3. — P. 1167–1188.
9. **Brunner Hermann, Davies Penny J., and Duncan Dugald B.** Discontinuous galerkin approximations for Volterra integral equations of the first kind // IMA J. of Numerical Analysis. — 2009. — Vol. 29, № 4. — P. 856–881.
10. **Xiang Shuhuang.** Laplace transforms for approximation of highly oscillatory Volterra integral equations of the first kind // Applied Mathematics and Computation. — 2014. — Vol. 232. — P. 944–954.
11. **Wang Haiyong and Xiang Shuhuang.** Asymptotic expansion and filon-type methods for a Volterra integral equation with a highly oscillatory kernel // IMA J. of Numerical Analysis. — 2011. — Vol. 31, № 2. — P. 469–490.
12. **Almeida Ricardo, Jleli Mohamed, and Samet Bessem.** A numerical study of fractional relaxation–oscillation equations involving $\psi$ — caputo fractional derivative // Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas. — 2019. — Vol. 113, № 3. — P. 1873–1891.
13. **Shomaila Mazhar, ul Islam Siraj, and Zaman Sakhi.** On numerical computation of three dimensional highly oscillatory integrals. — Mathematical Sciences in Engineering Applications (NCMSEA-2018), page 101.
14. **ul Islam Siraj, Al-Fhaid A.S., and Zaman Sakhi.** Meshless and wavelets based complex quadrature of highly oscillatory integrals and the integrals with stationary points // Engineering Analysis with Boundary Elements. — 2013. — Vol. 37, № 9. — P. 1136–1144.
15. **Linz Peter.** Product integration methods for Volterra integral equations of the first kind // BIT Numerical Mathematics. — 1971. — Vol. 11, № 4. — P. 413–421.
16. **de Hoog Frank and Weiss Richard.** On the solution of Volterra integral equations of the first kind // Numerische Mathematik. — 1973. — Vol. 21, № 1. — P. 22–32.
17. **McAlevey L.G.** Product integration rules for Volterra integral equations of the first kind // BIT Numerical Mathematics. — 1987. — Vol. 27, № 2. — P. 235–247.
18. **Levin David.** Fast integration of rapidly oscillatory functions // J. of Computational and Applied Mathematics. — 1996. — Vol. 67, № 1. — P. 95–101.
19. **Iserles Arieh and Nørsett Syvert P.** On quadrature methods for highly oscillatory integrals and their implementation // BIT Numerical Mathematics. — 2004. — Vol. 44, № 4. — P. 755–772.

20. **Branders Maria and Piessens Robert.** An extension of Clenshaw–Curtis quadrature // J. of Computational and Applied Mathematics. — 1975. — Vol. 1, № 1. — P. 55–65.

21. **Piessens Robert and Branders Maria.** Modified Clenshaw–Curtis method for the computation of bessel function integrals // BIT Numerical Mathematics. — 1983. — Vol. 23, № 3. — P. 370–381.

22. **Xiang Shuhuang, Gui Weihua, and Mo Pinghua.** Numerical quadrature for bessel transformations // Applied Numerical Mathematics. — 2008. — Vol. 58, № 9. — P. 1247–1261.

23. **Polyanin Andrei D. and Manzhirov Alexander V.** Handbook of Integral Equations. — CRC press, 1998.

24. **Sprössig Wolfgang and Venturino E.K.** The treatment of window problems by transform methods // Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen. — 1993. — Vol. 12, № 4. — P. 643–654.

25. **Talbot Alan.** The accurate numerical inversion of laplace transforms // IMA J. of Applied Mathematics. — 1979. — Vol. 23, № 1. — P. 97–12.

26. **Sheen Dongwoo, Sloan Ian H., and Thomée Vidar.** A parallel method for time discretization of parabolic equations based on laplace transformation and quadrature // IMA J. of Numerical Analysis. — 2003. — Vol. 23, № 2. — P. 269–299.

27. **López-Fernández M. and Palencia C.** On the numerical inversion of the laplace transform of certain holomorphic mappings // Applied Numerical Mathematics. — 2004. — Vol. 51, № (2-3). — P. 289–303.

28. **Brunner Hermann.** On Volterra integral operators with highly oscillatory kernels // Discret. Contin. Dyn. Syst. — 2014. — Vol. 34. — P. 915–929.

29. **Ma Junjie, Xiang Shuhuang, and Kang Hongchao.** On the convergence rates of Filon methods for the solution of a Volterra integral equation with a highly oscillatory bessel kernel // Applied Mathematics Letters. — 2013. — Vol. 26, № 7. — P. 699–705.

30. **Wu Qinghua.** On graded meshes for weakly singular Volterra integral equations with oscillatory trigonometric kernels // J. of Computational and Applied Mathematics. — 2014. — Vol. 263. — P. 370–376.

31. **Davis Philip J. and Rabinowitz Philip.** Methods of Numerical Integration. — Courier Corporation, 2007.

32. **Obi Wilson C.** Error analysis of a laplace transform inversion procedure // SIAM J. on Numerical Analysis. — 1990. — Vol. 27, № 2. — P. 457–469.

*Поступила в редакцию 22 мая 2020 г.*
*После исправления 24 ноября 2020 г.*
*Принята к печати 14 июля 2021 г.*