ОБ ЭВОЛЮЦИОННЫХ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЯХ

К. П. Черкасова

(Харьков)

Как известно, при течении в сопле Лаваля энтропия сохраняется, поэтому наряду с обычным течением, при котором происходит непрерывный переход от дозвуковой к сверхзвуковой скорости, формально возможно обратное течение с непрерывным переходом от сверхзвуковой скорости к дозвуковой. Однако экспериментально такие течения не наблюдаются. Неустойчивость таких течений была показана Канторовичем [1] и Мейером [2] путем исследования профиля волны возмущения. С другой стороны, невозможность обратного непрерывного перехода через скорость звука весьма просто следует из условий эволюционности [3]. Условия эволюционности стационарных одномерных течений в обычной гидродинамике заключаются в том, что при движении вдоль линии тока число Маха M должно проходить через особую точку $M = 1$ от значений $M<1$ к значениям $M>1$.

Точно такими же будут условия эволюционности в магнитной гидродинамике [4], только вместо обычного числа Маха следует ввести магнитогидродинамические числа Маха $M_{\pm} = u/u_{\pm}$, где u — скорость течения, $u_{\pm}$ — фазовые скорости распространения быстрых или медленных магнитозвуковых волн. Стационарное одномерное магнитогидродинамическое течение является эволюционным, если при движении вдоль линии тока числа Маха M_+ или M_- проходят через значения $M_+ = 1$ или $M_- = 1$ соответственно от значений, меньших единицы, к значениям, большим единицы.

Цель настоящей работы заключается в определении ограничений, которые налагают условия эволюционности на возможные типы непрерывных магнитогидродинамических течений, если единственным внешним воздействием является изменение площади поперечного сечения.

Рассмотрим квазиодномерное магнитогидродинамическое стационарное течение в некотором канале. Квазиодномерная модель предполагает, что переменные, характеризующие течение являются средними по сечению, нормальному к оси; что касается направлений скорости и магнитного поля, то они произвольны [1]. Будем для простоты считать проводимость бесконечной, а также положим, что на течение не оказывается никаких внешних воздействий, кроме изменения площади поперечного сечения канала. Тогда уравнения, описывающие течение, будут следующие:

$$\frac{d}{dx}(\rho u S) = 0, \qquad \frac{d}{dx}(H_x S) = 0, \qquad \frac{d}{dx}(H_x v - H_y u) = 0 \tag{1}$$

$$u\frac{du}{dx} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} - \frac{1}{4\pi\rho}H_y\frac{dH_y}{dx}, \qquad u\frac{dv}{dx} = \frac{H_x}{4\pi\rho}\frac{dH_y}{dx}, \qquad \frac{p}{\rho^\gamma} = \mathrm{const}$$

где ось x направлена вдоль оси канала; u и v — составляющие скорости вдоль осей x и y; S — площадь поперечного сечения канала, остальные обозначения общепринятые. Появление множителя S во втором из этих уравнений связано с вмороженностью магнитных силовых линий в вещество.

Система уравнений (1) может быть представлена в следующем виде:

$$(u^2 - u_-^2)(u^2 - u_+^2)\frac{d\ln u}{dx} = \frac{d\ln S}{dx}(u^2c^2 - V_x^2c^2 + V_xV_yuv), \qquad \frac{d\ln H_x}{dx} = -\frac{d\ln S}{dx}$$

$$(u^2 - u_-^2)(u^2 - u_+^2)\frac{d\ln \rho}{dx} = -\frac{d\ln S}{dx}(u^4 - u^2V^2 + V_xV_yuv)$$

$$(u^2 - u_-^2)(u^2 - u_+^2)\frac{d\ln H_y}{dx} = -\frac{d\ln S}{dx}\left[u^2c^2 + \frac{uvV_x}{V_y}(u^2 - c^2)\right] \tag{2}$$

$$(u^2 - u_-^2)(u^2 - u_+^2)\frac{d\ln v}{dx} = -\frac{d\ln S}{dx}\left[V_x^2(u^2 - c^2) + \frac{uc^2V_xV_y}{v}\right]$$

$(V = H/\sqrt{4\pi\rho}$ — альфвеновская скорость)

Из уравнений (2) видно, что критическими скоростями являются скорости $u_{\pm}$ распространения быстрых или медленных магнитозвуковых волн.

---

[1] В обычной гидродинамике это соответствует одномерной модели, или гидравлическому приближению, при котором пренебрегают составляющей скорости, перпендикулярной к оси. Однако при наличии магнитного поля в гидравлическом приближении скорость может быть направлена под произвольным углом к оси. Такое течение возможно, например, в кольцевом сопле [5].

Для исследования возможностей непрерывного перехода через каждую из этих скоростей введем числа $M_x = u / V_x$ и $N = v / V_x$ и выпишем систему уравнений, аналогичную (2), для величин $M_\pm$, M_x, N

$$
\begin{aligned}
(M_-^2-1)(M_+^2-1)\frac{d\ln M_\pm}{dx} &= \frac{d\ln S}{dx} F_\pm (M_+, M_-, M_x, N)\\
(M_-^2-1)(M_+^2-1)\frac{d\ln M_x}{dx} &= \frac{d\ln S}{dx} G (M_+, M_-, M_x, N)\\
(M_-^2-1)(M_+^2-1)\frac{d\ln N}{dx} &= \frac{d\ln S}{dx} E (M_+, M_-, M_x, N)
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

где

$$
\begin{aligned}
F_\pm (M_+, M_-, M_x, N) = M_x^2 - 1 + \frac{NM^2}{M_y} + \left(\frac{1}{M_\pm^2} - \frac{1}{M_\mp^2}\right)^{-1}\Biggl\{\frac{1}{2}\left[\gamma\left(\frac{1}{M^2} - \frac{1}{M_\mp^2}\right) + \right.\\
\left. + \frac{1}{M_\mp^2} - \frac{1}{M_\pm^2}\right]\left[M_x^2 - 1 + \frac{NM^2}{M_y} + (M_-^2-1)(M_+^2-1)\right] + \\
+ \left(\frac{1}{M_x^2} - \frac{1}{M_\mp^2}\right)(M_-^2-1)(M_+^2-1) + \frac{1}{M_y^2}\left[M_x^2 + M_y N (M^2-1)\right]\Biggr\}
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

$$
G (M_+, M_-, M_x, N) = \frac{1}{2}\left[M_x^2 - 1 + \frac{NM^2}{M_y} + (M_-^2-1)(M_+^2-1)\right]
$$

$$
\begin{aligned}
E (M_+, M_-, M_x, N) = \frac{1}{2}(M_+^2-1)(M_-^2-1) + \frac{3}{2} - \frac{M_x^2}{2NM_y}(2 + NM_y) - \\
- \frac{M^2}{2M_y}(N + 2M_y)
\end{aligned}
$$

$$
M = \frac{M_- M_+}{M_x}, \qquad M_y^2 = \left(\frac{1}{M_+^2} + \frac{1}{M_-^2} - \frac{1}{M_x^2} - \frac{M_x^2}{M_-^2 M_+^2}\right)^{-1}
$$

Особыми точками уравнений (3) будут значения $M_\pm = 1$. Из условия конечности производных следует, что в этих точках должно выполняться либо $dS / dx = 0$, либо $F_\pm = 0$. Течение, проходящее через значения $M_+ = 1$ или $M_- = 1$, будет эволюционным, если

$$
dM_\pm / dx > 0 \quad \text{при } M_\pm = 1 \qquad (5)
$$

Используя (5), из уравнений (3) получаем следующее условие эволюционности

$$
(\pm 1)\left(\frac{d}{dx}\left(F_\pm \frac{dS}{dx}\right)\right)_{M_\pm=1} > 0 \qquad (6)
$$

Рассмотрим в качестве примера случай, когда в точке $M_+ = 1$

$$
dS / dx = 0, \qquad F_+ > 0
$$

Из (6) имеем

$$
(d^2S / dx^2)_{M_+=1} > 0
$$

т. е. в этом случае течение, проходящее через $M_+ = 1$, будет эволюционным, если в критическом сечении площадь канала минимальна.

Автор благодарит А. И. Ахиезера и Р. В. Половина за советы и дискуссии.

Физико-технический институт АН УССР Поступила 10 III 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Kantorowitz A. The Formation and Stability of Normal Shock Waves on Channel Flows. Phys. Rev., 1947, vol. 71, N 7.
2. Meyer R. E. On Waves of Finite Amplitude in Ducts. Proc. Symp. Appl. Math. Mc-Graw Hill Co, New York, Toronto, London, 1953, vol. 4, p. 41.
3. Половин Р. В. Об условиях эволюционности стационарных течений. ЖЭТФ. 1961, т. 41, вып. 2.
4. Половин Р. В. Об условиях эволюционности магнитогидродинамических течений. ПМТФ, 1961, № 6.
5. Longmire C. L. The Use of Plasma for Propulsion of Interplanetary Rockets. Plasma Acceleration. Stanford University Press, 1960.