

МАКРОНАПРЯЖЕНИЯ УПРУГОГО ТЕЛА

М. Я. Леонов, К. Н. Русинко

(Львов)

Ввиду наличия микродефектов и микронеоднородности реальных твердых тел, их деформации в достаточно малом объеме имеют случайный характер [1]. Математическое ожидание этих деформаций определяется методами математической теории упругости и пластичности. В силу статистических законов относительные перемещения точек реального твердого тела можно считать практически совпадающими с перемещениями соответствующих точек однородной модели, если только расстояние между ними превосходит некоторую величину, являющуюся структурной характеристикой материала, обозначаемую в дальнейшем через 2ρ .

В данной статье предполагается, что суммарное влияние микронеоднородностей реального твердого тела, заключенных внутри любой сферы радиуса ρ , на механические свойства является одинаковым. По этой причине вводятся некоторые усредненные деформации сферы радиуса ρ и к ним применяются зависимости, установленные при обычных механических испытаниях материалов. Таким образом, достигается простейшее обобщение теории хрупкого разрушения Гриффитса и несколько изменяются условия возникновения пластических деформаций.

§ 1. Определение макродеформаций. Макроудлинением $\epsilon_n(x, y, z, \rho)$ назовем относительное удлинение соответствующего диаметра n сферы радиуса ρ с центром в точке (x, y, z) . В силу принятого определения макроудлинение в направлении оси z представляется в виде

$$\epsilon_z(x, y, z, \rho) = \frac{1}{2\rho} [w(x, y, z + \rho) - w(x, y, z - \rho)] \quad (1.1)$$

где w — перемещение в направлении оси z , определенное методами теории упругости (такие деформации в дальнейшем называются идеализированными).

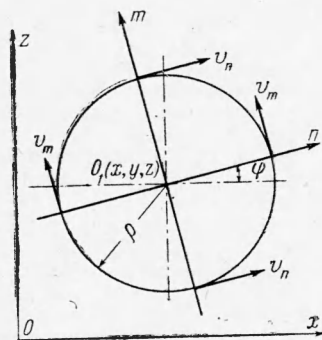
Замечая, что $\partial w / \partial z$ является идеализированным удлинением в направлении оси z , заключаем, что макроудлинение является средним идеализированным удлинением, определенным на соответствующем диаметре сферы радиуса ρ . Макрорасширением θ будем называть отношение приращения объема, заключенного внутри сферы радиуса ρ к ее первоначальному объему ($V_0 = \frac{4}{3} \pi \rho^3$), т. е.

$$\theta = \frac{3}{4\pi\rho^2} \iint_F \epsilon_n dF_n$$

где F — поверхность сферы радиуса ρ с центром в точке (x, y, z) , а dF_n — ее элемент с нормалью n .

Очевидно, что θ является усредненным внутри сферы радиуса ρ идеализированным расширением:

$$\theta = \frac{3}{4\pi\rho^3} \iiint_V \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dV$$



Фиг. 1

Здесь u, v, w — проекция идеализированного перемещения в направлении координатных осей, V — объем, ограниченный сферой F .

При действии поверхностных и постоянных массовых сил идеализированное расширение является гармонической функцией. Используя теорему о среднем для гармонической функции, легко доказать, что макрорасширение равно идеализированному расширению в центре рассматриваемой сферы, т. е. оно не зависит от радиуса сферы ρ и определяется формулой

$$\theta(x, y, z) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1.2)$$

Ввиду малости параметра ρ по сравнению с размерами тела этой формулой можно пользоваться практически в общем случае действия массовых сил.

Макросдвигом Γ_{nm} назовем изменение прямого угла между прямыми, соединяющими точки тела, находящихся до деформации на концах диаметров сферы радиуса ρ , параллельных направлениям n, m . Когда плоскость nm параллельна (фиг. 1) координатной плоскости xz , имеем

$$\begin{aligned} \Gamma_{nm} = & \frac{1}{2\rho} [v_m(x + \rho \cos \varphi, y, z + \rho \sin \varphi) - v_m(x - \rho \cos \varphi, y, z - \rho \sin \varphi)] + \\ & + \frac{1}{2\rho} [v_n(x - \rho \sin \varphi, y, z + \rho \cos \varphi) - v_n(x + \rho \sin \varphi, y, z - \rho \cos \varphi)] \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь v_n, v_m — проекции идеализированных перемещений на оси n, m , определяемые формулами

$$v_n = u \cos \varphi + w \sin \varphi, \quad v_m = -u \sin \varphi + w \cos \varphi \quad (1.4)$$

Замечая, что $\partial v_m / \partial n$ является идеализированным поворотом бесконечно малого элемента, параллельного оси $O_1 n$, заключаем, что первое слагаемое формулы (1.3) является средним идеализированным поворотом, определенным на соответствующем диаметре сферы радиуса ρ ; второе слагаемое является средним идеализированным поворотом элемента, параллельного оси $O_1 m$.

§ 2. Макронапряжения. Примеры. 1°. Компонентом нормального макронапряжения в направлении n будем называть величину

$$S_n = 2G\varepsilon_n + \lambda\theta \left(G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \right) \quad (2.1)$$

Здесь G — модуль сдвига, λ — постоянная Ляме, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона. Замечая, что расширение не зависит от ориентации осей координат, заключаем, что направление максимального макроудлинения совпадает с направлением максимального нормального макронапряжения.

В качестве примера определения макронапряжений рассмотрим неограниченное тело с бесконечно сплюснутой эллипсоидальной полостью (эллиптической щелью с полуосями a, b); к телу на бесконечности приложены нормальные усилия интенсивности S .

Плоскость щели примем за плоскость xOy , начало координат поместим в центре щели, ось x направим по большой полуоси эллипса.

Идеализированные перемещения упругого изотропного тела, когда внутри щели существует гидростатическое давление S , а на бесконечности напряжения отсутствуют, определяются [2] формулами¹

$$u_1 = \Phi_1 - \frac{z}{2-2\nu} \frac{\partial \Phi_3}{\partial x}, \quad v_1 = \Phi_2 - \frac{z}{2-2\nu} \frac{\partial \Phi_3}{\partial y}, \quad w_1 = \Phi_3 - \frac{z}{2-2\nu} \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \quad (2.2)$$

Здесь

$$\Phi_1 = \frac{1-2\nu}{2-2\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \Phi_2 = \frac{1-2\nu}{2-2\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \Phi_3 = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (2.3)$$

$$\Phi = \frac{abB}{4} \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2 + \psi} - \frac{y^2}{b^2 + \psi} - \frac{z^2}{\psi} \right) \frac{d\psi}{\sqrt{\psi(a^2 + \psi)(b^2 + \psi)}} \quad (2.4)$$

$$B = S : \frac{abE}{4(1-\nu^2)} \int_0^\infty \left(\frac{1}{a^2 + \psi} + \frac{1}{b^2 + \psi} \right) \frac{d\psi}{\sqrt{\psi(a^2 + \psi)(b^2 + \psi)}} \quad (2.5)$$

причем ω — положительный корень уравнения

$$\frac{x^2}{a^2 + \omega} + \frac{y^2}{b^2 + \omega} + \frac{z^2}{\omega} = 1$$

На указанное напряженное состояние наложим однородное растяжение в направлении оси z

$$\sigma_z = S, \quad \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0, \quad u = v = 0$$

При этом перемещения представятся в виде

$$u = u_1, \quad v = v_1, \quad w = w_1 + \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{1-\nu} \frac{S}{E} z \quad (2.6)$$

Из формул (1.2), (2.2), (2.3) и (2.6) определяем расширение

$$\theta(x, y, z) = \frac{1-2\nu}{2-2\nu} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) + \frac{(1-2\nu)(1+\nu)S}{(1-\nu)E}$$

Функция Φ — гармоническая, поэтому последняя формула упрощается

$$\theta(x, y, z) = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) + \frac{(1-2\nu)(1+\nu)S}{(1-\nu)E} \quad (2.7)$$

¹ В формулах (7.10) и (7.11) работы [2] имеются опечатки, которые исправлены в данной работе.

Выполнив соответствующие вычисления, из формул (2.4), (2.5), (2.7) получим

$$\theta(0, b + \rho, 0) = \frac{2(1-2\nu)(1+\nu)S}{EJ(e, \pi/2)} \left[J(e, \gamma_1) - J(e, \pi/2) + \frac{V\eta^2 + 2\alpha + \alpha^2}{\eta(1+\alpha)V\alpha(2+\alpha)} \right] + \\ + \frac{(1-2\nu)(1+\nu)S}{(1-\nu)E}$$

Здесь $J(e, \gamma)$ — эллиптический интеграл второго рода

$$J(e, \gamma) = \int_0^\gamma V\sqrt{1-e^2\sin^2\psi} d\psi \\ e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}, \quad \sin \gamma_1 = \frac{V\alpha(2+\alpha)}{1+\alpha}, \quad \alpha = \frac{\rho}{b}, \quad \eta = \frac{a}{b} \quad (2.8)$$

Максимальное макроудлинение представляется в виде

$$\varepsilon_z = \frac{1}{\rho} w(x, y, z + \rho)$$

Определив перемещение w точки $(0, b + \rho, \rho)$ по формуле (2.6) и используя формулы (2.2) — (2.5), найдем

$$\varepsilon_z = \frac{(1+\nu)S}{EJ(e, \pi/2)} \left\{ (1-2\nu) \left[\frac{\eta V\sqrt{1+\alpha\alpha_1}}{V\alpha\alpha_1(\eta^2 + \alpha\alpha_1)} - J(e, \gamma_2) \right] + \right. \\ \left. + \frac{\eta V\sqrt{1+\alpha\alpha_1}}{2\alpha_1\alpha_2 V\alpha\alpha_1(\eta^2 + \alpha\alpha_1)} \right\} + \frac{(1-2\nu)(1+\nu)S}{(1-\nu)E}$$

причем

$$\alpha_1 = 1 + \alpha + \alpha_2, \quad \alpha_2 = V\alpha^2 + 2\alpha + 2, \quad \sin \gamma_2 = \frac{\eta}{V\eta^2 + \alpha\alpha_1} \quad (2.9)$$

Максимальное нормальное макронапряжение (2.1) представим в виде

$$S_z = kS \quad (2.10)$$

где k — коэффициент концентрации макронапряжений, определяемый для данного случая формулой

$$J(e, \pi/2)k = 2\nu \left[J(e, \gamma_1) + \frac{V\eta^2 + 2\alpha + \alpha^2}{\eta(1+\alpha)V\alpha^2 + 2\alpha} \right] + \frac{(1-2\nu)\eta V\sqrt{1+\alpha\alpha_1}}{V\alpha\alpha_1(\eta^2 + \alpha\alpha_1)} + \\ + (1-2\nu)[J(e, \pi/2) - J(e, \gamma_2)] + \frac{\eta V\sqrt{1+\alpha\alpha_1}}{2\alpha_1\alpha_2 V\alpha\alpha_1(\eta^2 + \alpha\alpha_1)} \quad (2.11)$$

В случае макроскопической щели ($b \gg \rho$) формулу (2.11) можно привести к виду

$$k = \frac{4\nu V\sqrt{1+V^2} + (3-4\nu)V^2 - 1}{2J(e, \pi/2)V^2(1+V^2)} V\sqrt{\frac{b}{\rho}} \quad (b \gg \rho) \quad (2.12)$$

При $a = b$ имеем тело с круговой щелью. В этом случае из формул (2.8), (2.9) и (2.11) получим

$$\pi k = 4\nu \left(\arctg V\alpha^2 + 2\alpha + \frac{1}{V\alpha^2 + 2\alpha} \right) + \\ + 2(1-2\nu) \left(\arctg V\alpha\alpha_1 + \frac{1}{V\alpha\alpha_1} \right) + \frac{1}{\alpha_1\alpha_2 V\alpha\alpha_1} \quad (2.13)$$

Для макроскопической щели отсюда следует

$$k = \frac{4\nu V\sqrt{1+V^2} + (3-4\nu)V^2 - 1}{\pi V^2(1+V^2)} V\sqrt{\frac{b}{\rho}} \quad (b \gg \rho) \quad (2.14)$$

При $a \rightarrow \infty$ имеем тело, находящееся в условиях плоской деформации, с щелью длиной $2b$. Из формул (2.8), (2.9) и (2.11) в этом случае получим

$$k = (1 + \alpha) \left[\frac{2\nu}{\sqrt{\alpha(2 + \alpha)}} + \frac{(3 - 4\nu)\alpha_2 - (1 + \alpha)}{2\alpha_2 \sqrt{\alpha(1 + \alpha_2)}} \right] \quad (a = \infty) \quad (2.15)$$

При $b \gg \rho$ последнюю формулу можно привести к виду

$$k = \frac{4\nu \sqrt{1 + \sqrt{2}} + (3 - 4\nu) \sqrt{2} - 1}{2 \sqrt{2} (1 + \sqrt{2})} \sqrt{\frac{b}{\rho}} \quad (b \gg \rho) \quad (2.16)$$

Для пластинки с прямолинейной трещиной длиной $2b$, растягиваемой на бесконечности в направлении, перпендикулярном трещине, коэффициент концентрации нормальных макронапряжений можно определить, пользуясь формулой (2.15) и заменяя коэффициент Пуассона ν на величину $\nu/1 + \nu$, т. е. в этом случае

$$k = (1 + \alpha) \left[\frac{2\nu}{(1 + \nu) \sqrt{\alpha(2 + \alpha)}} + \frac{1}{2 \sqrt{\alpha(1 + \alpha_2)}} \left(\frac{3 - \nu}{1 + \nu} - \frac{1 + \alpha}{\alpha_2} \right) \right] \quad (2.17)$$

В частности, при $b \gg \rho$ найдем

$$k = \frac{4\nu \sqrt{1 + \sqrt{2}} + (3 - \nu) \sqrt{2} - (1 + \nu)}{2(1 + \nu) \sqrt{2} (1 + \sqrt{2})} \sqrt{\frac{b}{\rho}} \quad (b \gg \rho) \quad (2.18)$$

В заключение рассмотрим неограниченную пластинку с круговым отверстием радиуса b . Пластинка на бесконечности подвергается одностороннему растяжению напряжением S . Максимальное макронапряжение представим в виде (2.10), причем для коэффициента концентрации макронапряжений на основании известных решений получим формулу

$$k = \frac{2\nu\alpha^2}{(1 + \nu)(1 + \alpha)^2(1 + 2\alpha + 2\alpha^2)} + \frac{3 + 11\alpha + 25\alpha^2 + 40\alpha^3 + 42\alpha^4 + 24\alpha^5 + 8\alpha^6}{(1 + 2\alpha + 2\alpha^2)^3} \quad (2.19)$$

Приводим некоторые значения коэффициента концентрации макронапряжений k , подсчитанные при $\nu = 0.3$ по формулам (2.13), (2.15), (2.19) соответственно для круговой трещины, для обобщений задачи Гриффитса и для кругового отверстия для различных значений b/ρ

$b/\rho =$	1	2	3	5	10	15	25
$k_{(2.13)}$	1.045	1.134	1.227	1.404	1.781	2.094	2.612
$k_{(2.15)}$	1.197	1.418	1.614	1.950	2.610	3.133	3.979
$k_{(2.19)}$	1.247	1.508	1.730	2.044	2.423	2.600	2.741

2°. Касательным макронапряжением T_{nm} будем называть величину

$$T_{nm} = G \Gamma_{nm} \quad (2.20)$$

Определим максимальное касательное макронапряжение для пластинки с трещиной длиной $2b$, когда на бесконечности к пластинке приложены нормальные напряжения $\sigma_z = S$ (плоское напряженное состояние).

Начало координат выбираем в центре трещины, ось x направляем перпендикулярно срединной плоскости пластинки, ось y — по трещине. Максимальный макросдвиг Γ_{nm} определяем по формулам (1.3), (1.4) при $x = 0$, $y = b + \rho$, $z = 0$, $\varphi = 45^\circ$, причем идеализированные перемещения определяются формулами (2.6) при соответствующем переходе к плоскому напряженному состоянию.

Максимальное касательное макронапряжение (2.20) представим в виде

$$T_{nm} = k_T \frac{S}{2} \quad (2.21)$$

Здесь k_T — коэффициент концентрации касательных макронапряжений, определяемый формулой

$$k_T = \frac{1 + \alpha}{(1 + \nu) \sqrt{\alpha(4 + \alpha + \alpha_3)}} \left[3 + \nu - \frac{(1 - \nu)(4 + 3\alpha)}{\alpha_3} \right] \quad (2.22)$$

$$\alpha_3 = \sqrt{3(8 + 8\alpha + 3\alpha^2)}$$

При малых α , т. е. при $b \gg \rho$ формулы (2.22) можно привести к виду

$$k_T = \frac{(3 + \nu) \sqrt{6} - 2(1 - \nu)}{2(1 + \nu) \sqrt{3(2 + \sqrt{6})}} \sqrt{\frac{b}{\rho}} \quad (b \gg \rho) \quad (2.23)$$

§ 3. Условие трещинообразования. Определение структурного параметра. Рассмотрим модель твердого тела, обладающую следующими свойствами.

1. Относительные перемещения двух точек твердого тела, отстоящих на расстоянии, превосходящем 2ρ , определяются соответствующими решениями линейной теории упругости, если нормальные макронапряжения не достигают сопротивления¹ отрыву σ_0 , а касательные макронапряжения меньше сопротивления сдвигу τ_s .

2. В теле образуются и развиваются трещины при достижении максимальным нормальным макронапряжением величины сопротивления отрыву при условии, что касательные макронапряжения меньше сопротивления сдвигу².

Выясним, при каких значениях σ_0/τ_s будет разрушение хрупким или вязким.

Для рассмотренных в предыдущем параграфе примеров в силу макроскопической гипотезы разрушение будет хрупким, если

$$\frac{\sigma_0}{\tau_s} < 2 \frac{k}{k_T} \quad (3.1)$$

где k, k_T — коэффициенты концентраций нормальных и касательных макронапряжений.

Определим, при каких значениях отношения σ_0/τ_s разрушение пластинки с прямолинейной трещиной длины $2b$ будет хрупким, если к пластинке на бесконечности приложены постоянные нормальные напряжения, перпендикулярные линии трещины. Из формул (2.17), (2.22) и (3.1) найдем, что в случае отсутствия трещины ($b = 0$) разрушение будет хрупким, если $\sigma_0 < 2\tau_s$. При $b \gg \rho$ из формул (2.18), (2.23) и (3.1) условие хрупкого разрушения пластинки с трещиной получаем в виде

$$\frac{\sigma_0}{\tau_s} < 2 \sqrt{\frac{3(2 + \sqrt{6})}{2(1 + \sqrt{2})}} \frac{4\nu \sqrt{1 + \sqrt{2} + (3 - \nu) \sqrt{2} - (1 + \nu)}}{(3 + \nu) \sqrt{6} - 2(1 - \nu)} \quad (3.2)$$

Полагая здесь $\nu = 0.2$ и $\nu = 0.3$, найдем, что разрушение пластинки с макроскопической трещиной будет хрупким, если $\sigma_0 < 2.13 \tau_s$ при $\nu = 0.2$ и если $\sigma_0 < 2.18 \tau_s$ при $\nu = 0.3$.

Приведенные результаты показывают, что наличие трещин в рассматриваемой модели твердого тела способствует переходу от вязкого к хрупкому разрушению, что и наблюдается в реальных телах.

Внешнюю нагрузку, при которой образуются и развиваются трещины, будем называть предельной. Полагая в силу макроскопической гипотезы, что макронапряжение (2.10) равно сопротивлению отрыву, получим предельное напряжение на бесконечности, равным

$$S_p = \frac{\sigma_0}{k} \quad (3.3)$$

В случае тела с круговой трещиной при $b \gg \rho$ предельная нагрузка, определенная по формулам (2.14) и (3.3), будет

$$S_p = \frac{\pi \sqrt{2(1 + \sqrt{2})} \sigma_0}{4\nu \sqrt{1 + \sqrt{2} + (3 - 4\nu) \sqrt{2} - 1}} \sqrt{\frac{\rho}{b}} \quad (b \gg \rho) \quad (3.4)$$

Полученная зависимость предельного напряжения от размера b с точностью до постоянного множителя совпала с формулой Сака [4]

$$S_p = \sqrt{\frac{\pi ET}{2(1 - \nu^2)b}} \quad (T — поверхностная энергия) \quad (3.5)$$

Потребуем, чтобы предельная нагрузка (3.4), определенная на основе макроскопической гипотезы, совпала тождественно с предельной нагрузкой (3.5). Для рассматриваемой модели из этого условия получим связь структурного параметра с поверхностной энергией

$$\rho = \frac{[4\nu \sqrt{1 + \sqrt{2} + (3 - 4\nu) \sqrt{2} - 1}]^2}{4\pi(1 + \sqrt{2})(1 - \nu^2)} \frac{ET}{\sigma_0^2} \quad (3.6)$$

Формулу (3.6) можно представить в виде

$$\rho = \beta \frac{ET}{\sigma_0^2} \quad (3.7)$$

¹ Некоторые значения сопротивления отрыву найдены Г. В. Ужиком [3].

² Это свойство рассматриваемой модели в дальнейшем называется макроскопической гипотезой трещинообразования.

где β — отвлеченное число, некоторые значения которого для $\nu = 0.15, 0.2, 0.25, 0.3$ соответственно будут $\beta = 0.373, 0.386, 0.402, 0.421$.

В случае тела с эллиптической трещиной при $b \gg \rho$ предельное напряжение, определенное по формулам (2.12), (3.3) и (3.6), равно

$$S_p = J(e, \pi/2) \sqrt{\frac{2ET}{\pi(1-\nu^2)b}} \quad (b \gg \rho) \quad (3.8)$$

где b — малая полуось эллипса¹.

Предельную нагрузку для тела, находящегося в условиях плоской деформации, с трещиной длиной $2b$ получим из последней формулы при $e = i$, т. е.

$$S_p = \sqrt{\frac{2ET}{\pi(1-\nu^2)b}} \quad (b \gg \rho) \quad (3.9)$$

Формула (3.9) совпадает с известной формулой Гриффитса [4].

В случае растяжения пластинки с трещиной (плоское напряженное состояние) предельная нагрузка, определенная формулами (2.18) и (3.3), будет

$$S_p = \frac{2(1+\nu) \sqrt{2(1+\sqrt{2})} \sigma_0}{4\nu \sqrt{1+\sqrt{2}} + (3-\nu) \sqrt{2} - (1+\nu)} \sqrt{\frac{\rho}{b}} \quad (b \gg \rho) \quad (3.10)$$

Потребуем, чтобы предельная нагрузка (3.10), определенная на основе макроскопической гипотезы, совпала с формулой Гриффитса [4]

$$S_p = \sqrt{\frac{2ET_1}{\pi b}} \quad (3.11)$$

где T_1 — поверхностная энергия для тонких пластин.

Из сопоставления формул (3.10) и (3.11) получим связь структурного параметра с поверхностной энергией для тонких пластин T_1

$$\rho = \frac{[4\nu \sqrt{1+\sqrt{2}} + (3-\nu) \sqrt{2} - (1+\nu)]^2}{4\pi(1+\sqrt{2})(1+\nu)^2} \frac{ET_1}{\sigma_0^2} \quad (3.12)$$

Из сказанного выше вытекает, что при наличии в теле плоских трещин, размеры которых достаточно велики по сравнению с ρ , разрушение тела на основании предложенной здесь макроскопической гипотезы протекает в полном соответствии с существующими теориями развития макроскопических трещин². В частности, при этом можно воспользоваться результатами работы [5], в которой модуль сцепления определяется следующим образом:

$$K = \frac{2\pi\sigma_0 \sqrt{(1+\sqrt{2})}\rho}{4\nu \sqrt{1+\sqrt{2}} + (3-4\nu) \sqrt{2} - 1} \quad (3.13)$$

§ 4. Развитие микротрещин в хрупком теле. Основной задачей статикой хрупкого тела является определение нагрузок, при которых возникают и распространяются мельчайшие трещины. В работе [6] применена простейшая модель хрупкого тела (учитывающая притяжение поверхностей трещин по ступенчатому закону) для решения этой задачи и на ряде примеров показано, что применение методов механики сплошной среды для исследования распространения микротрещин в реальных хрупких телах является более оправданным, чем в случае макротрещин. В последнем случае размеры зоны, в которой имеет место притяжение поверхностей трещин, подсчитанные на основании сделанных в работе Г. И. Баренблатта [5] предположений о порядке величины интенсивности сил сцепления, не дают оснований для применения усредненных коэффициентов упругости (E, ν) в «концевой области» трещины (зона ослабленных связей, в которой учитывается притяжение поверхностей трещины). Но оказывается [6], что чем меньше начальные размеры трещины, тем больше размеры области ослабленных связей и тем больше оснований принять в случае микротрещин методы механики сплошной среды, оперирующей с усредненными характеристиками механических свойств материала (противоположное утверждение, данное в работе Г. И. Баренблатта [5] на стр. 20, не соответствует действительности).

Отмеченный факт, по нашему мнению, имеет фундаментальное значение для развития технической теории начальных стадий разрушения при наличии обычных концентраторов напряжений в деталях машин и сооружений.

Применение макроскопической гипотезы хрупкого разрушения к микротрещинам приводит к значениям предельной нагрузки более низким, чем при учете притяжения

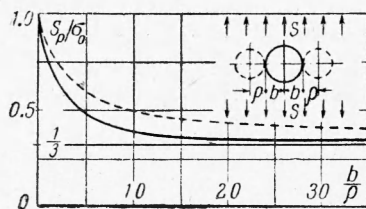
¹ Эта формула получена независимо В. В. Панасюком путем использования результатов работы [5].

² Основная литература по этому вопросу приведена в работе [6].

поверхностей трещины по ступенчатому закону [6]. Приводим некоторые значения δ_1 и δ_2 отклонений в процентах предельных нагрузок согласно макроскопической гипотезе от предельных нагрузок, вычисленных при $\nu = 0.3$ по соответствующим формулам работы [6] для случаев растяжения пластинки с малой прямолинейной щелью δ_2 (обобщенная задача Гриффитса) и тела с малой круговой щелью δ_1 (обобщенная задача Сака) для различных значений b/ρ

$b/\rho =$	0	1	2	3	5	10	15	25
$\delta_1 =$	0	4.36	11.8	14.1	11.8	7.43	5.36	3.44
$\delta_2 =$	0	8.93	7.99	6.55	4.68	2.69	1.84	1.16

Аналогичные вычисления проделаны для случая одноосного растяжения пластинки с круглым отверстием. При этом оказалось, что предельная нагрузка практически зависит только от отношения радиуса отверстия b к структурному параметру ρ . Эта зависимость представлена на фиг. 2 сплошной линией. Пунктиром здесь изображена аналогичная зависимость, полученная для модели хрупкого тела, упрощенно учитывающей притяжение поверхностей трещины [7].



Фиг. 2

Близость результатов, полученных на основе предлагаемой макроскопической гипотезы хрупкого разрушения, к результатам, вытекающим из модели хрупкого тела, предложенной в работе [6], является обоснованием применения указанной гипотезы как для макроскопических, так и для микроскопических трещин, в том числе и для

определения условий возникновения зачаточных трещин. Таким образом, достигается простое решение основной задачи статики хрупкого тела, так как она сводится к обычной задаче теории упругости при полностью заданных граничных условиях.

Поступила 5 IV 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Волков С. Д. Статистическая теория прочности. Машгиз, 1960.
2. Леонов М. Я. Некоторые задачи и приложения теории потенциала. ПММ, 1940, т. 4, вып. 5, 6.
3. Ужик Г. В. Сопротивление отрыву и прочность металлов. АН УССР, 1950.
4. Снеддон И. Преобразование Фурье. М., ИЛ, 1955.
5. Баренблатт Г. И. Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении, ПМТФ, 1961, № 4.
6. Леонов М. Я. Элементы теории хрупкого разрушения. ПМТФ, 1961, № 3.
7. Витвицкий П. М., Леонов М. Я. Растяжение за пределом упругости пластинки с круговым отверстием. ПМТФ, 1962, № 1.

ОЦЕНКА СОПРОТИВЛЕНИЯ ДЛИТЕЛЬНОМУ РАЗРУШЕНИЮ И НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

И. И. Трунин

(Москва)

Приводятся некоторые результаты испытаний на длительную прочность при кручении и растяжении трубчатых образцов, изготовленных из пароперегревательных труб стали перлитного класса (15X1M1Ф) и стали аустенитного класса (1X18H12T).

Рассматривается возможность оценки сопротивления длительному разрушению при сложном напряженном состоянии по результатам соответствующих испытаний в условиях одноосного растяжения, при этом анализируются наиболее опробованные предложения других исследователей: Джонсона, который предложил в качестве критерия длительной прочности использовать величину наибольшего нормального напряжения [1]; В. П. Сдобырева [2, 3], который на основании обработки большого экспериментального материала предложил использовать в качестве такого критерия полусумму интенсивности напряжения σ_i и первого главного нормального напряжения σ_1 .