

УДК 532.5.031:532.591  
DOI: 10.15372/PMTF202315312

# ПУЛЬСИРУЮЩИЙ ИСТОЧНИК В ЖИДКОСТИ ПОД ЛЕДЯНЫМ ПОКРОВОМ ПРИ НАЛИЧИИ СДВИГОВОГО ПОТОКА

И. В. Стurova

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия  
E-mail: sturova@hydro.nsc.ru

Решена двумерная нестационарная задача о развитии волнового движения в двухслойной жидкости конечной глубины, ограниченной сверху ледяным покровом, который моделируется тонкой упругой пластиной с учетом сил продольного сжатия. Рассмотрены случаи, когда в невозмущенном состоянии один из слоев покоится, а в другом (верхнем или нижнем) горизонтальная скорость потока линейно меняется по толщине. Определены дисперсионные зависимости для трех волновых мод, возникающих при наличии сдвигового потока. Вычислены вертикальные прогибы ледяного покрова, обусловленные включением пульсирующего источника возмущений, расположенного в изначально неподвижном слое жидкости. Рассмотрен также частный случай, когда жидкость ограничена сверху твердой крышкой. Задача рассматривается в линейной постановке, жидкость полагается идеальной и несжимаемой.

**Ключевые слова:** тонкая упругая плавающая пластина, изгибио-гравитационные волны, погруженный пульсирующий источник, сдвиговый слой, дисперсионные зависимости

**Введение.** Волновые движения, возникающие в жидкости под ледяным покровом, называются изгибио-гравитационными волнами (ИГВ), поскольку их свойства зависят от свойств как жидкости, так и ледяного покрова [1, 2]. В рамках модели Кирхгофа — Лява ледяной покров обычно моделируется тонкой упругой пластиной. В настоящее время выполнено большое количество исследований генерации ИГВ различными возмущениями, как действующими на ледяном покрове, так и погруженными в жидкость или находящимися на дне. Как правило, предполагается, что в невозмущенном состоянии жидкость либо покоится, либо движется с постоянной по глубине горизонтальной скоростью. Однако в реальных морских условиях вертикальное распределение скорости жидкости может существенно меняться как по величине, так и по направлению. Это свидетельствует о том, что исследование ИГВ также следует проводить в рамках теоретических моделей, учитывающих вертикальную структуру основного течения.

Одной из первых публикаций на данную тему является работа [3], в которой в двумерной постановке изучено влияние продольно сжатой упругой пластины на развитие волновых возмущений потока с линейным сдвигом горизонтальной скорости под действием локализованного внешнего давления. В последнее время интерес к этим задачам значительно возрос в связи с интенсивным освоением полярных районов Мирового океана. Решен ряд

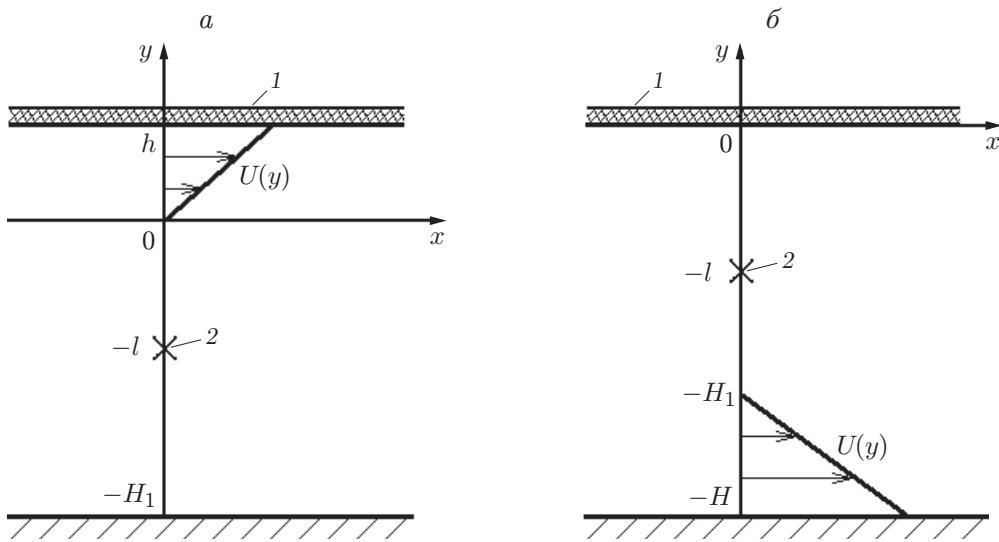


Рис. 1. Схема течения в невозмущенном состоянии для случая 1 (а) и случая 2 (б):  
1 — ледяной покров, 2 — пульсирующий источник

двумерных [4, 5] и трехмерных [6–8] задач. Дальние поля установившихся гравитационных волн, возбуждаемых точечным пульсирующим источником при равномерной стратификации по плотности и условии твердой крышки на верхней границе жидкости, исследованы в [9]. Во всех указанных работах изучался наиболее простой случай линейного сдвигового потока.

В данной работе рассматривается один из наиболее простых примеров сдвигового течения с непостоянной завихренностью, в одном слое которого (приповерхностном или придонном) имеется линейный сдвиговый поток, а в другом жидкость покоятся. На границе слоев скорость жидкости непрерывна. Волновые возмущения создаются неподвижным точечным пульсирующим источником в слое первоначально покоящейся жидкости.

Описание волн, возбуждаемых нестационарным погруженным источником, — одна из классических проблем волновой гидродинамики. В двумерной постановке действие пульсирующего источника в первоначально покоящейся жидкости под ледяным покровом изучено в [10]. Рассмотрен случай жидкости бесконечной глубины и определены волновые возмущения, возникающие при длительной работе источника. В [11] построено решение для прогибов ледяного покрова при нестационарном движении точечного источника переменной интенсивности в жидкости конечной глубины. В трехмерном случае подобная задача решена в [12] для жидкости бесконечной глубины и равномерно сжатого ледяного покрова.

**1. Постановка задачи.** Горизонтальный слой однородной невязкой несжимаемой жидкости имеет постоянную толщину  $H$ . На верхней границе жидкости находится сплошной ледяной покров, который моделируется тонкой упругой напряженной пластиной постоянной толщины  $h_i$  с плотностью  $\rho_i$ . Предполагается, что во все моменты времени ледяной покров контактирует с водой во всех точках. В невозмущенном состоянии часть жидкости находится в состоянии покоя, а в верхнем или нижнем слое толщиной  $h$  имеет место сдвиговое течение с линейным профилем скорости (рис. 1). В первом случае в верхнем слое горизонтальная скорость равна  $U(y) = U_0 y / h$  (см. рис. 1, а), а во втором случае в нижнем придонном слое  $U(y) = -U_0 (y + H_1) / h$  (см. рис. 1, б). Система декартовых координат  $(x, y)$  введена таким образом, что в первом случае горизонтальная ось  $x$  совпадает с невозмущенной границей между сдвиговым и покоящимся слоями, а во втором случае — с невозмущенной верхней границей жидкости, ось  $y$  направлена вертикально вверх. Толщина покоящегося слоя равна  $H_1$ , общая толщина составляет  $H = H_1 + h$ .

Предполагается, что в покоящемся слое жидкости в момент времени  $t = 0$  в точке  $x = 0, y = -l, 0 < l < H_1$  начинает работать точечный массовый источник, пульсирующий по гармоническому закону с мощностью  $S(t) = S_0 \sin(\Omega t)$ . Движение жидкости в первоначально покоящемся слое полагается потенциальным всюду, за исключением точки локализации источника.

Задача решается в линейной постановке, случаи верхнего и нижнего сдвиговых слоев рассматриваются по отдельности.

1.1. *Случай 1 (верхний сдвиговой слой)*. Линеаризованные уравнения Эйлера для сдвигового слоя имеют вид

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} + v \frac{d\mathbf{V}}{dy} + \frac{\nabla p_1}{\rho} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad |x| < \infty, \quad 0 \leq y \leq h, \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{V} = (U(y), 0)$  — вектор скорости основного потока;  $U(y) = U_0 y / h$ ;  $\mathbf{v} = (u, v)$  — возмущения скорости жидкости, которые полагаются малыми;  $p_1$  — динамическое возмущение давления;  $\rho$  — плотность жидкости.

Ледяной покров плывет на поверхности потока жидкости. Кинематическое и динамическое условия на верхней границе жидкости имеют вид

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} = v, \quad D \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} + Q \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + M \left( \frac{\partial}{\partial t} + U_0 \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \eta + g \rho \eta = p_1, \quad y = h, \quad (1.2)$$

где  $\eta(x, t)$  — вертикальный прогиб ледяного покрова;  $D = Eh_i^3 / [12(1 - \nu^2)]$  — его цилиндрическая жесткость;  $E$  — модуль Юнга;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $Q$  — сжимающее усилие;  $M = \rho_i h_i$  — коэффициент инерции ледяного покрова;  $g$  — ускорение свободного падения. В частном случае при  $D = 0, Q = -T, M \neq 0$  верхняя граница жидкости представляет собой мембрану с коэффициентом натяжения  $T > 0$ . При  $M = 0$  в этом случае  $T$  — коэффициент поверхностного натяжения и возникающие волны являются капиллярно-гравитационными. При  $D = Q = 0, M > 0$  на верхней границе жидкости плавает битый лед, а если при этом  $M = 0$ , то имеет место случай свободной поверхности. При замене ледяного покрова твердой крышкой на верхней границе жидкости вместо условий (1.2) следует использовать условие  $v = 0$  при  $y = h$ .

При наличии линейного сдвига продольной скорости основного течения компоненты скорости волнового движения можно представить в виде [5]

$$u(x, y, t) = U(y) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \quad v(x, y, t) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y},$$

где функция  $\varphi_1(x, y, t)$  удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} = 0, \quad |x| < \infty, \quad 0 \leq y \leq h. \quad (1.3)$$

Потенциал скорости возмущенного течения  $\Phi(x, y, t)$  в слое первоначально покоящейся жидкости представим в виде, предложенном в [13]:

$$\Phi(x, y, t) = \Phi_0(x, y, t) + \varphi_2(x, y, t), \quad |x| < \infty, \quad -H_1 \leq y \leq 0, \quad (1.4)$$

где  $\Phi_0(x, y, t)$  — потенциал скорости течения, создаваемого точечным пульсирующим источником в безграничной жидкости:

$$\Phi_0(x, y, t) = \frac{S(t)}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + (y + l)^2}. \quad (1.5)$$

Функция  $\varphi_2(x, y, t)$  удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} = 0, \quad |x| < \infty, \quad -H_1 \leq y \leq 0. \quad (1.6)$$

На границе раздела верхнего и нижнего слоев выполняются условия непрерывности вертикальной скорости и давления

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad p_1 = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad y = 0, \quad (1.7)$$

а на ровном горизонтальном дне — условие непротекания

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0, \quad y = -H_1. \quad (1.8)$$

На большом расстоянии от источника волновые возмущения затухают.

В начальный момент времени волновые возмущения отсутствуют и поверхность лед — вода является горизонтальной:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0, \quad \eta = \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0, \quad t = 0. \quad (1.9)$$

1.2. *Случай 2 (нижний сдвиговый слой).* В верхнем первоначально покоящемся слое жидкости потенциал скорости  $\Psi(x, y, t)$  будем искать в виде, аналогичном (1.4):

$$\Psi(x, y, t) = \Phi_0(x, y, t) + \psi_1(x, y, t), \quad |x| < \infty, \quad -H_1 \leq y \leq 0$$

(функция  $\Phi_0(x, y, t)$  задана в (1.5); функция  $\psi_1(x, y, t)$  удовлетворяет уравнению Лапласа).

В нижнем слое ( $-H \leq y \leq -H_1$ ), в котором имеет место сдвиговое течение  $U(y) = -U_0(y + H_1)/h$ , справедливы линеаризованные уравнения Эйлера, аналогичные (1.1). Поэтому компоненты скорости волнового движения будем искать в виде

$$u(x, y, t) = U(y) + \frac{\partial \psi_2}{\partial x}, \quad v(x, y, t) = \frac{\partial \psi_2}{\partial y},$$

где функция  $\psi_2(x, y, t)$  удовлетворяет уравнению Лапласа.

Кинематическое и динамическое условия на верхней границе жидкости имеют вид

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad D \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} + Q \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + M \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + g \rho \eta + \rho \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0, \quad y = 0, \quad (1.10)$$

а на границе между слоями —

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial t} - \frac{U_0}{h} \frac{\partial \psi_2}{\partial y}, \quad y = -H_1. \quad (1.11)$$

Условие непротекания на дне записывается следующим образом:

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial y} = 0, \quad y = -H. \quad (1.12)$$

Начальные условия аналогичны (1.9).

**2. Метод решения.** Для решения начально-краевых задач, сформулированных в п. 1, используем преобразования Фурье и Лапласа в виде

$$\bar{\varphi}_1(k, y, s) = \int_0^\infty e^{-st} \int_{-\infty}^\infty \varphi_1(x, y, t) e^{-ikx} dx dt.$$

Аналогичные преобразования выполняются для остальных искомых функций.

Функции  $\varphi_{1,2}(x, y, t)$  удовлетворяют уравнениям Лапласа (1.3), (1.6), которые после преобразования Фурье принимают вид

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}_{1,2}}{\partial y^2} - k^2 \bar{\varphi}_{1,2} = 0.$$

Аналогичное уравнение имеет место для функций  $\bar{\psi}_{1,2}(k, y, s)$ .

В случае 1 решения для функций  $\bar{\varphi}_1(k, y, s)$  и  $\bar{\varphi}_2(k, y, s)$  будем искать в виде

$$\bar{\varphi}_1 = C_1 \operatorname{sh} [|k|(h - y)] + D_1 \operatorname{ch} [|k|(h - y)], \quad 0 \leq y \leq h,$$

$$\bar{\varphi}_2 = C_2 \operatorname{sh} (|k|y) + D_2 \operatorname{ch} (|k|y), \quad -H_1 \leq y \leq 0,$$

а в случае 2 — в виде

$$\bar{\psi}_1 = C_3 \operatorname{sh} (|k|y) + D_3 \operatorname{ch} (|k|y), \quad -H_1 \leq y \leq 0; \quad (2.1)$$

$$\bar{\psi}_2 = C_4 \operatorname{sh} [|k|(y + H_1)] + D_4 \operatorname{ch} [|k|(y + H_1)], \quad -H \leq y \leq -H_1, \quad (2.2)$$

где  $C_j(k, s)$ ,  $D_j(k, s)$  ( $j = \overline{1, 4}$ ) — неизвестные функции.

При вычислении преобразования Фурье для функции  $\Phi_0(x, y, t)$  и ее производных по  $x$  и  $y$  использованы результаты, полученные в работе [13]. Выполняя преобразования Лапласа для функции  $S(t)$ , находим

$$\int_0^\infty S(t) e^{-st} dt = \frac{S_0 \Omega}{s^2 + \Omega^2}.$$

В случае 1 неизвестные функции  $\bar{\eta}(k, s)$ ,  $C_j(k, s)$ ,  $D_j(k, s)$  ( $j = 1, 2$ ) определяются из системы пяти алгебраических уравнений, следующих из граничных условий (1.2), (1.7), (1.8):

$$\begin{aligned} (s + ikU_0)\bar{\eta} + |k|C_1 &= 0, \\ F_2\bar{\eta} + i\gamma C_1 + (s + ikU_0)D_1 &= 0, \\ C_1 \operatorname{ch} (|k|h) + D_1 \operatorname{sh} (|k|h) + C_2 &= -\Lambda e^{-|k|l}, \\ C_1 \left[ \operatorname{sh} (|k|h) + \frac{i\gamma}{s} \operatorname{ch} (|k|h) \right] + D_1 \left[ \operatorname{ch} (|k|h) + \frac{i\gamma}{s} \operatorname{sh} (|k|h) \right] - D_2 &= -\Lambda e^{-|k|l}, \\ C_2 \operatorname{ch} (|k|H_1) - D_2 \operatorname{sh} (|k|H_1) &= \Lambda e^{-|k|(H_1 - l)}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{U_0}{h} \operatorname{sgn} k, \quad F_2(k, s) = F_1(k) + M_1(s + ikU_0)^2, \\ F_1(k) &= \frac{Dk^4}{\rho} - \frac{Qk^2}{\rho} + g, \quad M_1 = \frac{M}{\rho}, \quad \Lambda = \frac{S_0 \Omega}{2|k|(s^2 + \Omega^2)}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Решение системы уравнений (2.3) для  $\bar{\eta}(k, s)$  имеет вид

$$\bar{\eta} = S_0 \Omega \frac{[1 + e^{-2|k|(H_1 - l)}] e^{-|k|(l + h)}}{1 + e^{-2|k|H}} \frac{s(s + ikU_0)}{(s^2 + \Omega^2)P_1(k, s)}.$$

Здесь  $P_1(k, s)$  — полином третьей степени:

$$P_1(k, s) = s^3 + ia_1 s^2 + a_2 s + ia_3; \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} a_1(k) &= 2kU_0 + \gamma[b_+ + |k|M_1b_- - \operatorname{th}(|k|H)]/f_1, \\ a_2(k) &= [(\gamma kU_0 + |k|F_1)\operatorname{th}(|k|H) - 2\gamma kU_0(b_+ + |k|M_1b_-) + \gamma^2b_-]/f_1 - k^2U_0^2, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} a_3(k) &= \gamma[(\gamma kU_0 + |k|F_1)b_- - k^2U_0^2(|k|M_1b_- + b_+)]/f_1; \\ b_{\pm}(k) &= (1 \pm e^{-2|k|h}) \frac{1 - e^{-2|k|H_1}}{2(1 + e^{-2|k|H})}, \quad f_1(k) = 1 + |k|M_1 \operatorname{th}(|k|H). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Полином  $P_1(k, s)$  представим в виде

$$P_1(k, s) = \prod_{n=1}^3 (s - s_n),$$

где  $s_n(k)$  ( $n = \overline{1, 3}$ ) — корни уравнения  $P_1(k, s) = 0$ .

После выполнения обратных преобразований Лапласа и Фурье получаем решение для вертикального прогиба ледяного покрова

$$\eta(x, t) = \frac{S_0\Omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 + e^{-2k(H_1 - l)}}{1 + e^{-2kH}} e^{-k(l+h)} [A_1(k, t) \cos kx - B_1(k, t) \sin kx] dk, \quad (2.8)$$

где  $A_1(k, t)$ ,  $B_1(k, t)$  — соответственно вещественная и мнимая части суммы

$$\sum_{n=1}^5 \alpha_n(k) e^{s_n(k)t}, \quad s_{4,5} = \pm i\Omega.$$

Функции  $\alpha_n(k)$  ( $n = \overline{1, 5}$ ) удовлетворяют равенству

$$\frac{s(s + ikU_0)}{(s^2 + \Omega^2)P_1(k, s)} = \sum_{n=1}^5 \frac{\alpha_n(k)}{s - s_n(k)}, \quad (2.9)$$

и их определение сводится к решению системы пяти линейных алгебраических уравнений, следующих из равенства числителей в левой и правой частях соотношения (2.9). При выводе (2.8) использовано свойство функций  $s_n(k)$  ( $n = \overline{1, 3}$ ) и  $\alpha_n(k)$  ( $n = \overline{1, 5}$ ), заключающееся в том, что их значения при  $k > 0$  и  $k < 0$  являются комплексно-сопряженными. При условии твердой крышки на верхней границе и  $U_0 \neq 0$  также возникают волновые движения, обусловленные наличием в жидкости стратификации по завихренности. Вертикальные смещения границы между слоями  $\zeta(x, t)$  определяются из кинематического условия

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = v, \quad y = 0.$$

В этом случае в результате преобразований Фурье и Лапласа функция  $\bar{\zeta}(k, s)$  имеет вид

$$\bar{\zeta} = \frac{S_0\Omega a_4(k)}{[s + i\gamma a_5(k)](s^2 + \Omega^2)},$$

где

$$a_4(k) = \frac{\operatorname{ch} [|k|(H_1 - l)] \operatorname{sh} (|k|h)}{\operatorname{sh} (|k|H)}, \quad a_5(k) = \frac{\operatorname{sh} (|k|H_1) \operatorname{sh} (|k|h)}{\operatorname{sh} (|k|H)}.$$

После выполнения обратных преобразований Фурье и Лапласа решение для функции  $\zeta(x, t)$  принимает вид

$$\zeta(x, t) = \frac{S_0\Omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} [|k|(H_1 - l)] \operatorname{sh} (|k|h)}{\operatorname{sh} (|k|H)} [A_0(k, t) \cos (kx) - B_0(k, t) \sin (kx)] dk,$$

где  $A_0(k, t)$ ,  $B_0(k, t)$  — соответственно вещественная и мнимая части суммы

$$\sigma_1 e^{s_0(k)t} + \sigma_2 e^{s_4t} + \sigma_3 e^{s_5t}, \quad s_0(k) = -i\gamma a_5(k).$$

Функции  $\sigma_n(k)$  ( $n = \overline{1, 3}$ ) определяются из равенства

$$\frac{1}{(s - s_0)(s - s_4)(s - s_5)} = \frac{\sigma_1}{s - s_0} + \frac{\sigma_2}{s - s_4} + \frac{\sigma_3}{s - s_5}.$$

При  $U_0 = 0$  волновое движение в жидкости отсутствует, так как в этом случае  $s_0 = 0$ ,  $\sigma_1 = \Omega^{-2}$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = -\sigma_1/2$  и функции  $A_0$ ,  $B_0$  равны соответственно  $A_0 = [1 - \cos(\Omega t)]/\Omega^2$ ,  $B_0 = 0$ .

Аналогичным образом строится решение задачи в случае 2. С использованием для функций  $\bar{\psi}_1(k, y, s)$  и  $\bar{\psi}_2(k, y, s)$  представлений (2.1) и (2.2) неизвестные функции  $\bar{\eta}(k, s)$ ,  $C_j(k, s)$ ,  $D_j(k, s)$  ( $j = 3, 4$ ) определяются из системы уравнений, следующих из граничных условий (1.10)–(1.12):

$$\begin{aligned} s\bar{\eta} - |k|C_3 &= |k|\Lambda e^{-|k|l}, \\ F_3\bar{\eta} + sD_3 &= s\Lambda e^{-|k|l}, \\ C_3 \operatorname{ch}(|k|H_1) - D_3 \operatorname{sh}(|k|H_1) - C_4 &= \Lambda e^{-|k|(H_1 - l)}, \\ C_3 \operatorname{sh}(|k|H_1) - D_3 \operatorname{ch}(|k|H_1) + i\gamma C_4/s + D_4 &= -\Lambda e^{-|k|(H_1 - l)}, \\ C_4 - D_4 \operatorname{th}(|k|h) &= 0. \end{aligned}$$

Здесь  $F_3(k, s) = F_1(k) + s^2 M_1$  и использованы обозначения (2.4). Решение этой системы уравнений для  $\bar{\eta}(k, s)$  имеет вид

$$\bar{\eta} = S_0 \Omega \frac{(1 + e^{-2|k|h}) e^{-|k|l}}{1 + e^{-2|k|H}} \frac{s(cs + d)}{(s^2 + \Omega^2)P_2(k, s)},$$

где  $P_2(k, s)$  — полином третьей степени:

$$\begin{aligned} P_2(k, s) &= s^3 + ib_1 s^2 + b_2 s + ib_3, \\ b_1(k) &= \gamma f_+ f_2/f_1, \quad b_2(k) = F_1 |k| \operatorname{th}(|k|H)/f_1, \quad b_3(k) = \gamma F_1 |k| f_-/f_1, \\ f_{\pm}(k) &= (1 \pm e^{-2|k|H_1}) \frac{1 - e^{-2|k|h}}{2(1 + e^{-2|k|H})}, \quad f_2(k) = 1 + M_1 |k| \operatorname{th}(|k|H_1); \\ c(k) &= \frac{1 + e^{-2|k|(H - l)}}{1 + e^{-2|k|h}}, \quad d(k) = 0,5i\gamma(1 + e^{-2|k|(H_1 - l)}) \operatorname{th}(|k|h). \end{aligned} \quad (2.10)$$

После выполнения обратных преобразований Лапласа и Фурье решение, описывающее прогиб ледяного покрова, имеет вид

$$\eta(x, t) = \frac{S_0 \Omega}{\pi} \int_0^\infty \frac{(1 + e^{-2kh}) e^{-kl}}{1 + e^{-2kH}} [A_2(k, t) \cos(kx) - B_2(k, t) \sin(kx)] dk, \quad (2.11)$$

где  $A_2(k, t)$ ,  $B_2(k, t)$  — соответственно вещественная и мнимая части суммы

$$\sum_{n=1}^5 \beta_n(k) e^{s_n(k)t}.$$

Функции  $\beta_n(k)$  ( $n = \overline{1, 5}$ ) определяются из равенства

$$\frac{s(cs + d)}{(s^2 + \Omega^2)P_2(k, s)} = \sum_{n=1}^5 \frac{\beta_n(k)}{s - s_n(k)}$$

после решения соответствующей системы линейных алгебраических уравнений.

Полагая в решении (2.11)  $U_0 = 0$ , получаем решение задачи о действии пульсирующего источника в слое первоначально покоящейся жидкости толщиной  $H$ . В этом случае решение для  $\bar{\eta}(k, s)$  имеет вид

$$\bar{\eta} = \frac{S_0 \Omega [e^{-|k|l} + e^{-|k|(2H-l)}]}{(1 + e^{-2|k|H})f_1(k)} \frac{s}{(s^2 + \Omega^2)[s^2 + \omega_0(k)^2]},$$

где

$$\omega_0(k) = \sqrt{|k|F_1(k) \operatorname{th}(|k|H)/f_1(k)}. \quad (2.12)$$

После выполнения обратных преобразований Лапласа и Фурье получаем решение для прогиба ледяного покрова, которое в этом случае является четной по  $x$  функцией:

$$\eta(x, t) = \frac{S_0 \Omega}{\pi} \int_0^\infty \frac{[e^{-|k|l} + e^{-|k|(2H-l)}][\cos(\Omega t) - \cos(\omega_0 t)]}{(1 + e^{-2|k|H})f_1(k)(\omega_0^2 - \Omega^2)} \cos(kx) dk. \quad (2.13)$$

При  $D = Q = M = 0$  данное решение совпадает с полученным в [13] для пульсирующего источника, действующего в слое первоначально покоящейся жидкости под свободной поверхностью.

**3. Дисперсионные соотношения.** Полученные решения позволяют исследовать дисперсионные свойства ИГВ, возникающих в рассматриваемых случаях. Дисперсионное соотношение устанавливает для каждой волны зависимость ее частоты  $\omega$  от волнового числа  $k$ .

Для случая 1 используем уравнение  $P_1(k, s) = 0$ , где функция  $P_1(k, s)$  определена в (2.5). Выполняя замену  $\omega = is$ , получаем полином для определения дисперсионных соотношений каждой из трех волновых мод:

$$\omega^3 - a_1(k)\omega^2 - a_2(k)\omega + a_3(k) = 0 \quad (3.1)$$

(значения  $a_n(k)$  ( $n = \overline{1, 3}$ ) определены в (2.6)). Анализируя функции  $a_n(k)$ , нетрудно показать, что для каждой из трех волн выполняется равенство  $\omega_n(k) = -\omega_n(-k)$ .

Групповая скорость каждой волновой моды равна  $c_g^{(n)} = d\omega_n/dk$ . Используя (3.1), получаем

$$c_g^{(n)} = \frac{a'_1 \omega_n^2 + a'_2 \omega_n - a'_3}{3\omega_n^2 - 2a_1 \omega_n - a_2},$$

где штрих означает дифференцирование по  $k$ .

В частном случае однослойной жидкости с линейным сдвиговым потоком  $h = H$  ( $H_1 = 0$ ) функции  $b_{\pm}(k)$  в (2.7) тождественно равны нулю и уравнение (3.1) становится квадратным:

$$\omega^2 - \bar{a}_1(k)\omega - \bar{a}_2(k) = 0,$$

где

$$\bar{a}_1(k) = 2kU_0 - \gamma \operatorname{th}(|k|H)/f_1, \quad \bar{a}_2(k) = (\gamma kU_0 + F_1|k|) \operatorname{th}(|k|H)/f_1 - k^2U_0^2.$$

Следовательно, в этом случае существует только две волновые моды

$$\omega_{1,2} = \bar{a}_1/2 \pm \sqrt{(\bar{a}_1/2)^2 + \bar{a}_2}.$$

При наличии твердой крышки на верхней границе жидкости существует только одна волновая мода, для которой дисперсионная зависимость имеет вид  $\omega = U_0 a_5(k)/h$  и

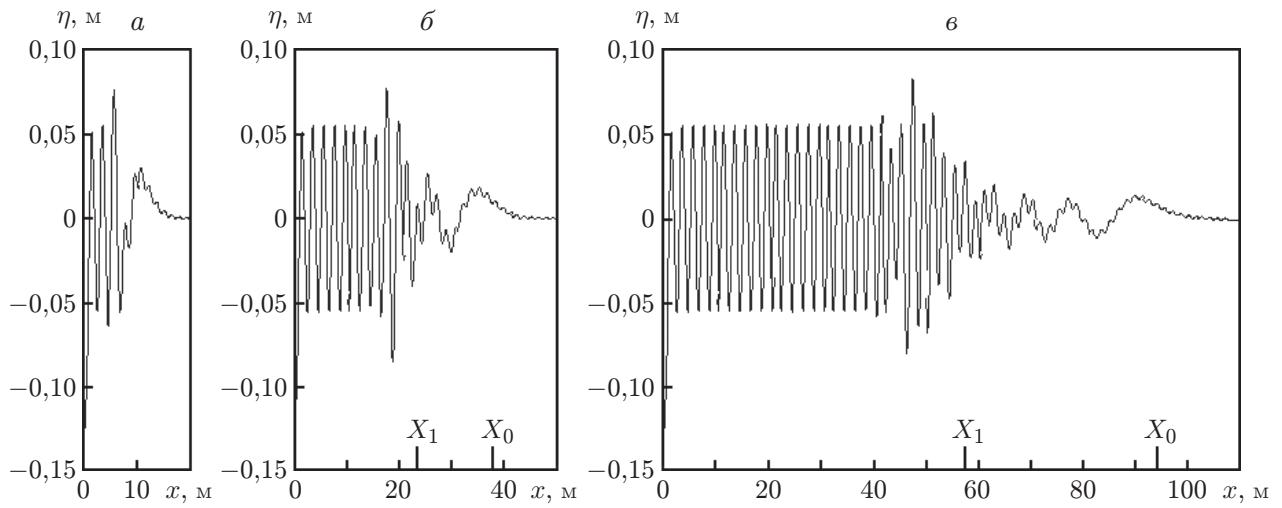


Рис. 2. Вертикальные прогибы ледяного покрова в первоначально покоящейся жидкости при различных значениях  $t$ :

$a$  —  $t = 4$  с,  $b$  —  $t = 12$  с,  $c$  —  $t = 30$  с;  $X_0$ ,  $X_1$  — положение волновых фронтов длинноволновых возмущений и колебаний с частотой  $\Omega$

представляет собой функцию, монотонно возрастающую от нуля при  $k = 0$  до  $\lim_{k \rightarrow \infty} \omega(k) = 0,5U_0/h$ . Значение групповой скорости  $c_g = d\omega/dk$  при  $k = 0$  равно  $c_g(0) = U_0H_1/H$ .

Известно, что для кубического уравнения с вещественными коэффициентами (см., например, [14]) возможно существование двух сопряженных комплексных корней. Для уравнения (3.1) это имеет место при условии, что значение  $Z$  положительное:

$$Z = (r/3)^3 + (q/2)^2, \quad (3.2)$$

$$r(k) = -(a_2(k) + a_1^2(k)/3), \quad q(k) = a_3(k) - 2(a_1(k)/3)^3 - a_1(k)a_2(k)/3.$$

Для случая 2 из уравнения  $P_2(k, s) = 0$ , используя соотношения (2.10), находим

$$\omega^3 - b_1(k)\omega^2 - b_2(k)\omega + b_3(k) = 0. \quad (3.3)$$

В частном случае однослойной жидкости при  $h = H$  ( $H_1 = 0$ ) аналогично случаю 1 получаем квадратное уравнение

$$\omega^2 - \bar{b}_1(k)\omega - b_2(k) = 0,$$

где  $\bar{b}_1(k) = \gamma f_+/f_1$ .

**4. Результаты численных расчетов.** Для характеристик пульсирующего источника использованы значения, приведенные в работе [13]:

$$H = 1 \text{ м}, \quad \Omega = 2\pi \text{ с}^{-1}, \quad S_0 = 1 \text{ м}^2/\text{с}, \quad (4.1)$$

а для ледяного покрова — значения, полученные в работе [15] в результате экспериментов в ледовом бассейне:

$$E = 5 \cdot 10^9 \text{ Па}, \quad \nu = 0,3, \quad h_i = 4 \text{ мм}, \quad \rho_i = 922,5 \text{ кг/м}^3, \quad \rho = 10^3 \text{ кг/м}^3. \quad (4.2)$$

Ускорение свободного падения равно  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ .

На рис. 2 представлены прогибы ледяного покрова в моменты времени  $t = 4, 12, 30$  с, возникающие в первоначально покоящейся жидкости при включении пульсирующего источника, который расположен на расстоянии 0,5 м от верхней границы жидкости. Для случая свободной поверхности жидкости подобные расчеты проведены в [13]. Известно,

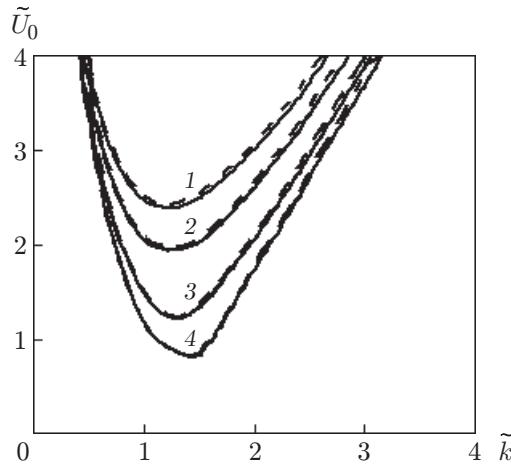


Рис. 3. Области неустойчивости значений волновых чисел в зависимости от скорости сдвигового потока  $\tilde{U}_0$  при различных значениях параметра сжатия: 1 —  $\tilde{Q} = 0$ , 2 —  $\tilde{Q} = 0,7$ , 3 —  $\tilde{Q} = 1,5$ , 4 —  $\tilde{Q} = 1,9$ ; сплошные кривые —  $M > 0$ , штриховые —  $M = 0$

что дисперсионное соотношение (2.12) накладывает ограничение на максимальное значение коэффициента сжатия  $Q$ . Устойчивость колебаний плавающей упругой пластины гарантирует условие  $\tilde{Q} \equiv Q/\sqrt{g\rho D} < 2$  [1, 2]. Подробно влияние коэффициента сжатия на дисперсионные характеристики ИГВ исследовано, например, в [11]. Представленные на рис. 2 результаты получены при  $Q = 0$ .

Зависимость групповой скорости  $c_g$  от волнового числа  $k$  позволяет определить положение волновых фронтов возбуждаемых колебаний. Значение  $c_g(0)$  соответствует скорости распространения длинноволновых возмущений. Как для свободной поверхности, так и для ледяного покрова  $c_g(0) = \sqrt{gH}$ . В рассматриваемой задаче волновые движения порождаются периодическим источником, фиксированная частота  $\Omega$  которого определяет волновой фронт распространения возмущений заданной частоты. Положение этого волнового фронта в случае свободной поверхности определено в [16]. Бегущая волна распространяется при больших временах внутри сектора  $R = \{(x, t): -Vt < x < Vt\}$ ,  $V > 0$  со скоростью, которая при  $t \rightarrow \infty$  асимптотически стремится к скорости  $V = c_g(k_0)$  ( $k_0$  — корень уравнения  $\omega_0(k_0) = \Omega$ ).

Внутри сектора  $R$  устанавливается волновое движение с длиной волны  $2\pi/k_0$ . При заданных параметрах (4.1) в случае свободной поверхности  $k_0 \approx 4,027 \text{ м}^{-1}$ ,  $c_g(k_0) \approx 0,784 \text{ м/с}$ , а в случае ледового покрова с параметрами (4.2)  $k_0 \approx 3,154 \text{ м}^{-1}$ ,  $c_g(k_0) \approx 1,916 \text{ м/с}$ . (При  $M = 0$   $k_0 \approx 3,135 \text{ м}^{-1}$ ,  $c_g(k_0) \approx 1,923 \text{ м/с}$ .) Сравнение результатов, приведенных на рис. 2 и в работе [13], показывает, что в секторе  $R$  амплитуда ИГВ меньше амплитуды поверхностной волны, а длина ИГВ — больше. На рис. 2, б, в указаны также координаты волновых фронтов  $X_0 = tc_g(0)$  и  $X_1 = tc_g(k_0)$ .

Далее приводятся результаты расчетов для случая 1 (верхний сдвиговый слой). С увеличением скорости  $U_0$  при некоторых значениях волнового числа  $k$  и докритических значениях коэффициента сжатия  $\tilde{Q} < 2$  в уравнении (3.1) появляются комплексные корни. Это означает, что в рамках линейной теории возникающее волновое движение становится неустойчивым. Границы области устойчивости на плоскости  $(\tilde{k}, \tilde{U}_0)$ , где  $\tilde{k} = kh$ ,  $\tilde{U}_0 = U_0/\sqrt{gh}$ , можно определить, используя нулевую изолинию функции  $Z$  в (3.2). На рис. 3 показаны нулевые изолинии функции  $Z$  при толщине сдвигового слоя  $h = 0,3 \text{ м}$  и значениях безразмерного коэффициента сжатия  $\tilde{Q} = 0; 0,7; 1,5; 1,9$  (кривые 1–4). Сплош-

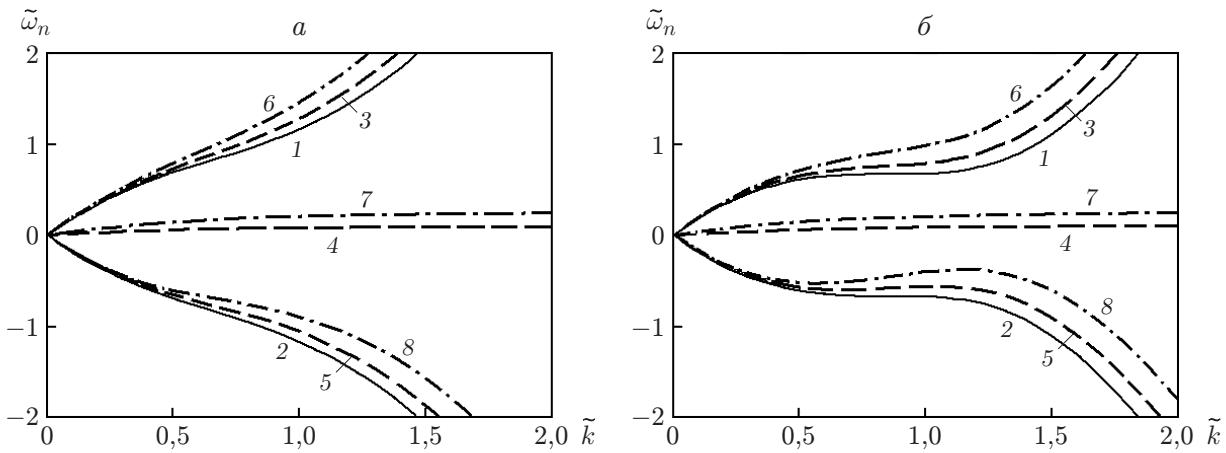


Рис. 4. Дисперсионные зависимости  $\tilde{\omega}_n(\tilde{k})$ :

$a$  —  $\tilde{Q} = 0$ ,  $b$  —  $\tilde{Q} = 1,5$ ; 1, 2 — зависимости  $\tilde{\omega}_0(\tilde{k})$ ,  $-\tilde{\omega}_0(\tilde{k})$  в (2.12) в случае первоначально покоящейся жидкости соответственно, 3–5 —  $\tilde{U}_0 = 0,2$  (3 —  $\tilde{\omega}_1(\tilde{k})$ , 4 —  $\tilde{\omega}_2(\tilde{k})$ , 5 —  $\tilde{\omega}_3(\tilde{k})$ ); 6–8 —  $\tilde{U}_0 = 0,5$  (6 —  $\tilde{\omega}_1(\tilde{k})$ , 7 —  $\tilde{\omega}_2(\tilde{k})$ , 8 —  $\tilde{\omega}_3(\tilde{k})$ )

ные кривые соответствуют значениям инерционного коэффициента  $M > 0$ , штриховые —  $M = 0$ . Видно, что допустимые значения  $U_0$ , которые могут быть рассмотрены в линейной постановке при заданном значении толщины сдвигового слоя  $h$ , с ростом параметра сжатия уменьшаются. Из рис. 2, 3 следует, что влияние инерции ледяного покрова на устойчивость течения незначительно, поэтому дальнейшие расчеты выполнены при  $M = 0$ .

На рис. 4 приведены дисперсионные зависимости  $\tilde{\omega}_n(\tilde{k})$  при  $h = 0,3$  м, где  $\tilde{\omega}_n = \omega_n \sqrt{h/g}$ . Рис. 4,  $a$  соответствует значению параметра сжатия  $Q = 0$ , рис. 4,  $b$  — значению  $\tilde{Q} = 1,5$ . Корни полинома (3.1) нумеруются в порядке убывания их значений. В обоих случаях значения корня  $\tilde{\omega}_2$  малы по абсолютной величине по сравнению со значениями корней  $\tilde{\omega}_1$  и  $\tilde{\omega}_3$ . Дисперсионные зависимости  $\tilde{\omega}_{1,2}$  определяют поведение волновых возмущений при  $x > 0$ , зависимость  $\tilde{\omega}_3$  — при  $x < 0$ .

Представленные на рис. 4 дисперсионные зависимости позволяют сделать вывод, что при наличии сдвигового слоя вертикальные прогибы ледяного покрова существенно отличаются от прогибов в случае первоначально покоящейся жидкости ( $U_0 = 0$ ). В этом случае при больших значениях времени бегущие волны распространяются внутри сектора  $R_1 = \{(x, t): -V_- t < x < V_+ t\}$ ,  $V_- > 0$ ,  $V_+ > 0$  со скоростями, асимптотически стремящимися при  $t \rightarrow \infty$  к скоростям  $V_+ = c_g(k_+)$  и  $V_- = c_g(k_-)$  ( $k_+$  — корень уравнения  $\omega_1(k) = \Omega$ ;  $k_-$  — корень уравнения  $\omega_3(k) = -\Omega$ ). Внутри сектора  $R_1$  устанавливается волновое движение с различными длинами волн при  $x > 0$  и  $x < 0$ , причем при  $x > 0$  длины волн больше, чем при  $x < 0$ . Это различие возрастает с увеличением скорости  $U_0$  и параметра сжатия  $Q$ .

Вертикальные прогибы ледяного покрова  $\eta(x, t)$  при  $h = 0,3$  м,  $l = 0,2$  м,  $t = 12$  с,  $\tilde{U}_0 = 0,5$  определены в результате численного интегрирования (2.8) и представлены на рис. 5 при  $\tilde{Q} = 0; 1,5$ . При наличии сдвигового потока прогибы ледяного покрова становятся несимметричными относительно точки  $x = 0$ . Характер волнового движения подтверждает выводы, сделанные выше с использованием дисперсионных зависимостей. При  $x > 0$  амплитуды вертикальных смещений больше, чем при  $x < 0$ .

На рис. 6 показаны зависимости вертикальных смещений ледяного покрова от времени  $t$  в фиксированных точках  $x = -15$  м (рис. 6,  $a$ ) и  $x = 15$  м (рис. 6,  $b$ ) при  $\tilde{U}_0 = 0,5$ ,  $Q = 0$ . Видно, что с увеличением времени волновое движение выходит на установившийся режим с периодом  $2\pi/\Omega = 1$  с.

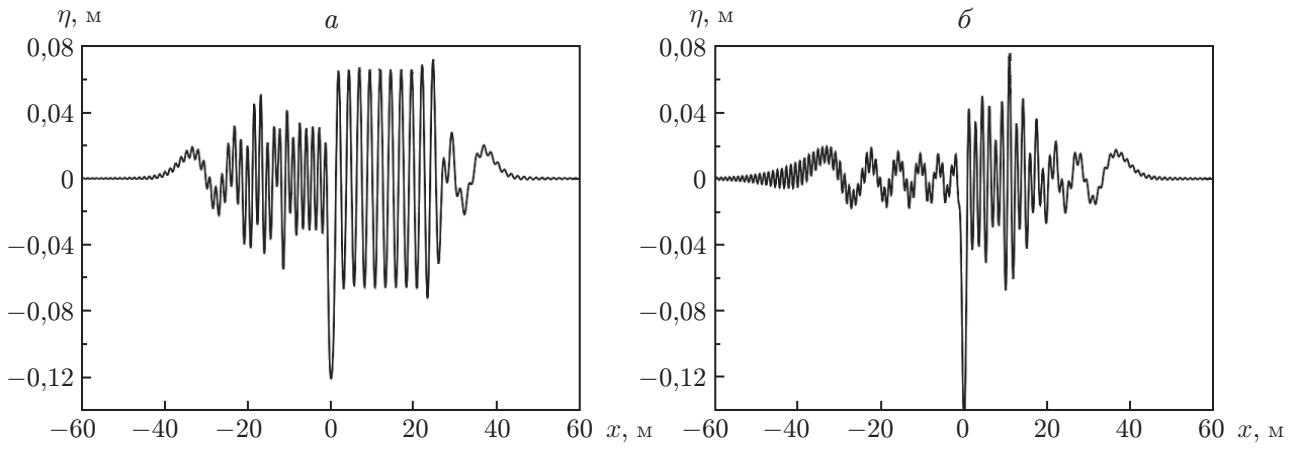


Рис. 5. Вертикальные прогибы ледяного покрова при  $t = 12$  с,  $\tilde{U}_0 = 0,5$ :  
 $a$  —  $\tilde{Q} = 0$ ,  $\tilde{b}$  —  $\tilde{Q} = 1,5$

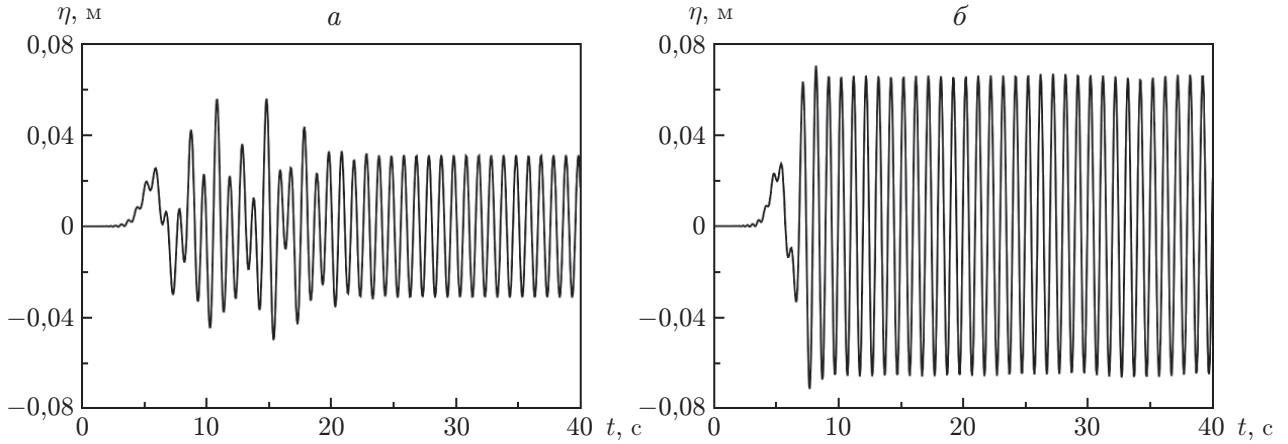


Рис. 6. Зависимость вертикальных прогибов ледяного покрова от времени при  $\tilde{U}_0 = 0,5$ ,  $Q = 0$  в фиксированных точках:  
 $a$  —  $x = -15$  м,  $\tilde{b}$  —  $x = 15$  м

На рис. 7 представлены вертикальные смещения поверхности раздела слоев  $\zeta(x, t)$  в моменты времени  $t = 4, 12, 30$  с для случая твердой крышки на верхней границе жидкости при  $h = 0,3$  м,  $l = 0,2$  м и  $\tilde{U}_0 = 1,5$ . В этом случае волновое движение, обусловленное наличием неравномерной завихренности, существует только при  $x > 0$ . Скорость распространения длинноволновых возмущений при заданных параметрах равна  $c_g(0) \approx 1,801$  м/с. На рис. 7,  $\tilde{b}, \tilde{c}$  указаны также координаты фронта длинноволновых колебаний  $X_0 = tc_g(0)$ . При указанных выше параметрах не возникает волнового фронта, обусловленного частотой  $\Omega$  пульсаций источника, так как скорость сдвигового потока  $U_0$  достаточно мала и предельное значение дисперсионного соотношения  $0,5U_0/h \approx 4,289$  с<sup>-1</sup> меньше заданной частоты  $\Omega = 2\pi$  с<sup>-1</sup>.

Для случая 2 (придонный сдвиговый слой) расчеты выполнены при значениях исходных параметров (4.1), (4.2), толщине придонного слоя  $h = H - H_1 = 0,3$  м и глубине погружения пульсирующего источника  $l = 0,5$  м. На рис. 8 представлены дисперсионные зависимости  $\tilde{\omega}_n(\tilde{k})$  при  $\tilde{U}_0 = 2,5$  для значений параметра сжатия  $Q = 0$  (рис. 8,  $a$ ) и  $\tilde{Q} = 1,5$  (рис. 8,  $\tilde{b}$ ). Кривые 1–3 соответствуют номеру волновой моды и определены как корни полинома (3.3), а кривые 4, 5 представляют собой дисперсионную зависимость  $\pm \tilde{\omega}_0(\tilde{k})$  в (2.12)

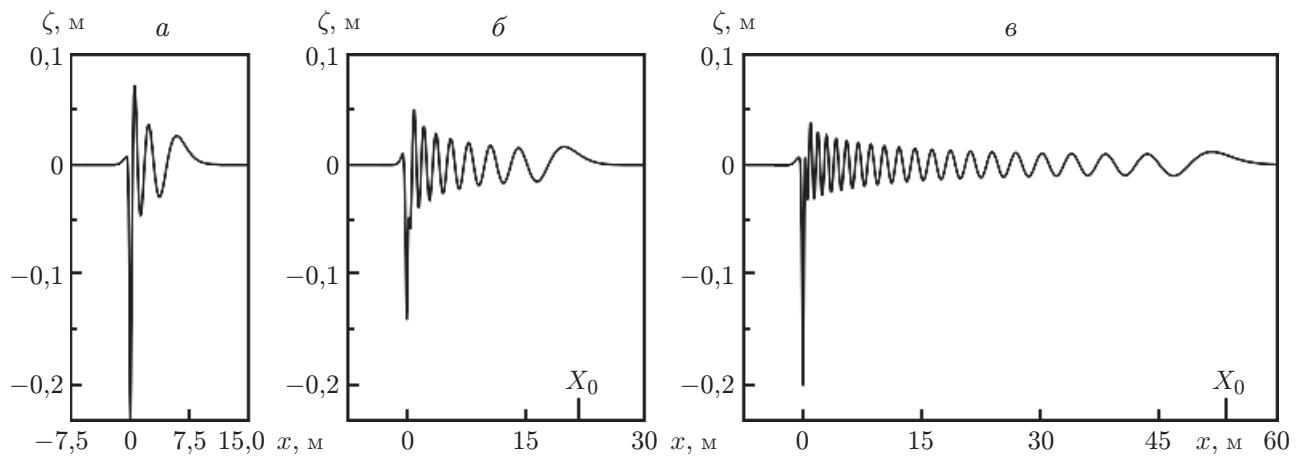


Рис. 7. Вертикальные смещения границы слоев при различных значениях  $t$ :  
 $a$  —  $t = 4$  с,  $\beta$  —  $t = 12$  с,  $\gamma$  —  $t = 30$  с;  $X_0$  — положение волнового фронта длинноволновых возмущений

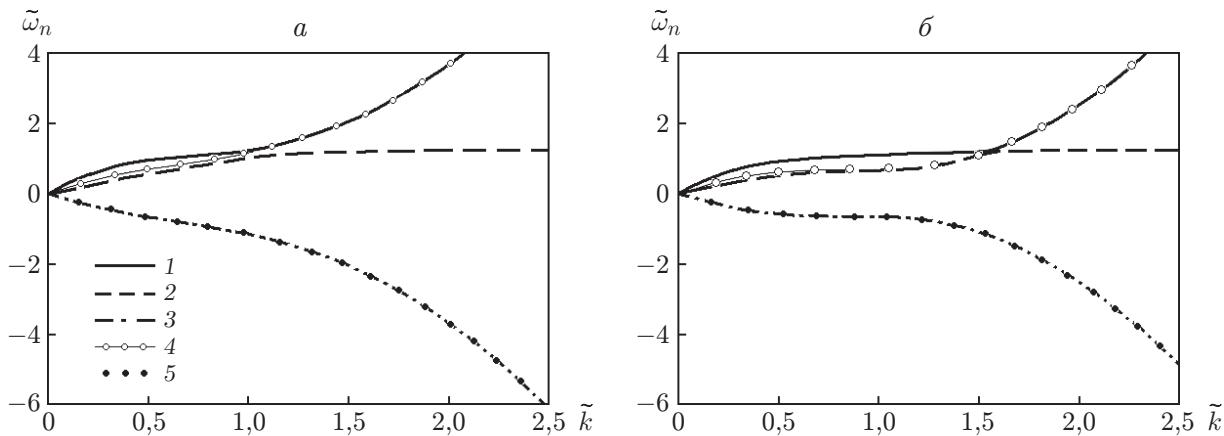


Рис. 8. Дисперсионные зависимости  $\tilde{\omega}_n(\tilde{k})$  при  $\tilde{U}_0 = 2,5$ :  
 $a$  —  $\tilde{Q} = 0$ ,  $\beta$  —  $\tilde{Q} = 1,5$ ; 1-3 — номер волновой моды для придонного сдвигового слоя (1 —  $\tilde{\omega}_1$ , 2 —  $\tilde{\omega}_2$ , 3 —  $\tilde{\omega}_3$ ), 4, 5 — зависимости  $\tilde{\omega}_0(\tilde{k})$ ,  $-\tilde{\omega}_0(\tilde{k})$  в (2.12) в случае первоначально покоящейся жидкости

для случая первоначально покоящейся жидкости. Следует отметить, что в данном случае все возбуждаемые волновые моды являются устойчивыми при докритических значениях параметра сжатия  $\tilde{Q} < 2$ , так как значение величины  $Z$  в (3.2) для полинома (3.3) при рассматриваемых параметрах остается отрицательным при всех значениях волнового числа  $k$ .

Распределение вертикальных смещений ледяного покрова в случае придонного сдвигового слоя определено в результате численного интегрирования (2.13) и представлено на рис. 9 при фиксированном значении времени  $t = 12$  с, а на рис. 10,  $a, \beta$  при фиксированных значениях продольной координаты  $x = -15; 15$  м соответственно. Рис. 9,  $a$  и рис. 10 соответствуют значению коэффициента сжатия  $Q = 0$ , рис. 9,  $\beta$  — значению  $\tilde{Q} = 1,5$ . Заметим, что вертикальные смещения ледяного покрова при  $x < 0$  и  $Q = 0$  на рис. 9,  $a$  близки к его прогибам в первоначально покоящейся жидкости (см. рис. 2,  $\beta$ ). Это объясняется тем, что дисперсионные зависимости  $\omega_3(k)$  в случае сдвигового течения в нижнем слое и  $\omega_0(k)$  (см. (2.12)) в случае бессдвигового течения практически совпадают (см. рис. 8,  $a$ ).

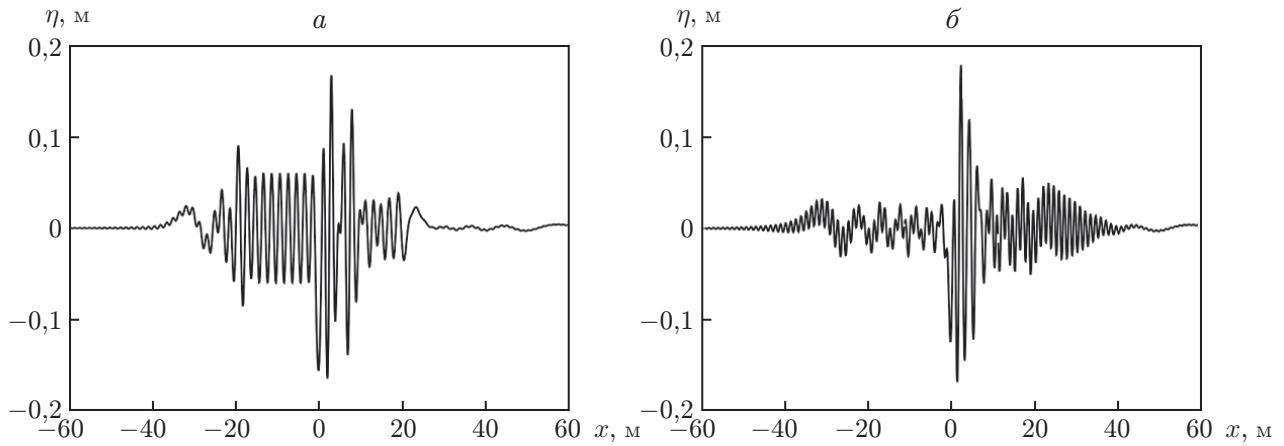


Рис. 9. Вертикальные прогибы ледяного покрова при  $t = 12$  с,  $\tilde{U}_0 = 2,5$ :  
 $a — \tilde{Q} = 0$ ,  $\tilde{b} — \tilde{Q} = 1,5$

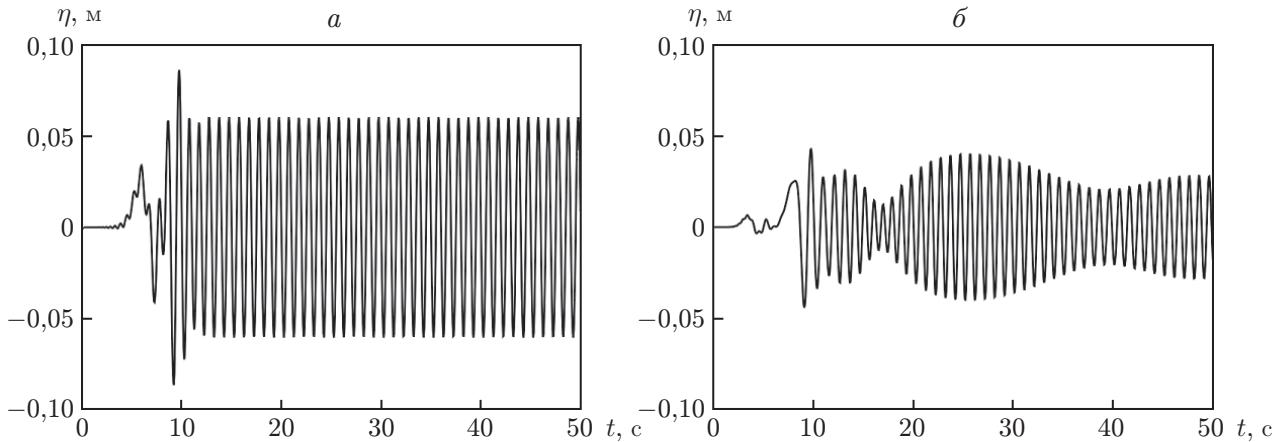


Рис. 10. Зависимость вертикальных прогибов ледяного покрова от времени при  $\tilde{U}_0 = 2,5$ ,  $Q = 0$  в фиксированных точках:  
 $a — x = -15$  м,  $\tilde{b} — x = 15$  м

Из рис. 10,  $a$  следует, что при  $x < 0$  достаточно быстро устанавливаются периодические колебания ледового покрова с частотой  $\Omega$  пульсаций погруженного источника. Однако при  $x > 0$  (см. рис. 10,  $\tilde{b}$ ) появляется модуляция волновых возмущений, так как вторая волновая мода становится сопоставимой с первой модой, что приводит к суперпозиции колебаний с различными волновыми числами. В отличие от случая верхнего сдвигового слоя амплитуда колебаний при  $x > 0$  значительно меньше, чем при  $x < 0$ .

**Заключение.** Исследовано волновое движение, возникающее в жидкости под ледяным покровом при наличии сдвиговых слоев и включении погруженного пульсирующего источника. Ледяной покров моделируется тонкой упругой пластиной с учетом сжимающих усилий. В рамках линейной теории волн построено интегральное представление решения, описывающего вертикальные прогибы ледяного покрова. Показано, что и в случае верхнего сдвигового слоя, и в случае придонного сдвигового слоя колебания ледяного покрова существенно отличаются от колебаний, имеющих место при пульсациях источника в изначально покоящейся жидкости. Наличие сжимающих усилий в ледяном покрове и сдвигового течения в жидкости оказывает существенное влияние на вертикальные прогибы ледяного покрова. В случае верхнего сдвигового слоя волновое движение становится неустойчивым с увеличением как скорости сдвигового потока, так и коэффициента сжатия.

тия ледяного покрова. В случае придонного сдвигового потока возникает суперпозиция колебаний с различными длинами волн. Показано, что даже при замене ледяного покрова твердой крышкой возникают волновые движения, вызванные стратификацией жидкости по завихренности. При этом волновое движение существует только вниз по потоку.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Хейсин Д. Е.** Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеоиздат, 1967.
2. **Букатов А. Е.** Волны в море с плавающим ледяным покровом. Севастополь: Морской гидрофиз. ин-т, 2017.
3. **Букатов А. Е., Мордашев В. И.** Влияние продольно сжатой упругой пластиинки на развитие волнового возмущения потока однородной жидкости с вертикальным сдвигом скорости // ПМТФ. 1981. № 1. С. 122–129.
4. **Das S., Kar P., Sahoo T., Meylan M. H.** Flexural-gravity wave motion in the presence of shear current: Wave blocking and negative energy waves // Phys. Fluids. 2018. V. 30. 106606.
5. **Стурова И. В.** Задача Коши — Пуассона для жидкости с ледяным покровом при наличии сдвигового течения (двумерный случай) // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2022. № 1. С. 47–56.
6. **Ткачева Л. А.** Начально-краевая задача о поведении ледяного покрова под действием нагрузки при наличии сдвигового потока // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2022. № 2. С. 66–76.
7. **Стурова И. В.** Задача Коши — Пуассона для жидкости со сдвиговым течением и неравномерно сжатым ледяным покровом // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2022. № 4. С. 69–76.
8. **Ткачева Л. А.** Движение нагрузки по ледяному покрову при наличии течения со сдвигом скорости // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2023. № 2. С. 113–122.
9. **Булатов В. В., Владимиров Ю. В.** Дальние поля внутренних волн, возбуждаемых пульсирующим источником в стратифицированной среде со сдвиговыми течениями // ПМТФ. 2019. Т. 60, № 6. С. 45–52.
10. **Савин А. А., Савин А. С.** Генерация волн на ледяном покрове пульсирующим в жидкости источником // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2013. № 3. С. 24–30.
11. **Stepanyants Y. A., Sturova I. V.** Waves on a compressed floating ice plate caused by motion of a dipole in water // J. Fluid Mech. 2021. V. 907. P. A7-1–A7-29.
12. **Sturova I. V.** Unsteady three-dimensional sources in deep water with an elastic cover and their applications // J. Fluid Mech. 2013. V. 730. P. 392–418.
13. **Павельева Е. Б., Савин А. С.** Установление волн от пульсирующего источника в жидкости конечной глубины // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2018. № 4. С. 12–22.
14. **Корн Г.** Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. М.: Наука, 1968.
15. **Земляк В. Л.** Движение погруженного тела в приповерхностной водной среде, покрытой ледяным покровом / В. Л. Земляк, В. М. Козин, А. В. Погорелова, А. С. Васильев. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2020.
16. **Ильичев А. Т., Савин А. С.** Эволюция возмущений свободной поверхности от пульсирующего заглубленного источника в жидкости конечной глубины // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2021. № 6. С. 19–24.

Поступила в редакцию 25/V 2023 г.,  
после доработки — 11/VII 2023 г.  
Принята к публикации 1/IX 2023 г.