8. Sleicher C. A., Jr. Maximum stable drop size in turbulent flow.— AIChE Journal, 1962, vol. 8, N 4.
9. Paul H. I., Sleicher C. A., Jr. The maximum stable drop size in turbulent flow: effect of pipe diameter.— Chem. Engng Sci., 1965, vol. 20, N 1.
10. Ward J. P., Knudsen J. G. Turbulent flow of unstable liquid—liquid dispersions: drop sizes and velocity distributions.— AIChE Journal, 1967, vol. 13, N 2.
11. Collins S. B., Knudsen J. G. Drop-size distributions produced by turbulent pipe flow of immiscible liquids.— AIChE Journal, 1970, vol. 16, N 6.
12. Narsimhan G., Gupta J. P., Ramkrishna D. A model for transitional breakage probability of droplets in agitated lean liquid — liquid dispersions.—Chem. Engng Sci., 1979, vol. 34, N 2.
13. Kuboi R., Komasawa J., Otake T. Behaviour of dispersed particles in turbulent liquid flow.— J. Chem. Engng of Japan, 1972, vol. 5, N 4.
14. Shinnar R. On the behaviour of liquid dispersions in mixing vessels.— J. Fluid Mech., 1961, vol. 10, N 2.
15. Schwartzberg H. G., Treybal R. E. Fluid and particle motion in turbulent stirred tanks.— Ind. and Engng Chem. Fundamentals, 1968, vol. 7, N 1.
16. Cutter L. A. Flow and turbulence in a stirred tank.— AIChE Journal, 1966, vol. 12, N 1.
17. Sevik M., Park S. H. The splitting of drops and bubbles by turbulent fluid flow. — Trans. ASME. Ser. D. J. Basic Engng, 1973, N 1.
18. Баранаев М. К., Теверовский Е. Н., Трегубова Э. Л. О размере минимальных пульсаций в турбулентном потоке.— ДАН СССР, 1949, т. 66, № 5.
19. Ламб Г. Гидродинамика. М.—Л.: ОГИЗ — ГИТТЛ, 1947.
20. Hughmark G. A. Drop breakup in turbulent pipe flow.— AIChE Journal, 1971, vol. 17, N 4.
21. Karam H. J., Bellinger J. C. Deformation and breakup of liquid droplets in a simple shear rate.— Ind. and Engng Chem. Fundamentals, 1968, vol. 7, N 4.

УДК 532.529

ФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ДВУХФАЗНОЙ СРЕДЫ С УЧЕТОМ ХАОТИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ ЧАСТИЦ (ПУЗЫРЬКОВ)

О. В. Воинов, А. Г. Петров

(*Москва*)

Рассматриваются двухфазные потоки несжимаемых жидкостей с твердыми частицами или пузырьками. Найден источник хаотических движений большого числа частиц, движущихся относительно жидкости. Найдены новые безразмерные параметры, влияющие па взаимодействие фаз, на интенсивность хаотических движений частиц. Получены асимптотически точные выражения давлений в фазах и силы взаимодействия с учетом градиентных членов. Найдены условия применимости диффузионного приближения в гидродинамике двухфазных сред.

Хаотические движения в дисперсных средах изучались методами кинетической теории. В работе [1] получены двухконтинуальные уравнения движения разреженной дисперсной и несущей среды. Статистический подход к дисперсным системам разработан в [2] в предположении, что изменение скорости частиц между двумя соударениями мало по сравнению со средним значением скоростей хаотического движения. Ниже изучается противоположный предельный случай, для понимания которого принципиальное значение имеют эксперименты [3, 4] по движению пузырьковых систем, из которых видно, что возможно появление хаотических движений пузырьков за счет их гидродинамического взаимодействия. Представляет интерес применение к изучению хаотических движений в двухфазных средах методов теории подобия [5] и результатов точного осреднения уравнений механики в [6].

1. Постановка задачи и метод решения. Рассматривается вязкая несжимаемая жидкость, содержащая большое число недеформируемых сферических твердых частиц или пузырьков радиуса R в поле потенциальных массовых сил $\mathbf{g}$. Объемная концентрация c не мала.

Пусть выполнены неравенства

$$L \gg R,\ T \gg R/w, \tag{1.1}$$

где L — характерное расстояние, на котором меняются средние параметры потока; T — характерное время их изменения; w — относительная скорость фаз. Тогда в силу первого неравенства возможен подход сплошной среды.

Второе неравенство (1.1) означает, что за характерное время T относительное перемещение частиц значительно превосходит их радиус, в этом случае относительное движение фаз существенно и необходим двухконтинуальный подход.

Пусть ускорения фаз равны и постоянны. Перейдем в систему, движущуюся со средним ускорением жидкости $d\mathbf{v}/dt$. Тогда массовая сила равна $\mathbf{g} - d\mathbf{v}/dt$. Включив ее в давление, получим эквивалентную систему без массовых сил. На частицы объема V и плотности ρ_s при этом будут действовать внешние силы

$$\mathbf{F}^{(\alpha)} = (\rho_s - \rho)(\mathbf{g} - d\mathbf{v}/dt)V \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots), \tag{1.2}$$

являющиеся единственным источником относительного движения фаз.

Пусть теперь ускорение дисперсной фазы $d\mathbf{u}/dt$ не равно ускорению жидкости, но их разность всюду мала

$$|d\mathbf{u}/dt - d\mathbf{v}/dt| \ll |\mathbf{g} - d\mathbf{v}/dt|. \tag{1.3}$$

При условии (1.3) можно в главном приближении принять ускорения фаз равными и, учитывая $R \ll L$, пренебречь градиентами средних величин. А затем учесть их как поправки в следующем приближении. Этот метод положен в основу данной работы, и неравенства (1.1), (1.3) являются при этом единственными допущениями.

Можно показать (см. п. 11), что условие (1.3) справедливо, если, кроме (1.1), выполнены условия

$$\mathrm{Fr}^2 R/wT \ll 1,\ \mathrm{Fr}^2 R/L \ll 1; \tag{1.4}$$

$$\mathrm{Fr}^2 = w^2/Rg',\ g' = |\mathbf{g} - d\mathbf{v}/dt|, \tag{1.5}$$

где Fr — число Фруда. Условия (1.4) не являются существенным ограничением для концентрированной двухфазной среды *.

2. Хаотическое движение частиц. Безразмерные критерии. Рассмотрим движение системы частиц в жидкости на микроскопическом уровне. Математически возможны стационарные состояния этой системы, когда частицы движутся в узлах правильной периодической решетки под действием одинаковых сил $\mathbf{F}^{(\alpha)}$ (1.2) и жидкость просто фильтруется через фиксированную структуру. Возникает принципиальный вопрос об устойчивости таких состояний.

Известно [7], что упорядоченная система частиц, движущаяся в идеальной жидкости, из-за взаимодействия этих частиц неустойчива. Малые возмущения координат частиц экспоненциально нарастают со временем.

При малых числах Рейнольдса стационарное состояние системы частиц, движущихся в жидкости под действием постоянных внешних сил, также оказывается экспоненциально неустойчивым. Характерное время разрушения стационарного состояния $\tau \sim R/w$, если расстояния между частицами $\sim R$, т. е. практически упорядоченные системы существовать не могут. Это подтверждается всеми экспериментами [3, 4, 8, 9].

---

* Из развитой далее теории следует, что условия (1.4) выполнены всегда, если концентрированная двухфазная среда устойчива. Они могут нарушаться только в случае сильной неустойчивости.

Неустойчивость стационарных состояний движения системы частиц относительно жидкости позволяет предположить, что эта система обладает случайными свойствами и ее поведение не зависит от деталей начального распределения частиц на микроуровне.

Такая физическая модель, следующая из анализа устойчивости стационарных состояний, согласуется с представлениями о хаотическом движении отдельных пузырьков внутри барботажного слоя при конечных числах Рейнольдса ($\mathrm{Re} = Rw/\nu$) [3, 4].

Представляет интерес применить теорию подобия [5] к случайному процессу движения многих частиц в жидкости под действием внешних сил $\mathbf{F}^{(\alpha)}$ (1.2).

Пусть число Рейнольдса мало ($\mathrm{Re} \ll 1$) и справедливы уравнения Стокса. Тогда изменение координат частиц $x^{(\alpha)}$ и их угловых скоростей $\omega^{(\alpha)}$ определяется воздействием внешних сил (1.2) и гидродинамических сил и моментов, линейных по скоростям:

$$\rho_s V\ddot{x}_i^{(\alpha)} = V(\rho_s - \rho) g_i' - \mu R \sum_\beta \left(\varphi_{ij}^{(\alpha\beta)} \dot{x}_j^{(\beta)} + \psi_{ij}^{(\alpha\beta)} R\omega_j^{(\beta)}\right) - \partial U/\partial x_i^{(\alpha)}, \tag{2.1}$$

$$\frac{2}{5}\rho_s R^2 V\dot{\omega}_i^{(\alpha)} = R^2\mu \sum_\beta \left(\varkappa_{ij}^{(\alpha\beta)} \dot{x}_j^{(\beta)} + R\chi_{ij}^{(\alpha\beta)}\omega_j^{(\beta)}\right), \quad V = \frac{4}{3}\pi R^3, \ldots \mathbf{g}' =$$
$$= \mathbf{g} - d\mathbf{v}/dt.$$

Безразмерные функции $\varphi^{(\alpha\beta)}$, $\psi^{(\alpha\beta)}$, $\varkappa^{(\alpha\beta)}$ и $\chi^{(\alpha\beta)}$ зависят только от безразмерных координат всех частиц относительно данной $(x^{(1)} - x^{(\alpha)})/R$, $(x^{(2)} - x^{(\alpha)})/R$, ...

Уравнения (2.1) записаны в системе координат, в которой скорость жидкости (осредненная по объему шара достаточно большого радиуса) равна нулю $\mathbf{v} = 0$. Величина U в правой части первого уравнения (2.1) описывает взаимодействие частиц при ударе; $U = \infty$, когда расстояние между поверхностями любых частиц обращается в нуль. Инерционные члены в (2.1) правомерно учитывать только при $\rho_s \gg \rho$. В противном случае с точностью до малых $\sim\mathrm{Re}$ их следует опустить. В случае сравнимых плотностей $\rho_s \leqslant \rho$, разрешая линейную систему (2.1) относительно скоростей всех частиц, определим скорости частиц как функции их относительного расположения:

$$\frac{dx_i^{(\alpha)}}{dt} = \frac{(\rho_s - \rho) R^2}{\mu} g_j' F_{ij}^{(\alpha)} \left(\frac{x^{(1)} - x^{(\alpha)}}{R}, \frac{x^{(2)} - x^{(\alpha)}}{R}, \ldots\right), \tag{2.2}$$

где $i, j = 1, 2, 3$; $\alpha = 1, 2 \ldots$; $F_{ij}^{(\alpha)}$ — безразмерные функции. Случайная скорость частиц при $\mathrm{Re} \ll 1$ связана по (2.2) со случайным расположением соседних частиц возле данной.

Случайный процесс изменения координат, описываемый (2.2), при различных значениях радиуса частиц R и произведения $(\rho_s - \rho)R^2 g'/\mu$ преобразованием подобия приводится к одному случайному процессу. Важно, что при этом все вероятностные характеристики взаимного расположения частиц оказываются подобными и зависят только от геометрических параметров и концентрации c. Существенно, что изотропии нет, так как имеется выделенное направление $\mathbf{w}$. Из уравнений (2.1) следует единственный критерий подобия (кроме параметра c):

$$\Pi = \rho_s|\rho_s - \rho||\mathbf{g}'|R^3/\mu^2. \tag{2.3}$$

Если привести уравнения (2.1) к безразмерной форме, то число Π будет коэффициентом при инерционном члене d^2x/dt^2. Таким образом, Π определяет вклад инерционных членов в уравнение (2.1), который становится существенным при достаточно большом числе Π.

Критерии подобия при конечном числе Рейнольдса. Не выписывая уравнения, можно указать определяющие параметры системы: ρ_s, $|\rho_s - \rho|g'$, ρ, μ, R, c. Из них можно составить три безразмерных критерия: число Архимеда Ar, отношение плотностей χ и концентрация c

$$\mathrm{Ar} = \rho|\rho_s - \rho||g'|R^3/\mu^2, \ \chi = \rho_s/\rho. \tag{2.4}$$

Принципиально важно учитывать два критерия подобия, так как, в частности при $\mathrm{Re} \ll 1$, ни Ar, ни χ в отдельности не являются критериями подобия. Вместо (2.4) критерием будет $\Pi = \chi\,\mathrm{Ar}$. Появление чисел χ или Π связано со случайным характером двухфазной среды. До сих пор эти числа не учитывались, так как относительное движение фаз рассматривалось как фильтрация жидкости через фиксированную структуру частиц.

3. Уравнения для средних величин. Число Фруда. Пусть число $\mathrm{Re} \ll 1$, тогда в соответствии с (2.1), (2.3) и на основании теории подобия [5] относительная скорость фаз

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v} = (\rho_s - \rho)g'/A, \ A = (\mu/R^2)G(c, \Pi), \tag{3.1}$$

где G — безразмерная функция. Введем число Фруда (1.5).

С учетом (3.1) силу трения $\mathbf{F}^*$, действующую на единицу объема дисперсной фазы, при $\mathrm{Re} \ll 1$ можно представить в виде

$$-\mathbf{F}^* = \mu R^{-2}G(c, \mathrm{Fr})\mathbf{w} = A\mathbf{w}, \tag{3.2}$$

так как сила сопротивления отдельной частицы в среднем равна движущей силе $\mathbf{F}^{(\alpha)}$ (1.2). Если привести (2.1) к безразмерной форме, используя значение $\mathbf{w}$ (3.1), то при инерционном члене в (2.1) будет стоять $\mathrm{Fr}^2 \approx \Pi G^2$. Очевидно, значениям $\mathrm{Fr} \ll 1$ отвечают упрощенные уравнения (2.2), а значениям $\mathrm{Fr} \gtrsim 1$ — уравнения (2.1).

Из (3.2) видно, что даже при малых числах Рейнольдса сила трения фаз может нелинейно зависеть от относительной скорости фаз w из-за влияния числа Fr на хаотическое движение частиц. При конечных числах Рейнольдса сила трения фаз из соображений подобия записывается в виде

$$F^* = -C_w R^{-1}\rho|w|w, \ C_w = C_w(\mathrm{Re}, \chi, c). \tag{3.3}$$

Существенно, что безразмерный коэффициент C_w в (3.3) зависит от отношения плотностей χ.

Многочисленные эксперименты по осаждению твердых частиц в жидкости [10], условиям которых отвечают значения $\mathrm{Fr} \ll 1$, дают зависимости вида

$$u = u_0(1 - c)^n,$$

где $n \approx 5$ при $\mathrm{Re} \ll 1$. В этих опытах использовались замкнутые сосуды. Поэтому $(1 - c)v = -cu$, т. е. имелся восходящий поток жидкости $v \neq 0$. С учетом этого на основании данных [10] получим следующие эмпирические зависимости:

$$w = w_0(1 - c)^{n-1}, \ G(c) = G_0(1 - c)^{1-n},$$

где G_0 — постоянная при $\mathrm{Re} \ll 1$, $\mathrm{Fr} \ll 1$. При возрастании числа Рейнольдса показатель n убывает от 5 до 2,5 [9, 10]. Экспериментально влияние числа Фруда Fr или числа χ на скорость осаждения до сих пор не изучалось.

4. Локальность генерации хаотических движений. Хаос в скоростях частиц вызывается наличием движущих сил $\mathbf{F}^{(\alpha)}$ (1.2). Обмен кинетической энергией частиц между двумя макроскопическими объемами невозможен. Вследствие этого кинетическая энергия не является источником хаоса. Для того, чтобы убедиться в этом, рассмотрим оценку характерного расстояния λ_*, на котором диссипирует энергия поступательного движения частиц с характерной скоростью w.

В случае $\rho_s \gtrsim \rho$, сравнивая характерную работу силы трения $\lambda_* F^* V \approx \lambda_* \rho_s g' V$ и кинетическую энергию $\sim \rho_s w^2 V$, находим с учетом (3.1), (3.2) оценку

$$\lambda_* \sim R\,\mathrm{Fr}^2. \tag{4.1}$$

Оценка (4.1) справедлива и для случая $\rho_s \ll \rho$. В общем случае (4.1) можно представить через коэффициент сопротивления C_w в виде

$$\lambda_* \sim \frac{\rho_s}{\rho C_w} R, \quad \rho_s \gtrsim \rho; \quad \lambda_* \sim \frac{R}{C_w}, \quad \rho_s \ll \rho. \tag{4.2}$$

Оценки (4.1), (4.2) показывают, что $\lambda_* \gg R$ только в случае большого числа Фруда ($\mathrm{Fr} \gg 1$) или очень тяжелых частиц ($\rho_s/\rho \gg 1$).

Если дополнительно к оценкам (4.1), (4.2) учесть ограничение (1.3), которое необходимо наложить на характерный макроскопический масштаб L, то получим, что $\lambda_* \ll L$. Отсюда следует важный вывод. Обмен кинетическими энергиями хаотического движения между областями на макроскопическом расстоянии $L \gg R$ невозможен. В каждой точке двухфазной сплошной среды устанавливается локально равновесное состояние, независимое от соседних макрообластей. Механизм теплопередачи, свойственный неоднородному разреженному газу, отсутствует.

5. **Оценка интенсивности хаотического движения частиц.** Попытаемся получить энергетическую оценку для интенсивности хаоса, исходя из представлений п. 2. Прежде отметим, что в случайной системе частиц, движущихся в жидкости, имеются флуктуации разных масштабов. При этом коррелированы флуктуации скоростей только достаточно близких частиц, расположенных на расстоянии $\sim R$. Следовательно, масштаб флуктуаций $\sim R$.

При малых числах Рейнольдса и Фруда верны уравнения (2.2) и из них следует, что по порядку

$$\sqrt{\overline{(\delta u)^2}} = |w|\,\varphi(c), \tag{5.1}$$

где $\varphi(c) \sim 1$ в концентрированной системе. В разреженной системе возмущение скорости частицы, вызываемое присутствием соседних, имеет порядок $c^{1/3}$, поэтому при $c \to 0$ величина $\varphi \sim c^{1/3}$.

В общем случае изменение кинетической энергии частицы и жидкости во флуктуационном движении масштаба $\sim R$ ограничено работой внешней силы $F^{(\alpha)}$ (1.2) на этом масштабе. Часть этой работы за время жизни флуктуации $\tau \sim R/\delta u$ диссипирует за счет вязкого трения. С точностью до функции от концентрации c имеем

$$\rho_s (\delta u)^2 \lesssim |\rho_s - \rho| g' R, \quad g' = |\mathbf{g} - d\mathbf{v}/dt|. \tag{5.2}$$

Если $\rho_s \ll \rho$, то в левой части (5.2) будет $\rho(\delta u)^2$. При $\mathrm{Fr} \gtrsim 1$ из (5.2) следует

$$\sqrt{\overline{(\delta u)^2}} \simeq |w|\,\varphi_1(c)\,\mathrm{Fr}^{-1}. \tag{5.3}$$

При конечных числах Рейнольдса и для отношений плотностей $\rho_s \gtrsim \rho$ из (5.2), (1.2) и (3.3) следует

$$\sqrt{\overline{(\delta u)^2}} \lesssim w \sqrt{C_w \rho/\rho_s}, \quad \mathrm{Re} > 1. \tag{5.4}$$

В концентрированной системе $C_w \gtrsim 1$.

Из формул (5.3), (5.4) вытекает, что интенсивность хаотического движения уменьшается с ростом плотности частиц. Флуктуации скорости δu существуют при $\mathrm{Re} \ll 1$, только если $\mathrm{Fr} \lesssim 1$. В области $\mathrm{Fr} \to \infty$ величина $\delta u/w \to 0$, пульсации скорости практически отсутствуют. Аналогично при конечных числах Рейнольдса для тяжелых частиц ($\rho_s/\rho \gg 1$) амплитуда пульсаций $\delta u \ll w$.

Полученные условия существования хаоса скоростей намного ограничительнее условий справедливости (1.3) или диффузионного приближения (см. п. **11**).

Из сравнения (5.3), (5.4) с (4.1), (4.2) видно также, что в области параметров, где есть заметный хаос в скоростях, всегда отсутствует обмен кинетической энергией пульсационного движения между макроскопическими областями.

6. Уравнения движения. Перейдем к определению малых поправок к уравнениям главного приближения п. **3**. Запишем осредненные уравнения механики в точном виде [6]

$$(6.1)\qquad (1-c)\rho d\mathbf{v}/dt + c\rho_s d\mathbf{u}/dt = (1-c)\rho\mathbf{g} + c\rho_s\mathbf{g} - \nabla p + \operatorname{div}\,[-(1-c)\rho\overline{\delta\mathbf{v}\delta\mathbf{v}} - c\rho_s\overline{\delta\mathbf{u}\delta\mathbf{u}} + \boldsymbol{\sigma}],$$

$$c\rho_s d\mathbf{u}/dt = c\rho_s\mathbf{g} - \operatorname{div}(c\rho_s\,\overline{\delta\mathbf{u}\delta\mathbf{u}}) + c\mathbf{F},$$

$$\partial c/\partial t + \operatorname{div}(c\mathbf{u}) = 0,\quad -\partial c/\partial t + \operatorname{div}\,[(1-c)\mathbf{v}] = 0.$$

Первое уравнение (6.1) описывает движение смеси в целом; $\boldsymbol{\sigma}$ — вязкое напряжение; p — давление. Чертой обозначены средние от флуктуаций. Во втором уравнении (6.1), описывающем движение частиц, $\mathbf{F}$ — средняя сила, действующая на данную частицу со стороны потока и, вообще говоря, других частиц. В $\mathbf{F}$, в частности, входят вязкие напряжения в среде частиц, которые имеют второй порядок малости по $R/L \ll 1$, т. е. пренебрежимо малы.

В главном приближении по малым параметрам (1.1) в уравнениях (6.1) следует пренебречь малыми градиентами и положить $d\mathbf{u}/dt = d\mathbf{v}dt$ (п. **1**). При этом сила взаимодействия фаз $\mathbf{F}_{(0)}$ определяется по п. **3** в виде

$$(6.2)\qquad \mathbf{F}_{(0)} = -\rho\mathbf{g}' + \mathbf{F}^*,$$

где $\mathbf{F}^*$ дано формулой (3.2) или (3.3).

В следующем приближении в уравнениях (6.1) необходимо учесть малые поправки, линейные по градиентам средних величин и массовой силы $\mathbf{g}'$:

$$(6.3)\qquad \mathbf{F} = \mathbf{F}_{(0)} + \mathbf{k}_1\nabla c + \mathbf{k}_2\nabla\mathbf{g}' + \mathbf{k}_3\nabla\mathbf{v} + \mathbf{k}_4 d\mathbf{g}'/dt.$$

Величины $\nabla\mathbf{u}$ и $\nabla\mathbf{w}$ в (6.3) не вошли, так как по формулам (3.1), (3.3) они выражаются через ∇c и $\nabla\mathbf{v}$. По аналогичной причине в (6.3) не учитывается dc/dt.

Тензорные коэффициенты $\mathbf{k}_a$ имеют вид

$$(6.4)\qquad \mathbf{k}_a = Q_a\varphi_a'(c, \mathrm{Ar}, \chi, \mathbf{e}) = Q_a\varphi_a(c, \mathrm{Re}, \chi, \mathbf{e}),$$

где Q_a — скалярные размерные комбинации параметров R, μ, ρ; φ_a — безразмерные тензорные функции; $\mathbf{e}$ — единичный вектор вдоль $\mathbf{w}$. Аналогично тензор давлений в (6.1), возникающий из-за флуктуаций скоростей частиц, равен

$$(6.5)\qquad \mathbf{P}_s = c\rho_s\overline{\delta\mathbf{u}\delta\mathbf{u}} = \rho_s w^2\mathbf{k}_5(c, \mathrm{Re}, \chi, \mathbf{e}).$$

Средняя величина $\overline{\delta\mathbf{v}\delta\mathbf{v}}$ вычисляется в таком же виде. Формулы (6.1)—(6.4) вместе с (3.1)—(3.3) представляют уравнения двухфазной среды с учетом градиентных слагаемых. Вид неизвестных тензорных функций $\mathbf{k}_a$ можно найти при помощи теории подобия и соображений симметрии [11].

7. Общая формула для силы F при $\mathrm{Re} \ll 1$. При определении зависимости (6.2) необходимо учесть, что пространство изотропно и тензорные функции $\mathbf{k}_a$ зависят от направления вектора $\mathbf{g}'$ или $\mathbf{w}$.

Из формул (6.2)—(6.4) и (3.1), (3.2) с учетом подобия и симметрии находим

$$\mathbf{F} = -\rho\mathbf{g}' - A(\mathbf{w} + \mathbf{a}\nabla c + \mathbf{b}\nabla\mathbf{v} + \mathbf{d}\nabla\mathbf{g}' + \mathbf{h}d\mathbf{g}'/dt), \tag{7.1}$$

где тензорные коэффициенты определяются через $e_i = w_i/|\mathbf{w}|$ формулами

$$a_{ij} = R|\mathbf{w}|(f_1\delta_{ij} + f_2e_ie_j), \tag{7.2}$$
$$b_{ijk} = R(b_1e_i\delta_{jk} + b_2e_j\delta_{ik} + b_3e_k\delta_{ij} + b_4e_ie_je_k).$$

Тензоры h_{ij} и d_{ijk} записываются аналогично (7.2). Во многих практически важных случаях можно пренебречь изменением ускорения g' и соответственно опустить слагаемые с $\mathbf{h}$ и $\mathbf{d}$ в (7.1). Входящие в (7.2) скалярные коэффициенты зависят только от концентрации c и числа Фруда Fr. Коэффициент $b_1 = 0$ в (7.2) без ограничения общности, так как в соответствии с уравнениями неразрывности (6.1) и с учетом главного приближения (3.1) div $\mathbf{v}$ выражается через ∇c и $\nabla\mathbf{g}'$. Слагаемое $\mathbf{b}\nabla\mathbf{v}$ в (7.1), согласно (7.2), определяется формулой

$$|\mathbf{w}|R^{-1}(\mathbf{b}\nabla\mathbf{v})_i = b_2[\mathbf{w}, \operatorname{rot}\mathbf{v}]_i + (b_3 + b_2)(\mathbf{w}\nabla)v_i + b_4(\mathbf{e}(\mathbf{e}\nabla)\mathbf{v})w_i. \tag{7.3}$$

Первое слагаемое в правой части (7.3) определяет поперечную силу δF_1, действующую на дисперсную фазу. Сила δF_1 отличается от известной силы Магнуса [6] коэффициентом. При Re $\ll 1$ величина δF_1 превосходит силу Магнуса в Re^{-1} раз ($b_2 \neq 0$). Появление новой поперечной силы связано с учетом хаотических движений частиц. Оно объясняется нарушением равновесного состояния хаотических движений, вносимых изменением поля скоростей за большое время порядка $t \sim 1/|\nabla\mathbf{v}|$. Ясно, что при этом действительно должна возникать поправка к силе $\mathbf{F}^*$ порядка $\tau/t \sim |\nabla\mathbf{v}|R/w$, где $\tau \sim R/w$ — малое характерное время установления хаоса в концентрированной системе.

Поперечная сила $\delta\mathbf{F}_1$ имеет значение для описания движения концентрированных суспензий при наличии сдвиговых деформаций и, в частности, при движении в вертикальных каналах. Она может вызывать значительное изменение распределения концентрации по сечению канала в условиях, когда обычная сила Магнуса равна нулю.

Перейдем к поправкам в силе взаимодействия фаз (7.1), обусловленным градиентом концентрации ∇c.

8. **Диффузионная модель силы** (Re $\ll 1$). Причина появления слагаемого $\mathbf{a}\nabla c$ в (7.1) ясна на следующей модели.

Разобьем объемный поток частиц $\mathbf{J} = c\mathbf{u}$ на две части: гидродинамический (систематический) поток $c\mathbf{u}_H$ и диффузионный поток $\mathbf{D}\nabla c$, обусловленный хаотическим движением частиц, с тензорным коэффициентом диффузии D:

$$\mathbf{J} = c\mathbf{u} = c\mathbf{u}_H - \mathbf{D}\nabla c. \tag{8.1}$$

Принимая, что сила трения фаз $\mathbf{F}^*$ зависит от систематической скорости u_H точно так же, как в однородном состоянии, получим из (8.1) и формулы главного приближения (3.2)

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{F}^*_{(0)}(\mathbf{u}_H - \mathbf{v}) = -A\left(\mathbf{w} + \frac{1}{cA}\frac{\partial Aw}{\partial w}\mathbf{D}\nabla c\right). \tag{8.2}$$

Так как известны параметры, от которых в главном зависит хаотическое движение частиц, то из теории подобия и соображений симметрии имеем

$$D_{ij} = D_\perp\delta_{ij} + (D - D_\perp)w_iw_j/w^2, \tag{8.3}$$
$$D = R|\mathbf{w}|f(c, \mathrm{Fr}), \quad D_\perp = R|\mathbf{w}|f_\perp(c, \mathrm{Fr}).$$

Выражения (8.2), (8.3) эквивалентны учету слагаемых $\mathbf{w}$ и $\mathbf{a}\nabla c$ в силе трения в (7.1). Заметим, что коэффициенты переноса вида $D \sim Rw$ вводились в [3, 4] при изучении системы всплывающих пузырьков при конечных числах Рейнольдса.

Существенно то, что диффузия есть и при $\mathrm{Re} \to 0$ и, главное, что коэффициент переноса D существенно влияет на поправки порядка R/L к силе взаимодействия фаз. По-видимому, слагаемое $\mathbf{D}\nabla c$ вообще является главной поправкой.

Важна зависимость коэффициента диффузии D от числа Фруда. Учитывая, что $D \sim R\delta u$, где δu — среднеквадратичная флуктуация скорости, получим из (5.3), что $D \to 0$ при $\mathrm{Fr} \to \infty$, т. е. диффузия исчезает при больших числах Фруда. Диффузия заметно проявляется при $\mathrm{Fr} < 1$.

9. Уравнения при малых числах Фруда. Кроме силы $\mathbf{F}$, уравнения (6.1) включают пульсационные давления. Тензор давлений в среде частиц $\mathbf{P}_s$ определяется из (6.5) в виде

$$(\mathbf{P}_s)_{ij} = \rho_s S_\perp w^2 \delta_{ij} + \rho_s (S - S_\perp) w_i w_j, \tag{9.1}$$

где безразмерные функции S и $S_\perp$ зависят от c и Fr. При малых числах Рейнольдса аналогичный вклад $\overline{\delta\mathbf{v}\delta\mathbf{v}}$ в (6.1) всегда пренебрежимо мал. Учет (9.1) имеет смысл при $\rho_s \gg \rho$.

При малых концентрациях c величина $\delta u \sim wc^{1/3}$, поэтому S, $S_\perp \sim c^{5/3}$.

При больших числах Фруда ($\mathrm{Fr} \to \infty$) функции S, $S_\perp$ в (9.1) убывают как Fr^{-2}. Следовательно, давление $\mathbf{P}_s \to 0$ при $\mathrm{Fr} \to \infty$. При малых числах Фруда ($\mathrm{Fr} \ll 1$) из (9.1) и (7.2), (3.2) следуют оценки роли давления $\mathbf{P}_s$ и поправки $\delta\mathbf{F}$ к силе $\mathbf{F}_{(0)}$:

$$\operatorname{div} \mathbf{P}_s \sim \rho_s w^2/L, \quad \delta F \sim \mu w/RL \sim \rho w^2/\mathrm{Re}L.$$

Учитывая, что $\mathrm{Re}\,\rho_s/\rho \sim \mathrm{Fr}^2$, получаем отсюда, что при малых числах Фруда давление дисперсной фазы пренебрежимо мало, $\mathbf{P}_s \sim \mathrm{Fr}^2\delta F$. Отсюда видно, что давление частиц $\mathbf{P}_s$ играет второстепенную роль в уравнениях по сравнению с диффузионным слагаемым, определяемым (8.2) или (7.1).

Оценки показывают, что в уравнениях при $\mathrm{Fr} \ll 1$ следует пренебречь отличием в ускорениях фаз, но необходимо учитывать диффузионные поправки к силе. При этом уравнение относительного движения фаз следует из (6.1), (7.1)

$$\mathbf{w} = (\rho - \rho_s)\mathbf{g}' A^{-1} - \mathbf{a}\nabla c - \mathbf{b}\nabla\mathbf{v}. \tag{9.2}$$

Упрощенной диффузионной модели п. 8 соответствует $\mathbf{b} = 0$ в формуле (9.2).

10. Межфазное взаимодействие и давление частиц при конечных числах Рейнольдса. При $\mathrm{Re} > 1$ выражение для силы, следующее из (6.4), аналогично (7.1) примет вид

$$\mathbf{F} = -\rho\mathbf{g}' - R^{-1}C_w\rho|\mathbf{w}|[\mathbf{w} + \mathbf{a}\nabla c + \mathbf{b}\nabla\mathbf{v} + \mathbf{d}\nabla\mathbf{g}' + \mathbf{h}d\mathbf{g}'/dt]. \tag{10.1}$$

Коэффициенты $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{d}$, $\mathbf{h}$ вновь определяются формулами вида (7.2), однако они теперь зависят от $\chi = \rho_s/\rho$ и Re (кроме c). При $\mathrm{Re} \gg 1$ коэффициенты в (10.1), видимо, слабо зависят от Re. Коэффициент a аналогичен тензору $c^{-1}D$ в диффузионном выражении (8.2). Тензор диффузии D зависит от отношения плотностей. В силу (5.4) величина $D \sim \sqrt{\rho/\rho_s} \to 0$ при $\chi \to \infty$. Диффузионный член существен только для случая сравнимых плотностей частиц и жидкости $\rho_s \leqslant \rho$. Коэффициенты диффузии должны быть максимальны в пузырьковых средах, изучаемых в [3, 4]. Для малых изменений ускорения потока в (10.1) коэффициенты $d = 0$ и $h = 0$.

Функции S и $S_\perp$ в давлении $\mathbf{P}_s$ (9.1) зависят от c, Re, χ. Однако зависимость от Re при $\mathrm{Re} \gg 1$, как обычно, должна быть несущественной. Но зависимость S от χ принципиальна. Используя (5.4), видим, что $S \to 0$

при $\chi = \rho_s/\rho \to \infty$ как χ^{-1}. Таким образом, давление в среде частиц, обязанное их столкновениям, стремится к нулю с ростом отношения плотностей частиц и жидкости ρ_s/ρ.

11. Приложение. Условия применимости приближения равных ускорений. Уравнение импульсов дисперсной фазы имеет вид [6]

$$\rho_s \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho_s \mathbf{g} - \rho\left(\mathbf{g} - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right) - \frac{C_w}{R}\rho\mathbf{w}|\mathbf{w}|, \quad \mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}. \tag{11.1}$$

В уравнениях не учитываем малые вклады вязких напряжений и пульсационных напряжений. Их учет, по существу, не изменяет последующих оценок.

Выражая $\mathbf{u}\nabla\mathbf{u}$ через $\mathbf{v}\nabla\mathbf{v}$, преобразуем (11.1) к виду

$$\rho_s\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{w} + (\mathbf{w}\nabla)\mathbf{v} + (\mathbf{w}\nabla)\mathbf{w} - \mathbf{g}\right) + \tag{11.2}$$
$$+ \rho\left(\mathbf{g} - \frac{d\mathbf{v}}{dt}\right) = \frac{C_w}{R}\rho\mathbf{w}|\mathbf{w}|.$$

Введем безразмерные переменные, соответствующие масштабам изменения параметров потока в пространстве и времени L и T. Сравнивая слагаемые, содержащие w в левой и правой части (11.2), видим, что с точностью до малых величин порядка

$$\frac{R}{Tw}\frac{\rho_s}{\rho C_w} \ll 1, \quad \frac{R}{L}\frac{\rho_s}{\rho C_w} \ll 1 \tag{11.3}$$

можно пренебречь слагаемыми с w в левой части (11.2). Возможность (11.3) обусловлена исходными неравенствами (1.1). При этом из (11.2) следует уравнение диффузионного приближения

$$(\rho - \rho_s)(\mathbf{g} - d\mathbf{v}/dt) = -R^{-1}C_w\rho\mathbf{w}|\mathbf{w}|. \tag{11.4}$$

Уравнение импульсов двухфазной среды преобразуется аналогично. При этом уравнения соответствуют движению смеси как гомогенной, а скорость относительного движения фаз определяется ускорением $\mathbf{g}'$. Это приближение равных ускорений фаз, когда верно (1.3).

Из (11.3) видно, что для $C_w\rho/\rho_s \geqslant 1$ условия справедливости диффузионного приближения выполнены с той же точностью, что условия применимости подхода сплошной среды (1.1). Это выполнено всегда при $\rho_s \leqslant \rho$, так как $C_w \geqslant 1$. Следовательно, диффузионное приближение пригодно для пузырьков, капель или твердых частиц в жидкости.

Условия (11.3) могут нарушаться только для тяжелых частиц, когда $\rho_s \gg \rho$ (например, частицы в газе) и если масштабы L и T недостаточно велики. В случае малых чисел Рейнольдса и $\rho_s \gg \rho$ условия (11.3) можно переписать в форме (1.4). Диффузионное приближение может быть непригодно только в области больших чисел Фруда $\mathrm{Fr} \gg 1$.

Поступила 19 VI 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. **Струминский В. В.** Общая теория мелкодисперсных сред.— В сб.: Механика многокомпонентных сред в технологических процессах. М.: Наука, 1978.
2. **Мясников В. П.** О динамических уравнениях движения двухкомпонентных систем.— ПМТФ, 1967, № 2.
3. **Бурдуков А. П., Валукина Н. В., Накоряков В. Е.** Особенности течения газожидкостной пузырьковой смеси при малых числах Рейнольдса.— ПМТФ, 1975, № 4.
4. **Бурдуков А. П., Козьменко Б. К., Накоряков В. Е.** Распределение профилей скорости жидкой фазы в газожидкостном потоке при малых газосодержаниях.— ПМТФ, 1975, № 6.
5. **Седов Л. И.** Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1977

6. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978.
7. Воинов О. В., Петров А. Г. Об устойчивости малого тела в неоднородном потоке.— ДАН СССР, 1977, т. 237, № 6.
8. Carlos C. R., Richardson J. F. Solids movement in liquid fluidized beds. I. Particle velocity distribution.— Chem. Eng. Sci., 1968, vol. 23, p. 813.
9. Дэвидсон И. Ф., Харрисон Д. Псевдосжижение. М.: Химия, 1974.
10. Maude A. D., Whitmore R. L. A generalized theory of sedimentation.— Brit. J. Appl. Phys., 1958, vol. 9, N 12.
11. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1976.

УДК 532.516

ВОЗНИКНОВЕНИЕ ВИХРЕЙ ТЕЙЛОРА МЕЖДУ НАГРЕТЫМИ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ЦИЛИНДРАМИ

В. В. Колесов

(Ростов-на-Дону)

Экспериментальные наблюдения [1—4] показывают, что в результате потери устойчивости неизотермического течения Куэтта между вращающимися с различными угловыми скоростями концентрическими цилиндрами может возникнуть вторичное стационарное течение типа вихрей Тейлора (вращательно-симметричные тороидальные вихревые ячейки, регулярно расположенные вдоль оси цилиндров). В [5] это вторичное течение было найдено методом Ляпунова — Шмидта в случае, когда цилиндры вращаются в одну сторону и число Прандтля равно единице.

В данной работе приводятся результаты вычислений вихрей Тейлора как для случая, когда цилиндры вращаются в одну сторону, так и для случая противоположного направления вращения цилиндров. Изменение структуры вихрей при изменении значений параметров задачи проиллюстрировано на картине линий тока вторичного течения. Получены аналитические зависимости амплитуды вихрей и декремента неизотермического течения Куэтта от числа Прандтля, избавляющие от необходимости проводить трудоемкие расчеты и позволяющие установить некоторые свойства основного и вторичного режимов. Следует отметить, что аналогичная зависимость амплитуды вторичного режима от числа Прандтля для стационарной задачи о свободной конвекции в слое жидкости была установлена и использована при расчетах в работе [6].

1. Ряды Ляпунова — Шмидта. Пусть вязкая однородная теплопроводная жидкость заполняет полость между двумя бесконечными твердыми концентрическими цилиндрами. Радиусы, угловые скорости и температуры внутреннего и внешнего цилиндров обозначим соответственно R_1, Ω_1, Θ_1 и R_2, Ω_2, Θ_2.

Предположим, что внешние массовые силы отсутствуют и расход жидкости через поперечное сечение полости цилиндров равняется нулю. Тогда уравнения Навье—Стокса и уравнение теплопроводности допускают точное решение (неизотермическое течение Куэтта) с вектором скорости $\mathbf{U}_0 = \{u_{0r}, u_{0\varphi}, u_{0z}\}$, температурой T_0 и давлением Π_0(r, φ, z — безразмерные цилиндрические координаты):

$$\mathbf{U}_0 = \{0,\ V_0(r),\ 0\},\quad V_0 = ar + b/r,\quad T_0 = c\ln r + 1, \tag{1.1}$$

$$\Pi_0 = \int\limits_1^r \frac{V_0^2(\rho)}{\rho}\left(1 - \frac{\mu}{\Pr}\ln\rho\right)d\rho + \text{const},$$

$$a = (\Omega R^2 - 1)/(R^2 - 1),\quad b = 1 - a,\quad c = (\Theta - 1)/\ln R,$$

где $\mu = \beta c\Theta_1 \Pr$ — число Рэлея; $\Pr = \nu/\chi$ — число Прандтля; β, ν и χ — соответственно коэффициенты теплового расширения, кинематической