

УДК 539.3

ИЗГИБ СТЕРЖНЕЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СЛЕДЯЩЕЙ НАГРУЗКИ

Ю. В. Захаров, К. Г. Охоткин*, А. Д. Скоробогатов**

Институт физики им. Л. В. Киренского СО РАН, 660036 Красноярск

* Сибирский государственный технологический университет, 660049 Красноярск

** Сибирский государственный аэрокосмический университет, 660014 Красноярск

E-mail: okg2000@mail.ru

Приведены точные решения задачи нелинейного изгиба тонкого стержня под действием сосредоточенной следящей нагрузки. Исследована задача при произвольном угле слежения и рассмотрены частные случаи — продольной следящей силы и поперечной следящей силы. Решения записаны в едином параметрическом виде и выражены через эллиптические функции Якоби.

Ключевые слова: изгиб стержней, следящая нагрузка, эллиптические функции Якоби.

Введение. Поведение и устойчивость гибких стержней под воздействием следящей нагрузки рассматривались в работах многих авторов (см., например, [1, 2]). Однако анализ устойчивости при таком нагружении проводился исходя из геометрически линейных уравнений равновесия и движения стержня. При этом применялся, как правило, динамический критерий устойчивости.

В работах авторов [3, 4] развита геометрически нелинейная теория изгиба тонких стержней. В этих работах применялся статический критерий устойчивости стержней исходя из уравнения равновесия типа нелинейного маятника. Найдены аналитически и систематизированы формы изгиба стержня при различных нагрузках постоянного направления и способах закрепления концов стержня. Решения выражены через эллиптические интегралы и функции Якоби, зависящие от одного внешнего параметра — модуля эллиптических функций, определяемого граничными условиями и внешней действующей силой, в отличие от работ [5, 6], где решения зависели от трех параметров. Решения, подобные результатам [3, 4], приведены также в работе [7], где рассматривается возможность вторичной потери устойчивости стержнем.

В настоящей работе построено точное аналитическое решение задачи о нелинейном изгибе тонкого упругого стержня при нагружении следящей сосредоточенной силой с заданным углом слежения. Рассматривается стержень, жестко защемленный на одном конце и свободный на другом. Вычислены критические нагрузки и найдены равновесные формы изогнутого нагруженного стержня.

Общее решение задачи об изгибе стержня. Рассмотрим тонкий нерастяжимый стержень длиной L с изгибной жесткостью EI . Выберем декартову систему координат xOy так, чтобы изначально прямой стержень был расположен вдоль оси Ox , закреплен на левом конце, находящемся в начале координат, и свободен либо закреплен на правом конце. Стержень сжимается силой P , сосредоточенной на правом конце стержня, направление действия которой образует некоторый угол с осью Ox . Обозначим через l длину вдоль

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02-01-01017).

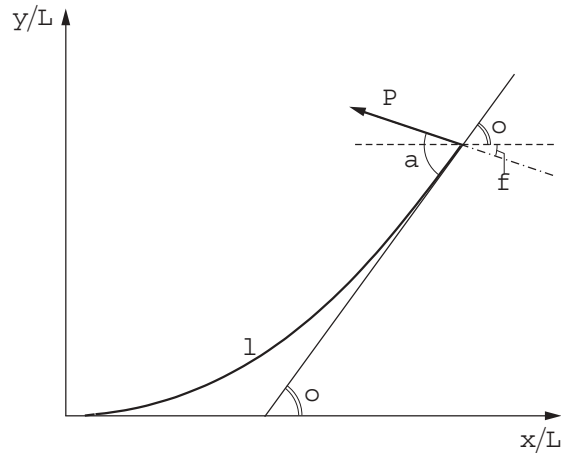


Рис. 1. Система координат

линии стержня, через $\theta(l)$ — угол между касательной в текущей точке к линии стержня и осью Ox , через P_x, P_y — декартовы компоненты силы P . Система координат приведена на рис. 1.

Приведем здесь кратко общее решение этой задачи, следуя работе [4], где угол между направлением действия силы и осью Ox сохранялся и обозначался φ_0 . В данной работе при нагружении стержня следящей силой угол между направлением действия силы и осью Ox (далее будем обозначать его φ) может изменяться в процессе нагружения.

Уравнение равновесия стержня имеет вид

$$EI \frac{d^2\theta}{dl^2} - P_x \sin \theta + P_y \cos \theta = 0. \quad (1)$$

Введем следующие обозначения: P — модуль сосредоточенной силы; $t = l/L$ — безразмерная длина, изменяющаяся от 0 до 1; $q^2 = PL^2/EI$ — собственное число. Приведем решение уравнения (1)

$$\theta(t) = -\varphi + 2 \arcsin [k \operatorname{sn}(qt + F_1, k)], \quad \frac{d\theta(t)}{dt} = 2kq \operatorname{cn}(qt + F_1, k), \quad (2)$$

где sn , cn — эллиптические синус и косинус Якоби. Модуль эллиптических функций k и параметр F_1 — константы интегрирования, и их связь с силой P и углом φ определяется из граничных условий в каждом случае изгиба стержня.

Введем обозначение для аргумента эллиптических функций

$$u = qt + F_1. \quad (3)$$

Интегрируя соотношения $dx/dl = \cos \theta$, $dy/dl = \sin \theta$, с учетом (3) найдем координаты произвольной точки стержня

$$x/L = X_0 \cos \varphi + Y_0 \sin \varphi, \quad y/L = Y_0 \cos \varphi - X_0 \sin \varphi, \quad (4)$$

где

$$X_0 = -t + 2[E(\operatorname{am} u) - E(\operatorname{am} F_1)]/q, \quad Y_0 = 2k[\operatorname{cn} F_1 - \operatorname{cn} u]/q. \quad (5)$$

Здесь $E(\operatorname{am} u)$ — неполный эллиптический интеграл второго рода от эллиптической амплитуды Якоби. Выражения (4), (5) задают форму профиля изогнутого стержня в параметрическом виде с параметром t — приведенной длиной стержня.

Изгиб стержня с заземленным и свободным концами под действием следящей силы при произвольном угле слежения. Граничные условия рассматриваемого закрепления концов стержня имеют вид

$$\theta(0) = 0, \quad \frac{d\theta(L)}{dl} = 0. \quad (6)$$

Введем угол слежения α — угол между линией действия силы и касательной к линии изгиба стержня в конце стержня (см. рис. 1). Исходя из определения следящей силы, запишем дополнительное условие постоянства угла α на конце стержня

$$\theta(1) = \alpha - \varphi. \quad (7)$$

Будем считать величины P и α параметрами состояния, заданными условиями задачи.

С учетом первого условия в (6), используя решение (2) уравнения (1), получим $\operatorname{sn} F_1 = \sin(\varphi/2)/k$, и, следовательно,

$$F_1 = F[\arcsin(\sin(\varphi/2)/k), k], \quad (8)$$

где $F(\varphi, k)$ — неполный эллиптический интеграл первого рода.

Из второго условия в (6) следует $\operatorname{sn}(q + F_1) = 0$, откуда

$$q = (2n - 1)K(k) - F_1, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (9)$$

где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

Используя условие для следящей силы (7), получим из (2) и (9), что $\sin(\alpha/2) = k \operatorname{sn}(K(k), k)$, и, следовательно,

$$k = \sin(\alpha/2). \quad (10)$$

Выражение (10) определяет значение модуля эллиптических функций и интегралов k по известному значению угла α . В задаче со следящей силой нагрузка при заданном угле α определяет угол φ в отличие от задачи изгиба стержня при нагружении силой постоянного направления [4], в которой нагрузка при заданном угле φ определяла модуль k .

Из выражений (8)–(10) следует спектр собственных значений $q_n(k)$, который, в свою очередь, определяет критические нагрузки

$$P/P_{\text{кр}} = (2/\pi)^2 \{(2n - 1)K(\sin(\alpha/2)) - F[\arcsin(\sin(\varphi/2)/\sin(\alpha/2)), \sin(\alpha/2)]\}^2. \quad (11)$$

Здесь $P_{\text{кр}} = (\pi/2)^2 EI/L^2$ — эйлерова критическая сила; n — номер моды решения. Выражение (11) показывает связь между величиной внешней следящей силы P и φ — углом наклона силы к оси Ox для каждой моды n при заданном угле слежения α . Из соотношения (11) видно, что при изменении величины внешней силы для каждой моды параметр φ изменяется в пределах

$$-\alpha \leq \varphi \leq \alpha. \quad (12)$$

При $\varphi = \pm\alpha$ имеем пороговые значения внешней силы

$$P_n/P_{\text{кр}} = (n - 1)^2 (4/\pi)^2 K^2(\sin(\alpha/2)), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (13)$$

при превышении которых происходит смена моды решения. Первая мода ($n = 1$) начинается с нулевого порога $P_1 = 0$.

На первой моде внешняя сила $P/P_{\text{кр}}$ непрерывно плавно увеличивается от 0 до следующего, второго порогового значения P_2 , а параметр φ , угол наклона силы к оси Ox , при этом плавно изменяется от α до $-\alpha$. Вторая мода решения появляется при превышении нагрузкой P порогового значения P_2 , при этом угол $\varphi = -\alpha$. На второй моде ($n = 2$) внешняя сила $P/P_{\text{кр}}$ увеличивается от P_2 до P_3 , а параметр φ при этом изменяется в обратном направлении — от $-\alpha$ до α и т. д.

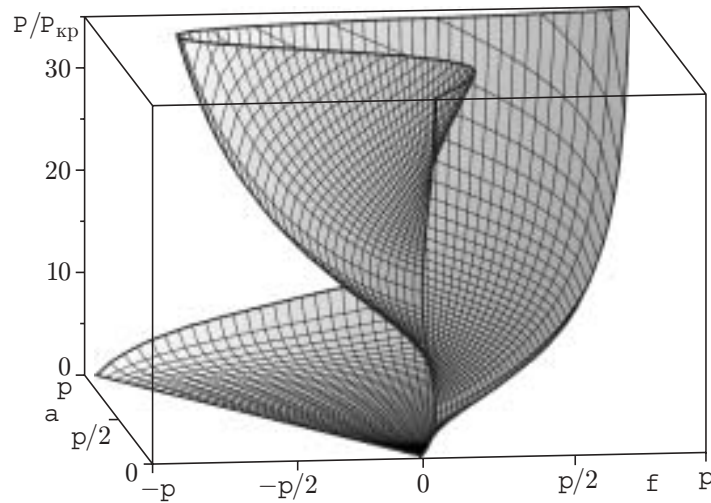


Рис. 2. Спектр собственных значений уравнения равновесия тонкого стержня при следящем нагружении

Таким образом, основной особенностью решения задачи изгиба стержня при следящем нагружении является плавный переход между модами (смена мод) решения при увеличении внешней нагрузки. Можно говорить о мягкой потере устойчивости при изгибе. Это является существенным отличием от задачи с нагружением стержня силой постоянного направления [4], где нет плавного перехода между модами и реализуется только одна из возможных мод решения, причем реализация старших мод возможна при условии импульсного, скачкообразного нагружения, и можно говорить о жесткой потере устойчивости.

Зависимость нагрузки $P/P_{кр}$ от углов α и φ в соответствии с выражением (11) приведена на рис. 2. Координаты точек стержня определяются выражениями (4), (5) при подстановке значений q , F_1 , k из (8)–(10). Тогда в общем случае заданных угла слежения α и величины силы P получим выражения для формы прогиба стержня

$$\begin{aligned} \frac{x}{L} &= \left[-t + 2 \frac{E(\operatorname{am} u) - E_1}{pK(k) - F_1} \right] \cos \varphi + 2k \frac{\operatorname{cn} F_1 - \operatorname{cn} u}{pK(k) - F_1} \sin \varphi, \\ \frac{y}{L} &= 2k \frac{\operatorname{cn} F_1 - \operatorname{cn} u}{pK(k) - F_1} \cos \varphi - \left[-t + 2 \frac{E(\operatorname{am} u) - E_1}{pK(k) - F_1} \right] \sin \varphi, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} F_1 &= F[\arcsin(\sin(\varphi/2)/k), k], & E_1 &= E[\arcsin(\sin(\varphi/2)/k), k], \\ u &= (pK(k) - F_1)t + F_1, & p &= 2n - 1, & k &= \sin(\alpha/2), \end{aligned}$$

а величина силы будет связана с параметром φ выражением (11).

Таким образом, каждому значению внешней силы P и номеру моды n при заданном угле слежения α соответствует своя форма прогиба стержня, задаваемая одним параметром — углом φ , который определяется из соотношения (11) по известной силе P .

Координаты конца. Из выражений (14) можно получить координаты (x_1, y_1) незакрепленного конца стержня, положив $t = 1$:

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{L} &= \left[2 \frac{pE - E_1}{pK - F_1} - 1 \right] \cos \varphi + \frac{2k \operatorname{cn} F_1}{pK - F_1} \sin \varphi, \\ \frac{y_1}{L} &= \frac{2k \operatorname{cn} F_1}{pK - F_1} \cos \varphi - \left[2 \frac{pE - E_1}{pK - F_1} - 1 \right] \sin \varphi. \end{aligned} \quad (15)$$

Координаты точек перегиба. Точки, в которых обращается в нуль вторая производная d^2y/dx^2 , являются точками перегиба линии стержня. Обозначим искомую криволинейную координату такой точки t_1 . Вычислим с учетом (2) вторую производную функции линии изгиба стержня, заданной параметрическими уравнениями (14):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^3} = \frac{1}{\cos^3 \theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{2kq \operatorname{cn} u}{\cos^3 \theta}.$$

Отсюда, учитывая свойства нулей эллиптического косинуса Якоби $\operatorname{sn}(2m+1)K(k) = 0$ и выражение (9) для собственного числа q , получим, что

$$[(2n-1)K(k) - F_1]t_1 + F_1 = (2m+1)K(k),$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$ — номер моды решения, а $m = 0, 1, 2, \dots$ — номер нуля эллиптического косинуса, совпадающий с порядковым номером точки перегиба. Окончательно находим

$$t_1(\varphi) = \frac{(2m+1)K(k) - F_1}{(2n-1)K(k) - F_1}, \quad F_1 = F[\arcsin(\sin(\varphi/2)/k), k]. \quad (16)$$

Номер моды решения связан с числом точек перегиба линии стержня. На первой моде имеется одна точка перегиба на конце стержня $t_1 = 1$. На второй моде появляется вторая точка перегиба, которая постепенно перемещается вдоль стержня.

Координаты точки сжатия. Точки, в которых совпадают угол наклона касательной и угол наклона сжимающей силы к оси Ox , назовем точками сжатия. Обозначим искомую криволинейную координату такой точки t_0 . Положив в выражении для угла наклона касательной (2) $\theta(t_0) = -\varphi$, найдем

$$0 = \arcsin[k \operatorname{sn}(qt_0 + F_1, k)].$$

Отсюда, учитывая свойства нулей эллиптического синуса $\operatorname{sn} 2mK(k) = 0$ и выражение (9) для собственного числа q , получим

$$((2n-1)K(k) - F_1)t_0 + F_1 = 2mK(k),$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$ — номер моды решения, а $m = 0, 1, 2, \dots$ — номер нуля эллиптического синуса, совпадающий с порядковым номером точки сжатия. Окончательно находим

$$t_0(\varphi) = \frac{2mK(k) - F_1}{(2n-1)K(k) - F_1}, \quad F_1 = F\left[\arcsin \frac{\sin(\varphi/2)}{k}, k\right]. \quad (17)$$

Формы изогнутого стержня для ряда значений приложенной силы приведены на рис. 3, где на кривых показаны точки сжатия. На первой моде имеется одна точка сжатия, появляющаяся у закрепленного конца при угле наклона силы $\varphi = 0$ (для поперечного следящего нагружения кривая 3 на рис. 3). При увеличении силы первая точка сжатия сдвигается к незакрепленному концу стержня. На второй моде у закрепленного конца появляется вторая точка сжатия при угле $\varphi = 0$ (кривая 6 на рис. 3) и т. д.

Рассмотрим ряд частных случаев.

Изгиб стержня с заземленным и свободным концами под действием поперечного следящего нагружения. Для поперечной следящей нагрузки угол $\alpha = \pi/2$. В этом случае в соответствии с (10) модуль

$$k = \sqrt{2}/2. \quad (18)$$

При этом спектр собственных значений (11) примет следующий вид:

$$\frac{P}{P_{\text{кр}}} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \left((2n-1)K\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - F\left(\arcsin\left(\sqrt{2} \sin \frac{\varphi}{2}\right), \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right). \quad (19)$$

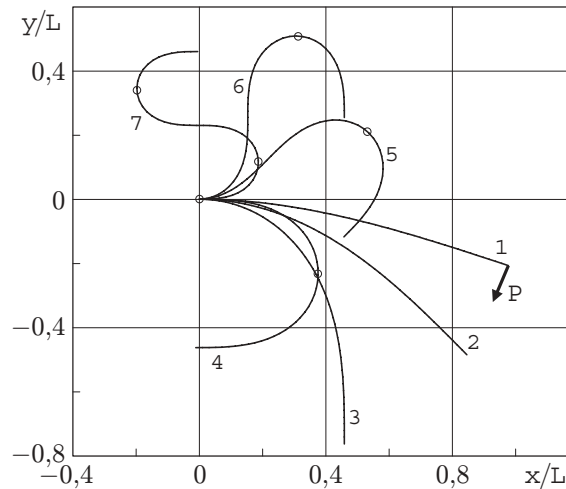


Рис. 3. Формы прогиба стержня при различных значениях поперечной следящей силы:
 первая мода ($n = 1$): 1 — $\varphi = 2\pi/5$; 2 — $\varphi = \pi/4$; 3 — $\varphi = 0$; 4 — $\varphi = -\pi/2$; вторая мода ($n = 2$): 5 — $\varphi = -\pi/4$; 6 — $\varphi = 0$; 7 — $\varphi = \pi/2$; на кривых кружками отмечены точки сжатия

Параметр φ согласно (12) изменяется в пределах $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$, задает общую кривизну стержня и определяется действующей силой P из (19). При значениях угла $\varphi = \pm\pi/2$ из (19) получим “пороговые” значения поперечной следящей силы

$$P_n/P_{кр} = (n-1)^2((4/\pi)K(\sqrt{2}/2))^2 \approx 5,6(n-1)^2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (20)$$

При превышении внешней силой порогового значения P_n происходит плавный переход на следующую моду решения с номером $n+1$.

Выражения (14), задающие координаты x, y произвольной точки стержня, имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{x}{L} &= \left[-t + 2 \frac{E(\operatorname{am} u) - E_1}{pK(\sqrt{2}/2) - F_1} \right] \cos \varphi + \sqrt{2} \frac{\sqrt{\cos \varphi} - \operatorname{cn} u}{pK(\sqrt{2}/2) - F_1} \sin \varphi, \\ \frac{y}{L} &= \sqrt{2} \frac{\sqrt{\cos \varphi} - \operatorname{cn} u}{pK(\sqrt{2}/2) - F_1} \cos \varphi - \left[-t + 2 \frac{E(\operatorname{am} u) - E_1}{pK(\sqrt{2}/2) - F_1} \right] \sin \varphi. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь $E(\varphi, k)$ — неполный эллиптический интеграл второго рода; $E_1 = E(\arcsin(\sin \varphi/2), \sqrt{2}/2)$, $p = 2n - 1$, $n = 1, 2, \dots$. При выводе выражений (21) использовалось соотношение, полученное путем преобразований с использованием свойств эллиптических функций $\operatorname{cn}(F_1, \sqrt{2}/2) = \sqrt{\cos \varphi}$, где $F_1 = F[\arcsin(\sqrt{2} \sin(\varphi/2)), \sqrt{2}/2]$.

Выражения (21) описывают в параметрическом виде ($0 \leq t \leq 1$) форму сильно изогнутого стержня под действием следящей поперечной нагрузки.

В случае поперечной следящей силы выражения для точек перегиба t_1 и точек сжатия t_0 имеют вид

$$\begin{aligned} t_1(\varphi) &= \frac{(2m+1)K(\sqrt{2}/2) - F_1}{(2n-1)K(\sqrt{2}/2) - F_1}, & t_0(\varphi) &= \frac{2mK(\sqrt{2}/2) - F_1}{(2n-1)K(\sqrt{2}/2) - F_1}, \\ & & & F_1 = F[\arcsin(2 \sin(\varphi/2)/\sqrt{2}), \sqrt{2}/2]. \end{aligned} \quad (22)$$

На первой моде ($n = 1$) имеется одна точка перегиба на конце стержня $t_1 = 1$. На второй моде ($n = 2$) у основания стержня появляется вторая точка перегиба, которая при

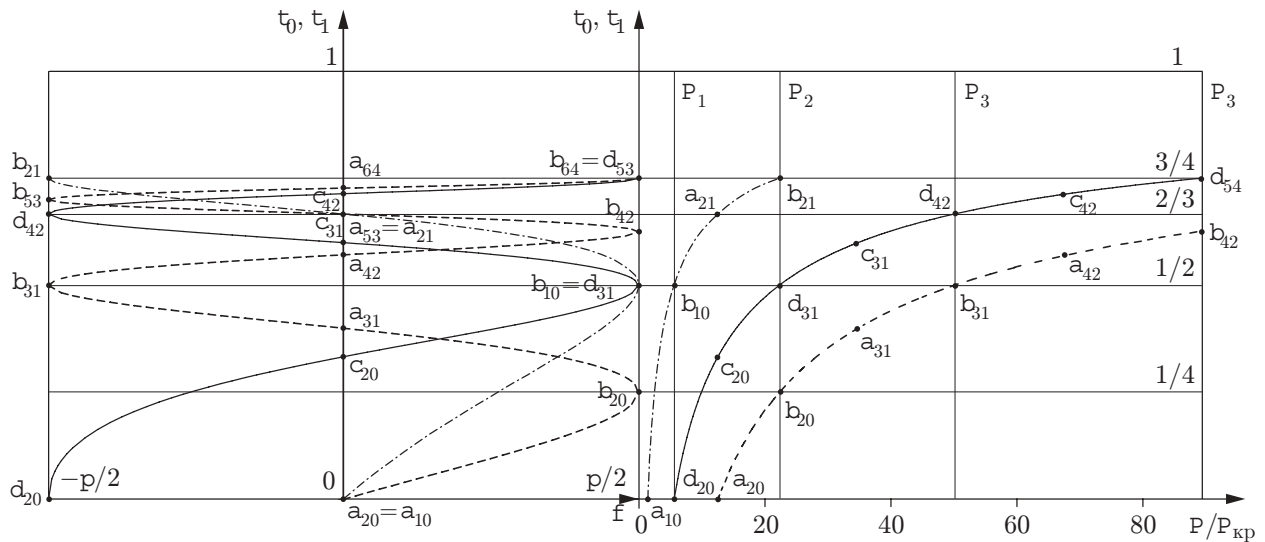


Рис. 4. Координаты первых двух точек перегиба t_1 и сжатия t_0 стержня при различных значениях поперечной следящей силы: сплошные линии — точки перегибов; штрихпунктирные и штриховые — соответственно первая и вторая точки сжатия

увеличении внешней силы плавно перемещается к концу стержня. На третьей моде ($n = 3$) у основания стержня появляется третья точка перегиба и т. д.

Первая точка сжатия возникает на первой моде у основания стержня при следящей силе, параллельной оси Ox ($\varphi = 0$), и перемещается к концу стержня. Вторая точка сжатия появляется на второй моде также у основания стержня при силе, параллельной оси Ox ($\varphi = 0$), и т. д.

Следовательно, при увеличении внешней следящей силы и переходе с одной моды на другую для первых точек перегиба и сжатия номер моды n принимает последовательные значения $1, 2, 3, \dots$, для вторых точек — $2, 3, 4, \dots$, для третьих — $3, 4, 5, \dots$ и т. д. При этом для каждой точки перегиба и сжатия целочисленный параметр m при смене моды принимает последовательные значения $0, 1, 2, \dots$ и отвечает за перемещение точек вдоль стержня.

Обозначим через a_{nm} и b_{nm} координаты точек сжатия, через c_{nm} и d_{nm} — точек перегиба при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pm\pi/2$ соответственно. При $\varphi = 0$ следящая сила параллельна оси Ox , а при $\varphi = \pm\pi/2$ — перпендикулярна к ней. Отметим, что в (22) при $\varphi = \pm\pi/2$ параметр $F_1 = \pm K(\sqrt{2}/2)$. Получим из (22):

$$\begin{aligned} a_{nm} &\equiv t_0(0) = 2m/(2n - 1), & b_{nm} &\equiv t_0(\pm\pi/2) = (2m + 1)/(2n), \\ c_{nm} &\equiv t_1(0) = (2m + 1)/(2n - 1), & d_{nm} &\equiv t_1(\pm\pi/2) = m/(n - 1). \end{aligned} \tag{23}$$

На рис. 4 приведены координаты первых двух точек перегиба и сжатия при поперечной следящей силе в зависимости: слева — от параметра φ , справа — от силы $P/P_{кр}$. Показаны характерные точки, в которых $\varphi = 0$ и $\varphi = \pm\pi/2$ в соответствии с (23). Справа вертикальные линии проведены при пороговых значениях нагрузки $P_n/P_{кр}$ согласно (20). Отметим, что в работе [8] получены аналогичные результаты для изгиба стержней при поперечной следящей нагрузке численными методами.

Изгиб стержня с заземленным и свободным концами под действием продольного сжимающего следящего нагружения. Для продольной сжимающей следящей нагрузки угол $\alpha = 0$. Тогда в соответствии с (10) параметр $k = 0$.

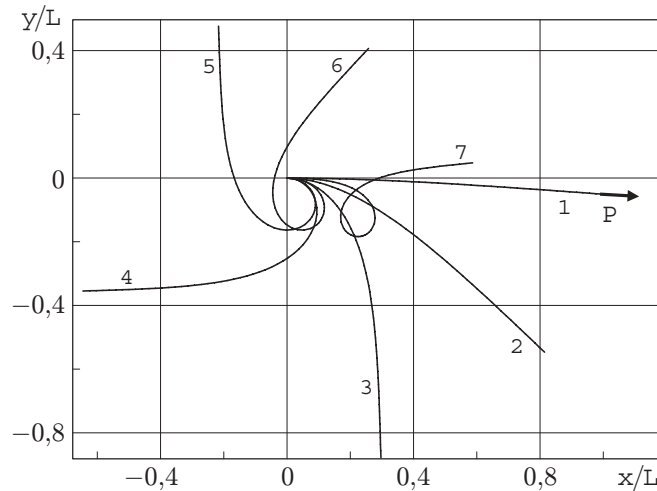


Рис. 5. Формы прогиба стержня при различных значениях продольной следящей силы:

1 — $\varphi = \pi - 0,07$; 2 — $\varphi = 3\pi/4$; 3 — $\varphi = \pi/2$; 4 — $\varphi = 0$; 5 — $\varphi = -\pi/2$; 6 — $\varphi = -3\pi/4$; 7 — $\varphi = -\pi + 0,07$

Параметр $\varphi = 0$ согласно (12). В этом случае из (11) получим предельным переходом критические нагрузки

$$P_n/P_{кр} = (2/\pi)^2(2n - 1)^2, \quad (24)$$

совпадающие с известными критическими нагрузками защемленного стержня при действии продольного сжатия силой постоянного направления [4]. Так как параметр $k = 0$, то форма стержня останется прямолинейной до тех пор, пока сила не достигнет критического значения. Далее, при превышении нагрузкой эйлера критического значения, в задаче с постоянным направлением действия силы стержень начнет изгибаться. В нашем случае по определению продольной следящей силы действующая сила не может изменить свое направление ($\varphi = 0$) и формы прогиба не могут быть найдены по условию задачи.

Изгиб стержня с защемленным и свободным концами под действием продольного растягивающего следящего нагружения. Для продольной растягивающей следящей нагрузки угол $\alpha \rightarrow \pi$. При этом в соответствии с (10) модуль $k = 1$. Спектр собственных значений согласно (11) расходится $P_n/P_{кр} \rightarrow \infty$. Форма стержня останется в этом случае прямолинейной при любых нагрузках.

При любых малых отклонениях угла следящей силы от значения π стержень будет иметь некоторые формы равновесия. На рис. 5 приведены формы прогиба стержня при малом растягивающем угле слежения $\alpha = \pi - 0,03$. В этом случае согласно (10) параметр $k = 0,9999$, а область изменения параметра $-(\pi - 0,03) \leq \varphi \leq \pi - 0,03$. Формы изгиба стержня находятся по выражениям (14).

Заключение. Использованный здесь подход работы [4] позволил получить формы прогиба гибкого стержня при нагружении следящей силой в геометрически нелинейном случае. Выражения для прогибов (14) записаны в параметрическом виде и зависят от одного параметра — угла наклона внешней силы φ , определяемого величиной нагрузки, углом слежения и модой решения. Отличие от работы [4] состоит в том, что при действии силы постоянного направления решения для прогибов зависят от другого параметра — эллиптического модуля k , определяемого величиной внешней нагрузки, углом наклона силы и модой решения. При нагружении следящей силой переход от одной моды к другой происходит плавно в отличие от нагружения силой постоянного направления.

Полученные результаты можно использовать в качестве тестовых примеров при разработке численных методов решения нелинейных уравнений изгиба стержней [8].

Авторы выражают благодарность Л. И. Шкутину, С. Г. Овчинникову и В. Г. Суховольскому за внимание и обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Вольмир А. С.** Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967.
2. **Феодосьев В. И.** Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. М.: Наука, 1973.
3. **Захаров Ю. В., Захаренко А. А.** Динамическая потеря устойчивости в нелинейной задаче о консоли // Вычисл. технологии. 1999. Т. 4, № 1. С. 48–54.
4. **Захаров Ю. В., Охоткин К. Г.** Нелинейный изгиб тонких упругих стержней // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 5. С. 124–131.
5. **Попов Е. П.** Нелинейные задачи статики тонких стержней. Л.; М.: ОГИЗ, 1948.
6. **Попов Е. П.** Теория и расчет гибких упругих стержней. М.: Наука, 1986.
7. **Левяков С. В.** Формы равновесия и вторичная потеря устойчивости прямого стержня, нагруженного продольной силой // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 2. С. 153–159.
8. **Шкутин Л. И.** Численный анализ разветвленных форм изгиба стержней // Там же. С. 141–147.
9. **Лаврентьев М. А., Ишлинский А. Ю.** Динамические формы потери устойчивости упругих систем // Докл. АН СССР. 1949. Т. 64, № 6. С. 779–782.

Поступила в редакцию 11/XII 2003 г.
