Проблемы логики и методологии науки

УДК 165.0+167.7+168.3
DOI:
10.15372/PS20190405

Л.Д. Ламберов

ПОНИМАНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА И ПРОСТОТА ОСНОВАНИЙ: НАБРОСОК МЕТОДОЛОГИИ ДЛЯ ФИЛОСОФИИ МАТЕМАТИКИ[1]

Статья посвящена исследованию возможностей применения абдуктивных рассуждений в рамках философии математики для выбора наилучшей теории в области оснований математики. Рассматриваются понятие простоты математического доказательства и связь простоты с убедительностью. В контексте оснований математики проблематизируется критерий простоты оснований, выоявляются сложности его применения, а также намечаются пути дальнейших исследований методологии философии математики.

Ключевые слова: доказательство; простота; понимание; основания математики; философия математики; методология

L.D. Lamberov

UNDERSTANDING OF PROOF AND SIMPLICITY OF FOUNDATIONS: AN OUTLINE OF THE METHODOLOGY FOR THE PHILOSOPHY OF MATHEMATICS

The article deals with the study of possibilities of applying abductive reasoning within the philosophy of mathematics to choose the best theory of foundations of mathematics. We consider the concept of simplicity of mathematical proof and its relation with convincingness. In the context of foundations of mathematics, we raise the problem of the criterion of foundations simplicity, reveal difficulties of its application, and outline ways for further studies of the methodology of the philosophy of mathematics.

---

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-011-00301.

Keywords: proof; simplicity; understanding; foundations of mathematics; philosophy of mathematics; methodology

I

В ходе развития философии математики в XX в. возникло множество разнообразных направлений[2], однако ни одно из них, как кажется, так и не привело к консенсусу и не получило признания у работающих математиков. Философским выражением стихийных убеждений работающих математиков в той или иной мере остается порой наивный, порой несколько модернизированный и утонченный платонизм [9], выражаемый в лучшем случае в виде наивной теории множеств (естественно, с оговоркой, что при необходимости всегда можно обратиться к какой-нибудь ее формализации).

Необходимо пояснить, как в настоящей статье будут пониматься основания математики и философия математики. Под основаниями математики будут подразумеваться формализованная теория, служащая фундаментом математики в том смысле, что остальные математические теории оказываются сводимыми к ней, а также ее философская мотивация, обоснование и следствия. Следует отметить, что проблематика философии математики намного шире философского анализа оснований математики. Тем не менее для удобства анализа в этой статье будет рассматриваться только один из аспектов «широкой» философии математики, а именно вопросы философского анализа и обоснования того или иного подхода к основаниям математики. Необходимо уточнить, что такой ограниченный смысл философии математики не предполагает, что представленная в статье методология не может быть применена к философии математики вообще.

Следует еще раз отметить, что если с технической стороной оснований математики что-то более или менее ясно, то сложности заключаются как раз в их философской части[3]. В каком же смысле можно говорить об определенности технической стороны оснований математики? Определенность эта, собственно, сродни любым другим математическим результатам. Основания математики состоят преимущественно в виде

---

[2] Обзор см. в [3, с. 15–48].

[3] Кстати, философская часть вовсе не обязательно должна разрабатываться профессиональными философами, с этой задачей могут справиться и сами математики. Правда, для этого требуются определенные знания и навыки, но философия (как и математика) – дело вполне человеческое, а потому доступное для усвоения всякому.

формализованных теорий, «схватывающих» те или иные философски обоснованные фундаментальные понятия математики. Допустим, если исследователь в качестве базового понятия полагает понятие множества, то он может зафиксировать смысл этого понятия в виде аксиом, например, аксиоматической теории множеств Цермело – Френкеля (ZF). Эта теория является формализацией в языке логики предикатов первого порядка представлений о том, что такое множество и как множества себя ведут (в математическом смысле).

На практике[4] большинство математиков следуют скорее тому или другому варианту наивной теории множеств, сформулированной неформально, без использования специальных формальных языков, на естественном языке. Для такого математика множество – это просто совокупность (возможно, пустая) некоторых элементов (возможно, разнородных). Однако в рамках оснований математики как формализованной теории такому бесхитростному пониманию нет места. Аксиомы формализованной теории в рамках оснований математики каждая по отдельности и их совокупности могут быть представлены как определения ключевых понятий, к которым в дальнейшем предполагается свести все здание математической науки. Когда эти аксиомы зафиксированы, когда рассматриваемая теория снабжена правилами вывода, когда имеется метаязыковой аппарат для исследования полученной формализованной теории (будь он сформулирован на формальном, «полуформальном» или даже естественном языке), технически оспаривать получаемые результаты оказывается осмысленным в контексте вопросов об адекватности формализации (например, адекватно ли они «схватывают» интуиции математиков), а также в контексте поиска ошибок в доказательствах или проверки противоречивости самой теории. Технические результаты могу служить источником, отправным пунктом для сомнения в «правильности» (где «правильность» понимается самым широким образом) исследуемой теории, если они противоречат каким-либо нашим философским или обыденным интуициям. Если в любой данной формализованной теории в рамках оснований математики получен и проверен тот или иной технический результат, то технический спор относительно него (за пределами спора об адекватности формализации) не имеет смысла. Если теорема доказана

[4] Под практикой в данном случае понимаются математические исследования, не связанные напрямую с основаниями математики. Соответственно, математиком-практиком является не только тот, кто занят прикладной математикой и различного рода вычислениями, но даже и чистый теоретик, который в своей исследовательской деятельности не занимается основаниями математики.

в рамках данной формализованной теории, если доказательство верно, то в рамках этой теории уже невозможно технически его оспорить.

Совершенно иначе обстоят дела с философской стороной оснований математики. Выбор общей концепции, ключевых понятий и системы, играющей роль «базовой логики», зависит от философской (иногда даже «философичной») аргументации и от предпочтений. Так, основания математики могут строиться с помощью теории множеств, теории типов, теории категорий. Причем выбор вовсе не ограничен исключительно тремя указанными подходами, а корреляция с более широкой философской позицией может оказаться нетривиальной или весьма запутанной. К примеру, структуралистская философия математики может мотивировать или реализовываться и в теоретико-множественных, и в теоретико-типовых (например, HoTT [12]), и в теоретико-категорных основаниях (например, ECTS У. Ловера [13]). Однако это далеко не вся неоднозначность, поскольку философская работа во многом касается скорее мотивации базовых понятий и обоснования аксиом, выбранных для их «схватывания».

Для иллюстрации последнего тезиса достаточно остановиться на аксиоматических теориях множеств и, допустим, на аксиоме/теореме пустого множества. Указанная аксиома или теорема утверждает существование множества без элементов. Такой «двойственный» статус связан с тем, что в ряде вариантов теории множеств она проходит в качестве аксиомы (например, в KP, теории множеств Крипке – Платека [16, p. 161–162]), а в некоторых других вариантах доказывается в качестве теоремы (например, и в теории множеств Цермело, и в теории множеств Цермело – Френкеля). Понятие пустого множества может, например, вводиться в разновидность теории множеств Цермело – Френкеля в качестве части аксиомы бесконечности, но в ряде других случаев ее все же предпочитают выводить из аксиомы выделения либо получать уже теорему выделения из аксиомы замещения, а потом выводить теорему о существовании пустого множества. Может показаться, что это лишь технические нюансы, однако они вполне могут быть мотивированы философскими взглядами. К примеру, некоторая конкретная разновидность ZF может формулироваться таким образом, чтобы в ней не предполагалось существование бесконечных множеств (что само по себе уже подразумевает определенную философскую позицию и влечет нетривиальные философские следствия), и в этом случае понятие пустого множества, очевидно, не может быть введено через аксиому бесконечности. Если же обратить внимание на аксиому выделения, то выведение из нее теоремы о существовании пустого множества предполагает, что объекты, описываемые теорией, однородны (например, в случае ZF и KP объектами выступают только множества и ничто другое).

Рассмотренные только что варианты теории множеств слишком близки друг к другу. По сути, они либо эквивалентны по доказательной силе ZF, либо представляют собой более слабые ее разновидности. Тем не менее даже такие небольшие нюансы могут быть мотивированы различными философскими воззрениями, порой серьезно различающимися (как принятие и непринятие существования бесконечных множеств).

II

Задачей математического исследования является обнаружение (либо построение, если исследование осуществляется в рамках конструктивистской доктрины) того, что может быть условно названо математическими «фактами». Достоверность установленных математических «фактов» во многом обусловливается доказательствами. Доказательство, собственно, является также и способом установления этих математических «фактов», когда оно выстраивается вслед за возможным интуитивным постижением некоторой кажущейся закономерности, красоты построения или какой-либо другой скорее эфемерной сущности. Таким образом, доказательство в математике выполняет исследовательскую (в смысле закрепления нечеткой интуиции) и убеждающую функции. Собственно, поскольку математикой занимаются люди, то математическое исследование и убедительность доказательств представляются человекоразмерными, т.е. сообразными с когнитивными возможностями людей. Последнее, правда, вовсе не предполагает, что если возможна математика сама по себе, то она должна быть ограничена исключительно возможностями человеческого интеллекта[5].

Доказательства[6] (в рамках человеческой математики) обладают следующими характеристиками [18]: 1) убедительность[7], 2) обозримостью, 3) формализуемостью. Они *имеют убедительную силу*, выступают сред-

---

[5] Ср. с рассуждениями П. Теллера о том, что обозримость является характеристикой человеческих математических доказательств, а вовсе не математики вообще: [17]. Вполне можно представить себе, что какие-то существа или даже артефакты имеют бóльшие математические способности, чем мы.

[6] Подробно об эпистемологической роли математических доказательств и их характеристиках см. в [4].

[7] Обзор критериев убедительности см. в [1].

ством убеждения в том, что доказанное математическое утверждение является теоремой, установленным математическим результатом. Доказательство можно обозреть, оно может быть «схвачено» умом математика, понято и проверено. Доказательство может быть представлено в формализованном виде, т.е. в виде цепочки элементарных шагов, каждый из которых либо является аксиомой некоторой формализованной системы, либо получен из предыдущих путем применения соответствующих правил вывода этой системы, причем каждый шаг выражен на специальном формальном языке. Последние две характеристики, обозримость и формализуемость, гарантируют и определяют убедительность доказательства в том смысле, что доказательство является убедительным в том случае, если его можно понять. Можно выделить две [7] разновидности обозримости: глобальную и локальную. Глобальная обозримость предполагает понимание общей структуры доказательства, понимание составляющих его крупных «разделов» (если таковые можно выделить). Локальная обозримость относится к пониманию связи между элементарными шагами доказательства. Поскольку формализация доказательства призвана сделать все переходы между элементарными шагами очевидными, постольку формализуемость касается в первую очередь локальной обозримости. Однако глобальная обозримость тоже зависит от формализуемости, так как при формализации требуются выделение ключевых понятий, ясная формулировка всех предпосылок, четкое выстраивание структуры доказательства, что, безусловно, вносит вклад в глобальную обозримость.

С характеристикой убедительности доказательства оказывается в определенном смысле связанной сложность доказательства. Доказательство, являющееся простым в смысле его длины и сложности входящих в него слов (структурная сложность), легче понять, оно обладает большей убедительностью. Кроме того, в ходе поиска наиболее простого доказательства для некоторого математического утверждения важными оказываются удобство использования и легкость восприятия (прагматическая сложность). В литературе имеются подробно разработанные методы для определения простоты доказательств [10; 11][8]. Казалось бы, прагматическая сложность касается скорее психологических аспектов, однако она вполне может быть измерена [6]. Связь убедительности с простотой состоит в том, что если цель доказательства помимо прочего

[8] Вариацию этого подхода с подробным анализом характеристик прагматической простоты и структурной простоты см. в [5].

состоит в убеждении, то более простое доказательство обладает не меньшей, а, вполне возможно, большей степенью убедительности.

Это легко прояснить на следующем радикальном примере. Допустим, имеется доказательство, сложность которого настолько велика, что оно не может быть целиком и полностью понято отдельно взятым исследователем. Такое доказательство вполне можно построить при использовании вычислительных машин (к примеру, некоторые части доказательства теоремы о четырех красках, предложенного К. Аппелем и В. Хакеном, являются необозримыми; в этом доказательстве понятны общий замысел и смысл отдельных «разделов», но в некоторых частях количество элементарных шагов и используемых правил вывода слишком велико). Допустим, далее, что предложено эквивалентное доказательство т.е. доказательство эквивалентного утверждения), имеющее такую степень сложности, которая позволяет понять его отдельно взятому исследователю. Естественно, второе доказательство будет считаться более убедительным в силу того, что оно может быть понято и проверено, чего нельзя сказать о первом доказательстве. Аналогично обстоит дело в ситуации, когда сравниваются два эквивалентных доказательства, из которых оба понятны, но одно является более простым. Более простое доказательство оказывается предпочтительным как в силу его бóльшей убедительности, так и в силу прагматических причин, а именно необходимости затратить меньшее количество ресурсов на его понимание.

III

Основной вопрос, рассматриваемый в настоящей статье, состоит в том, что, собственно, выступает в качестве критериев для предпочтения тех или иных оснований математики. Другими словами, это вопрос о том, какова методология философии математики в широком смысле.

Поскольку основания математики в настоящем исследовании понимаются как формализованная теория, разумно при выборе среди конкурирующих теорий опираться на заранее определенные принципы и критерии. В связи с тем, что речь идет о формализованных теориях, причем теориях, для исследования объектов которых вряд ли адекватно подходят экспериментальные методы естественных наук, а также таких теориях, чья мотивация и обоснование состоит скорее в философских рассмотрениях, требуется внимательно отнестись к методологии. Представляется также, что «философская игра» в контрпримеры вряд ли подходит в данном случае. Более того, такая «методология» не соответствует тому, как осуществляется работа в конкретных науках. Строго говоря, странно полагать, что один контрпример или даже несколько контрпримеров могут представлять какую-либо серьезную угрозу теории, «борьба» ведется между конкурирующими теориями, а не между теориями и контрпримерами для них. Конечно, контрпримеры могут использоваться противниками той или иной теории, но гораздо более конструктивная позиция состоит в демонстрации преимуществ (в том числе в плане объяснения или недопущения ситуации, описываемой контрпримером) одной теории пред другой.

В философии, как и в любой другой дисциплине, дóлжно опираться на свидетельства, доказательства, подтверждения[9], а «хорошая» [20, p. 66–81] философия, развивающаяся подобно науке, развивается в том числе путем абдукции и сравнения конкурирующих теорий. Сами по себе контрпримеры «играют на руку» скорее отрицательным утверждениям. Так, одна теория может содержать тезис о том, что все математические объекты являются результатами работы человеческого ума. Позиция, состоящая лишь в выдвижении контрпримеров к этому тезису, будет сводится к отрицанию того, что все математические объекты являются результатами работы человеческого ума, а это в рамках, допустим, классической логики будет равносильно тому, что некоторые математические объекты не являются результатами работы человеческого ума. Однако ученых редко интересуют подобные нюансы касательно математических объектов, гораздо больший интерес вызывают обобщающие теории. Кроме того, распространение и приумножение контрпримеров скорее приводят к усложнению теорий, изменяющихся с целью объяснить и учесть множащиеся контрпримеры. Последнее влечет за собой чрезмерное усложнение теорий, превращение их в «теории исключений», в теряющие системность и стройность монструозные конструкции.

Каким же может быть применение в философии математики абдукции[10], вывода к наилучшему объяснению? У нас уже имеются некоторые, своего рода предтеоретические, знания об основаниях математики в том смысле, что любой образованный человек имеет некое общее представление о математике и умеет оперировать с числами и некоторыми другими математическими объектами. Помимо этого «данные» для применения абдукции «поставляются» самими работающими математи-

[9] Ср.: [21, p. 208–246].

[10] Пример абдукции применительно к философии логики см. в [22]. Применительно к метафизике абдукция рассматривается в [8], а также в [14].

ками по меньшей мере в виде целых (зачастую неформальных) математических теорий и результатов. Указанные исходные данные уже могут быть объяснены тем или иным образом, т.е. могут быть сформулированы различные теории и произведено их сравнение. Тем не менее следует, конечно, указать, что фактически исследователи оснований математики находятся в более удачной ситуации, так как конкурирующие теории уже имеются, они готовы к критическому рассмотрению и сравнению. Таким образом, задача состоит в том, чтобы из множества конкурирующих теорий об основаниях математики выбрать наиболее простую и при этом наиболее объяснительно сильную и обоснованную теорию. Безусловно, в связи с конкретной спецификой предметной области абдуктивное рассуждение может иметь некоторые особенности. Так, в области оснований математики в качестве более предпочтительной (при прочих равных) может быть выбрана теория, обеспечивающая большую структурную или прагматическую простоту для эквивалентных математических доказательств (например, если при использовании какой-то теории можно будет отказаться от неудобных конструкций с классами эквивалентностей).

На критерии простоты оснований математики следует остановиться подробнее по причине ряда сложностей в его применении. Безусловно, в некоторых случаях может использоваться уже упоминавшийся ранее способ определения простоты доказательств и формул. Однако этот метод подходит только для первопорядковых логик, соответственно, без должного внимания остаются основания математики, формулируемые во второпорядковых [11] или высокопорядковых логиках. Представляется, правда, что указанный метод может быть обобщен и для второпорядковых, и для высокопорядковых логик, тем не менее трудность его применения в случае оснований математики состоит в том, что далеко не всегда та или иная теория оснований математики формулируется с помощью некоторого языка математической логики. Если с теоретико-множественными подходами в этом смысле в основном все ясно, поскольку соответствующие теории так или иначе формализуются в рамках первопорядковых (большинство) или высокопорядковых языков, то как же тогда поступать в рамках конкурирующего теоретико-типового подхода[12]?

Как кажется, в случае определения степени простоты (или скорее сложности, если мы желаем использовать более строгую и близкую

---

[11] Аргументацию в пользу применения второпорядковой логики для оснований математики см. в [15].

[12] Пример близкого к абдуктивному рассуждению философского сравнения теоретико-множественного и теоретико-типового подходов см. в [2].

к математике терминологию) для начала наиболее обещающим является поиск общего языка, на котором можно было бы максимально корректно выразить понятия и аксиомы различных подходов к основаниям математики. Уже после такого «погружения» конкурирующих оснований математики в общий язык их можно сравнивать. По сути, эта задача имеет как техническую составляющую, так и философскую, поскольку такой базовый язык должен быть достаточно гибок (чтобы можно было имитировать правила вывода, принятые в конкретных основаниях математики) и выразителен (чтобы переводимые на этот язык понятия не теряли своего содержания), а также при формулировании оснований на нем не должны искажаться основополагающие идеи рассматриваемых подходов (к примеру, бессмысленно было бы анализировать конструктивистские основания математики в классической системе). Необходимо отметить, что подобные или же близкие попытки сравнения различных оснований математики уже имеют место в рамках исследований интерактивных систем доказательств в компьютерных науках [19].

В статье Ф. Видайка [19] рассматривается «количественная» простота следующих оснований математики: ZFC, NF (*New Foundations* У. Куайна), Isabelle/Pure, HOL, CC (исчисление построений), ECC (расширенное исчисление построений Ч. Ло), предикативного варианта теории типов П. Мартин-Лефа и предложенной аксиоматизации К. Маклари топоса с хорошо выделенной точкой с натуральными числами и выбором. Все указанные системы формулируются в системе Automath Н. де Брейна с некоторыми авторскими изменениями, что совместимо с системой LF/λP, первопорядковой теорией зависимых типов.

Допусти, ZF содержит восемь аксиом (семь аксиом Э. Цермело и аксиома замещений, или преобразования, введенная А. Френкелем), шесть понятий (пустого множества, множества-пары, множества-суммы, множества-степени, бесконечного множества и операции замещения), также для ZF требуются весь аппарат первопорядковой логики (типы пропозиций, доказательств и множеств, противоречие, импликация, квантор общности, равенство, предикат принадлежности к множеству, правила введения и удаления импликации и квантора общности, закон исключенного третьего, рефлексивность равенства, понятие подстановки равных) и средства для формулирования определений. Итого получается 31 примитивное понятие (соответственно, 32 для ZFC), в то время как для HOL Light требуется 25, для CC – 30, для NF – 37 примитивных понятий и т.д. Правда, число примитивных понятий не является самым важным, поскольку, допустим, все аксиомы ZF можно объединить конъюнкцией, сократив тем самым число примитивных понятий до 24, а CC можно записать в виде PTS (т.е. как чистую систему типов), что весьма серьезно ее упростит, но в этом случае заниматься математикой в ней будет довольно трудно. Гораздо интереснее сравнить количество символов, необходимых для выражения соответствующих понятий в LF/λP. Например, для ZF требуется около 2,4 тыс. символов, а для CC – около 2,7 тыс. Кроме того, в статье Ф. Видайка проводится сравнение некоторых возможностей оснований математики: классичности, поддержки аксиомы выбора (или наличия аналогичного понятия), возможности выразить «всю математику». Основные же выводы статьи Ф. Видайка таковы: 1) все рассмотренные основания математики относительно одинаковы по их простой «количественной» сложности; 2) количество примитивных понятий в любом варианте оснований математики чрезмерно велико.

Однако следует отметить (и Ф. Видайк с этим согласен), что длина и простота далеко не всегда совпадают, вполне возможны короткие, но (в психологическом смысле), сложные доказательства. Конечно, в ряде случаев длину определить значительно легче, чем простоту. Представляется, что последнее обстоятельство релевантно не только при работе с основаниями математики, но и для рассмотренных ранее понятий структурной и прагматической простоты доказательств и формул.

IV

В заключение хотелось бы еще раз подчеркнуть, что в рамках философии математики для сравнения различных (в том числе разнородных) оснований математики следует обратиться к абдуктивным рассуждениям в противовес «логике контрпримеров» (в смысле опровержения философской концепции оппонентов путем выдвижения контрпримера). Критерии для выбора «наилучшего объяснения» (по сути, теории), релевантные основаниям математики, еще предстоит выявить и исследовать. В настоящей статье особое внимание было уделено простоте доказательств и формул. Предполагается, что более простое доказательство является более убедительным в силу большей его доступности для проверки. Тем не менее в настоящее время этот метод недостаточен для анализа различного рода теорий в области оснований математики, поскольку он определен исключительно для первопорядковых языков. Кроме того, само по себе понятие простоты в области оснований математики следует отделять от понятия длины (где под длиной может подразумеваться как количество аксиом, правил вывода и базовых понятий, так и количество символов, необходимое для записи аксиом, правил вывода и базовых понятий на некотором формальном языке). Понятия простоты, длины, обозримости и интуитивной понятности тесно переплетены друг с другом, а когда речь идет о сравнении разнородных теорий в области оснований математики, то «спутанность» этих понятий не позволяет адекватно строить абдуктивные рассуждения.

Литература

1. *Белякин Н.В., Черепанов Е.М.* Об основных критериях убедительности доказательства // Философия науки. – 2010. – №3. – С. 31–44.

2. *Ламберов Л.Д.* Основания математики: теория множеств vs. теория типов // Философия науки. – 2017. – №1. – С. 41–60.

3. *Целищев В.В.* Философия математики. Ч. 1. – Новосибирск: Наука, 2002. – 212 с.

4. *Целищев В.В.* Эпистемология математического доказательства. – Новосибирск: Параллель, 2006. – 212 с.

5. *Черепанов Е.М.* Простота как критерий убедительности доказательства // Философия науки. – 2010. – №1. – С. 91–101.

6. *Черепанов Е.М.* Содержательность, информативность и простота // Философия науки. – 2006. – №2. – С. 52–64.

7. *Bassler O.B.* The Surveyability of Mathematical Proof: A Historical Perspective // Synthese. – 2006. – Vol. 148, No. 1. – P. 99–133.

8. *Bigelow J.* Quine, Mereology, and Inference to the Best Explanation // Logique et Analyse. – 2010. – Vol. 53, No. 212. – P. 465–482.

9. *Davis P., Hersh R., Marchisotto A.E.* The Mathematical Experience. – Boston: Birkhäuser, 1995. – 487 p.

10. *Goodman N.* The Structure of Apperance. – Boston: Reidel, 1977. – 294 p.

11. *Goodman N.* The Test of Simplicity // Science. – 1958. – Vol. 128, No. 3331. – P. 1064–1069.

12. *Homotopy* Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics / The Univalent Foundations Program; Institute for Advanced Study. – 2013. – URL: https://homotopytypetheory.org/book [Дата обращения: 10.08.2019]

13. *Lawvere W.* An Elementary Theory of the Category of Sets // Proceedings of the National Academy of Science of the USA. – 1956. – 52. – P. 1506–1511.

14. *Shalkowski S.* IBE, GMR, and Metaphysical Projects // Modality: Metaphysics, Logic, and Epistemology / ed. by B. Hale and A. Hoffmann. – Oxford: Oxford University Press, 2010. – P. 169–187.

15. *Shapiro S.* Foundations without Foundationalism. A Case for Second-Order Logic. – N.Y.: Oxford University Press, 2006. – 304 p.

16. *Smullyan R.M.* Meeting of the Association for Symbolic Logic // Journal of Symbolic Logic. – 1964. – Vol. 29, No. 3. – P. 150–162.

17. *Teller P.* Computer Proof // The Journal of Philosophy. – 1980. – Vol. 77, No. 12. – P. 797–803.

18. *Tymoczko T.* The Four-Color Theorem and Its Philosophical Significance // The Journal of Philosophy. – 1979. – Vol. 76, No. 2. – P. 57-83.

19. *Wiedijk F.* Is ZF a Hack? Comparing the Complexity of Some (Formalist Interpretations of) Foundational Systems for Mathematics // Journal of Applied Logic. – 2006. – Vol. 4, No. 4. – pp. 622–645.

20. *Williamson T.* Doing Philosophy. – Oxford: Oxford University Press, 2018. – 176 p.

21. *Williamson T.* Philosophy of Philosophy. – Oxford: Blackwell, 2007. – 346 p.

22. *Williamson T.* Semantic Paradoxes and Abductive Methodology // Reflections on the Liar / ed. by B. Armour-Garb. – N. Y.: Oxford University Press, 2017. – P. 325–346.

References

1. *Belyakin, N.V. & E.M. Cherepanov.* (2010). Ob osnovnykh kriteriyakh ubeditelnosti dokazatelstva [On fundamental criteria of proof convincingness]. Filosofiya nauki [Philosophy of Science], 3 (?), 31–44.

2. *Lamberov, L.D.* (2017). Osnovaniya matematiki: teoriya mnozhestv vs. teoriya tipov [Foundations of mathematics: the set theory vs. the type theory]. Filosofiya nauki [Philosophy of Science], 1 (?), 41–60.

3. *Tselishchev, V.V.* (2002). Filosofiya matematiki [Philosophy of Mathematics], Part 1. Novosibirsk, Nauka Publ., 212.

4. *Tselishchev, V.V.* (2006). Epistemologiya matematicheskogo dokazatelstva [Epistemology of Mathematical Proof]. Novosibirsk, Parallel Publ., 212.

5. *Cherepanov, E.M.* (2010). Prostota kak kriteriy ubeditelnosti dokazatelstva [Simplicity as a criterion of proving validity]. Filosofiya nauki [Philosophy of Science], 1 (?), 91–101.

6. *Cherepanov, E.M.* (2006). Soderzhatelnost, informativnost i prostota [Contensiveness, factuality, and simplicity]. Filosofiya nauki [Philosophy of Science], 2 (?), 52–64.

7. *Bassler, O.B.* (2006). The surveyability of mathematical proof: A historical perspective. Synthese, Vol. 148, No. 99–133.

8. *Bigelow, J.* (2010). Quine, mereology, and inference to the best explanation. Logique et Analyse, Vol. 53, No. 212, 465–482.

9. *Davis, P., R. Hersh & A.E. Marchisotto.* (1995). The Mathematical Experience. Boston, Birkhäuser, 487.

10. *Goodman, N.* (1977). The Structure of Apperance. Boston, Reidel, 294.

11. *Goodman, N.* (1958). The test of simplicity. Science, Vol. 128, No. 3331, 1064–1069.

12. *Homotopy* Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics. (2013). The Univalent Foundations Program, Institute for Advanced Study. Available at: https://homotopytypetheory.org/book (date of access: 10.08.2019).

13. *Lawvere, W.* (1956). An elementary theory of the category of sets. Proceedings of the National Academy of Science of the USA, 52, 1506–1511.

14. *Shalkowski, S.* (2010). IBE, GMR, and metaphysical projects. In: Hale, B. & A. Hoffmann (Eds.). Modality: Metaphysics, Logic, and Epistemology. Oxford, Oxford University Press, 169–187.

15. *Shapiro, S.* (2006). Foundations without Foundationalism: A Case for Second-Order Logic. New York, Oxford University Press, 304.

16. *Smullyan, R.M.* (1964). Meeting of the Association for Symbolic Logic. Journal of Symbolic Logic, Vol. 29, No. 3, 150–162.

17. *Teller, P.* (1980). Computer proof. The Journal of Philosophy, Vol. 77, No. 12, 797–803.

18. *Tymoczko, T.* (1979). The four-color theorem and its philosophical significance. The Journal of Philosophy, Vol. 76, No. 2, 57–83.

19. *Wiedijk, F.* (2006). Is ZF a hack? Comparing the complexity of some (formalist interpretations of) foundational systems for mathematics. Journal of Applied Logic, Vol. 4, No. 4, 622–645.

20. *Williamson, T.* (2018). Doing Philosophy. Oxford, Oxford University Press, 176.

21. *Williamson, T.* (2007). Philosophy of Philosophy. Oxford, Blackwell, 346.

22. *Williamson, T.* (2017). Semantic paradoxes and abductive methodology. In: Armour-Garb, B. (Ed.). Reflections on the Liar. New York, Oxford University Press, 325–346.

Информация об авторе

Ламберов Лев Дмитриевич – к. филос. н., Уральский федеральный университете, доцент кафедры онтологии и теории познания, (ул. Мира, 19, Екатеринбург, 620002, Россия). lev.lamberov@urfu.ru

Information about the author

Lamberov, Lev Dmitrievich – Candidate of Sciences (Philosophy), Associate Professor of the Chair of Ontology and the Theory of Knowledge, Ural Federal University (19, Mira st., Yekaterinburg, 620002, Russia, e-mail: lev.lamberov@urfu.ru).

Дата поступления 26.08.2019