УДК 532.5.013

О СОВМЕСТНОМ ОДНОНАПРАВЛЕННОМ ДВИЖЕНИИ ДВУХ ВЯЗКИХ ТЕПЛОПРОВОДНЫХ ЖИДКОСТЕЙ В ТРУБЕ

В. К. Андреев

Институт вычислительного моделирования СО РАН, 660036 Красноярск
Сибирский федеральный университет, 660041 Красноярск
E-mail: andr@icm.krasn.ru

Изучено инвариантное решение задачи о совместном движении двух вязких несмешивающихся и имеющих общую поверхность раздела теплопроводных жидкостей в цилиндрической трубе под действием нестационарного перепада давления. Задача сводится к сопряженной начально-краевой задаче для параболических уравнений. Получены априорные оценки возмущений скоростей и температур. Определено стационарное состояние системы и доказано, что если в одной из жидкостей градиент давления достаточно быстро приближается к нулю, то и возмущения всех величин стремятся к нулю. Показано, что если градиент давления имеет ненулевой предел, то решение выходит на стационарный режим. В этом случае поля скоростей в пределе такие же, как у сопряженного течения Пуазейля, а температура представляется в виде полинома четвертого порядка по радиальной координате.

Ключевые слова: вязкая теплопроводная жидкость, поверхность раздела, стационарное течение.

1. Основные уравнения и граничные условия. Как известно, определение поля скорости при однонаправленном движении вязкой жидкости в круглой трубе сводится к решению линейной начально-краевой задачи для параболического уравнения [1. С. 455; 2. С. 233]. При этом решение находится в виде конечных формул (например, стационарное течение Пуазейля) либо в виде рядов по функциям Бесселя. В данной работе изучается сопряженная начально-краевая задача, возникающая при однонаправленном движении двух вязких теплопроводных жидкостей с общей поверхностью раздела в цилиндрической трубе под действием нестационарного перепада давления. Заметим, что для случая плоских слоев эта задача изучена в [3].

В отсутствие массовых сил система уравнений осесимметричного движения вязкой теплопроводной жидкости, записанная в цилиндрической системе координат, имеет вид

$$\begin{gathered} u_t + uu_r + wu_z - v^2/r = -p_r/\rho + \nu(\Delta u - u/r^2), \\ w_t + uw_r + ww_z = -p_z/\rho + \nu\,\Delta w, \\ u_r + u/r + w_z = 0, \qquad \theta_t + u\theta_r + w\theta_z = \chi\,\Delta\theta. \end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь $u(r,z,t)$, $w(r,z,t)$ — проекции вектора скорости на оси r, z соответственно; $p(r,z,t)$ — давление; $\theta(r,z,t)$ — отклонение температуры от ее равновесного значения θ_0; ν, ρ, χ — кинематическая вязкость, плотность и температуропроводность; $\Delta = \partial^2/\partial r^2 + r^{-1}\,\partial/\partial r + \partial^2/\partial z^2$ — оператор Лапласа.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08-01-00762) и в рамках Междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН № 65.

Система (1.1) допускает однопараметрическую подгруппу непрерывных преобразований, соответствующую оператору $\partial/\partial z + A\,\partial/\partial\theta - \rho f(t)\,\partial/\partial p$ (A — постоянная; $f(t) \in C^\infty$ — произвольная функция). Инвариантное решение следует искать в виде

$$u = u(r,t), \qquad w = w(r,t), \qquad p = -\rho f(t)z + D(r,t), \qquad \theta = Az + T(r,t).$$

Из четвертого уравнения системы (1.1) следует, что $u(r,t) = g(t)/r$ с произвольной функцией $g(t)$, которая далее полагается равной нулю. Тогда из первого уравнения в (1.1) следует, что D есть функция только времени. С учетом сделанных предположений решение представляется в виде

$$u = 0, \qquad w = w(r,t), \qquad p = -\rho f(t)z + D(t), \qquad \theta = Az + T(r,t). \tag{1.2}$$

Используем решение (1.2) для описания однонаправленного движения двух вязких теплопроводных жидкостей в круглой цилиндрической трубе радиусом b. Пусть одна из жидкостей занимает область $0 \leqslant r \leqslant a$, $|z| < \infty$, а другая — цилиндрический слой $a \leqslant r \leqslant b$, $|z| < \infty$, $w_j(r,t)$ — осевая скорость ($j = 1,2$), $p_j = -\rho_j f_j(t)z + D_j(t)$ — давление, $\theta_j = A_j z + T_j(r,t)$ — распределение температуры. Предположим, что коэффициент поверхностного натяжения на границе раздела $r = a$ линейно зависит от температуры:

$$\sigma(\theta) = \sigma_0 - \varkappa_1(\theta - \theta_0) \tag{1.3}$$

($\varkappa_1 > 0$ — постоянная).

На поверхности раздела выполнены условия [4]

$$(P_2 - P_1)\boldsymbol{n} = 2\sigma H\boldsymbol{n} + \nabla_\Gamma\sigma; \tag{1.4}$$

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_2, \qquad \theta_1 = \theta_2, \qquad k_1\,\frac{\partial\theta_1}{\partial n} = k_2\,\frac{\partial\theta_2}{\partial n}, \tag{1.5}$$

где P_j — тензоры напряжений:

$$P_j = \begin{pmatrix} -p_j & 0 & \mu_j w_{jr} \\ 0 & -p_j & 0 \\ \mu_j w_{jr} & 0 & -p_j \end{pmatrix}$$

в представлении решения (1.2); H — средняя кривизна поверхности раздела; $\nabla_\Gamma = \boldsymbol{n} - \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\nabla)$ — поверхностный градиент; k_j — теплопроводности жидкостей. Из равенств $\boldsymbol{n} = (1,0,0)$, $H = \sigma/(2a)$ следует, что при $r = a$ соотношение (1.4) эквивалентно двум соотношениям

$$p_2 - p_1 = \frac{\sigma}{a}, \qquad \mu_2 w_{2r} - \mu_1 w_{1r} = \frac{\partial\sigma}{\partial z}. \tag{1.6}$$

Первое из этих соотношений есть формула Лапласа: разность давлений на криволинейной поверхности уравновешивается капиллярными силами. Второе соотношение означает, что разность касательных напряжений уравновешивается термокапиллярными силами, возникающими вследствие изменения поверхностного натяжения вдоль границы раздела.

Нетрудно показать, что при $r = a$ из равенств (1.5) следуют граничные условия

$$w_1(a,t) = w_2(a,t), \qquad T_1(a,t) = T_2(a,t), \qquad k_1\,\frac{\partial T_1(a,t)}{\partial r} = k_2\,\frac{\partial T_2(a,t)}{\partial r} \tag{1.7}$$

и, кроме того,

$$A_1 = A_2 \equiv A. \tag{1.8}$$

В свою очередь, с учетом (1.2), (1.3), (1.8) из (1.6) получаем

$$\begin{gathered} f_2(t) = \rho f_1(t) - h/(\rho_2 a), \qquad h \equiv -\varkappa_1 A, \qquad \rho = \rho_1/\rho_2, \\ D_2(t) = D_1(t) + [\sigma_0 - \varkappa_1(T_1(a,t) - \theta_0)]/a; \end{gathered} \tag{1.9}$$

$$\mu_2 w_{2r}(a,t) - \mu_1 w_{1r}(a,t) = h. \tag{1.10}$$

На твердой стенке ($r = b$) задаются граничные условия

$$w_2(b,t) = 0, \qquad T_2(b,t) = 0. \tag{1.11}$$

На оси симметрии ставятся условия ограниченности

$$|w_1(0,t)| < \infty, \qquad |T_1(0,t)| < \infty. \tag{1.12}$$

С учетом представления (1.2) решения системы (1.1) запишем уравнения для искомых функций $w_j(r,t)$, $T_j(r,t)$:

$$w_{jt} = f_j(t) + \nu_j(w_{jrr} + w_{jr}/r); \tag{1.13}$$

$$T_{jt} = \chi_j(T_{jrr} + T_{jr}/r) - Aw_j. \tag{1.14}$$

В (1.13), (1.14) при $j = 1$ переменная r изменяется в диапазоне $0 < r < a$, а при $j = 2$ — в диапазоне $a < r < b$. Таким образом, требуется решить задачу (1.13), (1.14) с граничными условиями (1.7), (1.10)–(1.12) и начальными условиями

$$w_j(r,0) = 0, \qquad T_j(r,0) = 0. \tag{1.15}$$

Давление восстанавливается по формулам $p_j(r,t) = -\rho_j f_j(t) z + D_j(t)$, причем функции $f_1(t)$, $f_2(t)$ и $D_1(t)$, $D_2(t)$ связаны равенствами (1.9) и, кроме того, функции $f_1(t)$ и $D_1(t)$ должны быть заданы.

Замечание 1. При $t = 0$ в силу первого начального условия (1.15) граничное условие (1.10) претерпевает разрыв первого рода.

Далее предполагается $h \equiv 0$, т. е. поверхностное натяжение не зависит от температуры и движение происходит только за счет перепада давления.

2. Стационарное решение. В случае стационарного решения все искомые функции не зависят от времени. Обозначим эти функции через $w_j^0(r)$, $T_j^0(r)$. Кроме того, $f_1(t) = f_1^0 = \text{const}$, $D_1(t) = D_1^0 = \text{const}$. При $f_2^0 = \rho f_1^0$ стационарное решение задачи (1.13), (1.14), (1.7), (1.10)–(1.12) имеет вид

$$\begin{gathered} w_1^0 = \frac{f_1^0}{4\nu_1}\Big[(b^2 - a^2)\mu + a^2\Big(1 - \frac{r^2}{a^2}\Big)\Big], \qquad w_2^0 = \frac{f_1^0 b^2 \mu}{4\nu_1}\Big(1 - \frac{r^2}{b^2}\Big), \qquad \mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \\ T_1^0 = \frac{Ar^2 f_1^0}{16\chi_1\nu_1}\Big(a^2 + \mu(b^2 - a^2) - \frac{r^2}{4}\Big) + C_1, \qquad T_2^0 = \frac{Ar^2 \rho f_1^0}{16\chi_2\nu_2}\Big(b^2 - \frac{r^2}{4}\Big) + C_2 \ln r + C_3, \end{gathered} \tag{2.1}$$

где

$$C_1 = \frac{a^4 f_1^0 A}{8\nu_1\chi_1}\Big\{-\frac{3\mu\chi}{8}\Big(\frac{b}{a}\Big)^4 + \Big[k\Big(\frac{1}{2} + \mu\,\frac{b^2 - 1}{a^2}\Big) + \mu\chi\Big(\frac{1}{2} - \frac{b^2}{a^2}\Big)\Big]\ln\frac{a}{b} - \\ - \frac{\mu}{2}\Big[\frac{b^2}{a^2} - 1 + \chi\Big(\frac{1}{4} - \frac{b^2}{a^2}\Big)\Big] - \frac{3}{8}\Big\},$$

$$C_2 = \frac{a^2 f_1^0 A}{8\chi_1}\Big[\frac{a^2}{\nu_1} + \frac{(b^2 - a^2)\rho}{\nu_2} + \frac{\chi\rho}{\nu_2}\Big(\frac{a^2}{2} - b^2\Big)\Big],$$

$$C_3 = \frac{f_1^0 A}{8\chi_1}\Big\{-\frac{3\chi b^4\rho}{8\nu_2} - a^2\Big[k\Big(\frac{a^2}{2\nu_1} + \frac{b^2-a^2}{\nu_2}\Big) + \frac{\chi}{\nu_2}\Big(\frac{a^2}{2} - b^2\Big)\rho\Big]\ln b\Big\},$$

$$\chi = \frac{\chi_1}{\chi_2}, \qquad k = \frac{k_1}{k_2}, \qquad \mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \qquad \rho = \frac{\rho_1}{\rho_2}.$$

3. Априорная оценка поля скоростей. Следует отметить, что при заданной функции $f_1(t)$ задачи для w_j, T_j $(j = 1, 2)$ решаются последовательно (см. (1.7)–(1.15)). Начально-краевая задача для искомых функций $w_j(r,t)$ имеет вид

$$w_{1t} = \nu_1(w_{1rr} + w_{1r}/r) + f_1(t), \qquad 0 < r < a; \tag{3.1}$$

$$w_{2t} = \nu_2(w_{2rr} + w_{2r}/r) + \rho f_1(t), \qquad a < r < b; \tag{3.2}$$

$$w_1(r,0) = 0, \qquad w_2(r,0) = 0; \tag{3.3}$$

$$|w_1(0,t)| < \infty; \tag{3.4}$$

$$w_2(b,t) = 0; \tag{3.5}$$

$$w_1(a,t) = w_2(a,t), \qquad \mu_2 w_{2r}(a,t) - \mu_1 w_{1r}(a,t) = 0. \tag{3.6}$$

Умножая уравнение (3.1) на $\rho_1 r w_1$ ((3.2) на $\rho_2 r w_2$) и интегрируя его по частям по r от нуля до a (от a до b), с использованием условий ограниченности (3.4) и прилипания (3.5) получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{1}{2}\,\rho_1\int\limits_0^a r w_1^2\,dr = \mu_1 a w_1(a,t) w_{1r}(a,t) - \mu_1\int\limits_0^a r w_{1r}^2\,dr + \rho_1 f_1(t)\int\limits_0^a r w_1\,dr; \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{1}{2}\,\rho_2\int\limits_a^b r w_2^2\,dr = -\mu_2 a w_2(a,t) w_{2r}(a,t) - \mu_2\int\limits_a^b r w_{2r}^2\,dr + \rho f_1(t)\int\limits_a^b r w_2\,dr. \tag{3.8}$$

Суммируя (3.7), (3.8), находим соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t}\,E + \mu_1\int\limits_0^a r w_{1r}^2\,dr + \mu_2\int\limits_a^b r w_{2r}^2\,dr = \rho_1 f_1(t)\Big(\int\limits_0^a r w_1\,dr + \int\limits_a^b r w_2\,dr\Big), \tag{3.9}$$

где $E(t)$ — кинетическая энергия двух слоев:

$$E(t) = \frac{1}{2}\Big(\rho_1\int\limits_0^a r w_1^2\,dr + \rho_2\int\limits_a^b r w_2^2\,dr\Big). \tag{3.10}$$

При выводе (3.9) были учтены граничные условия (3.6).

Из (3.9) следует единственность решения задачи (3.1)–(3.6), поскольку при $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ получаем $E(t) = 0$ и, значит, $w_1 = w_2 = 0$.

В правой части (3.9) выражение в скобках допускает оценку сверху

$$\Big(\int\limits_0^a r\,dr\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_0^a r w_1^2\,dr\Big)^{1/2} + \Big(\int\limits_a^b r\,dr\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_a^b r w_2^2\,dr\Big)^{1/2} \leqslant C_1\sqrt{E(t)} \tag{3.11}$$

с постоянной

$$C_1 = \sqrt{2}\,\max\Big(\frac{a}{\sqrt{\rho_1}}, \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{\sqrt{\rho_2}}\Big), \tag{3.12}$$

поскольку для неотрицательных x, y $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leqslant \sqrt{2(x+y)}$.

Решение задачи (3.1)–(3.6) удовлетворяет также тождеству

$$\rho_1\int\limits_0^t\int\limits_0^a r\Big[w_{1t}^2+\nu_1^2\Big(w_{1rr}+\frac{1}{r}\,w_{1r}\Big)^2\Big]\,dr\,dt+\rho_2\int\limits_0^t\int\limits_a^b r\Big[w_{2t}^2+\nu_2^2\Big(w_{2rr}+\frac{1}{r}\,w_{2r}\Big)^2\Big]\,dr\,dt+$$
$$+\mu_1\int\limits_0^a rw_{1r}^2\,dr+\mu_2\int\limits_a^b rw_{2r}^2\,dr=\frac{\rho_1}{2}\,[a^2+\rho(b^2-a^2)]\int\limits_0^t f_1^2(t)\,dt, \qquad (3.13)$$

которое выводится путем возведения в квадрат уравнений $w_{jt}-\nu_j(w_{jrr}+w_{jr}/r)=f_j(t)$ и интегрирования их по r и по времени. Поэтому, если сходится интеграл

$$\int\limits_0^\infty f_1^2(t)\,dt=C_2^2, \qquad (3.14)$$

то имеем

$$\int\limits_0^a rw_{1r}^2\,dr\leqslant\frac{[a^2+\rho(b^2-a^2)]C_2^2}{2\nu_1},\qquad \int\limits_a^b rw_{2r}^2\,dr\leqslant\frac{\rho_1[a^2+\rho(b^2-a^2)]C_2^2}{2\mu_2}. \qquad (3.15)$$

Далее потребуется следующая

Лемма. *Имеет место неравенство*

$$\int\limits_0^a rw_1^2\,dr+\int\limits_a^b rw_2^2\,dr\leqslant M_0\Big(\mu_1\int\limits_0^a rw_{1r}^2\,dr+\mu_2\int\limits_a^b rw_{2r}^2\,dr\Big) \qquad (3.16)$$

с постоянной M_0, не зависящей от w_j и являющейся решением вариационной задачи

$$M_0=\sup_{v_1,v_2\in V}\Big[\Big(\int\limits_0^a rv_1^2\,dr+\int\limits_a^b rv_2^2\,dr\Big)\Big/\Big(\mu_1\int\limits_0^a rv_{1r}^2\,dr+\mu_2\int\limits_a^b rv_{2r}^2\,dr\Big)\Big].$$

Множество V является подпространством $W_2^1(r;0,a)\times W_2^1(r;a,b)$, причем для v_1, v_2 выполнены граничные условия (3.3)–(3.6).

Доказательство приведено в работе [5]. Обозначим $a_1=b/a$, $a_2=\sqrt{\mu_1/\mu_2}$, $x=a/\sqrt{\mu_1 M_0}$. Тогда M_0 (точнее, x) есть корень трансцендентного уравнения

$$J_0(x)[J_1(a_2x)Y_0(a_1a_2x)-J_0(a_1a_2x)Y_1(a_2x)]+$$
$$+a_2J_1(x)[J_0(a_1a_2x)Y_0(a_2x)-J_0(a_2x)Y_0(a_1a_2x)]=0, \qquad (3.17)$$

где J_k, Y_k $(k=0,1)$ — функции Бесселя первого и второго рода. Уравнение (3.17) имеет положительные корни [5]. Пусть $x_0=x_0(a_1,a_2)$ — наименьший положительный корень уравнения (3.17). Тогда $M_0=a^2/(\mu_1x_0^2)$ есть точное значение постоянной в неравенстве (3.16).

Используя неравенство (3.16), получаем неравенство

$$\mu_1\int\limits_0^a rw_{1r}^2\,dr+\mu_2\int\limits_a^b rw_{2r}^2\,dr\geqslant 2\delta E, \qquad (3.18)$$

где

$$\delta=\frac{1}{M_0}\,\min\Big(\frac{1}{\rho_1},\frac{1}{\rho_2}\Big). \qquad (3.19)$$

Из (3.9)–(3.12) и (3.18), (3.19) следует неравенство $dE/dt + 2\,\delta E \leqslant C_1\rho_1|f_1(t)|\sqrt{E}$, из которого получаем

$$E \leqslant \frac{C_1^2\rho_1^2}{4}\Big(\int\limits_0^t |f_1(\tau)|\,\mathrm{e}^{\delta\tau}\,d\tau\Big)^2\,\mathrm{e}^{-2\delta t}.$$

Следовательно, если сходится интеграл

$$\int\limits_0^\infty |f_1(\tau)|\,\mathrm{e}^{\delta\tau}\,d\tau = C_3, \tag{3.20}$$

то

$$\int\limits_0^a rw_1^2\,dr \leqslant \frac{\rho_1 C_1^2 C_3^2\,\mathrm{e}^{-2\delta t}}{2}, \qquad \int\limits_a^b rw_2^2\,dr \leqslant \frac{\rho_1^2 C_1^2 C_3^2\,\mathrm{e}^{-2\delta t}}{2\rho_2}. \tag{3.21}$$

Замечание 2. Из сходимости интеграла (3.20) следует сходимость интеграла (3.14).

Исследуем поведение функции $w_j(r,t)$ при $t \to \infty$. С учетом оценок (3.15), (3.21) для $w_2(r,t)$ справедливо неравенство

$$w_2^2(r,t) = \Big|\int\limits_r^b (w_2^2)_r\,dr\Big| \leqslant 2\int\limits_a^b |w_2|\,|w_{2r}|\,dr = 2\int\limits_a^b \frac{1}{r}\sqrt{r}\,|w_2|\sqrt{r}\,|w_{2r}|\,dr \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{a}\Big(\int\limits_a^b rw_2^2\,dr\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_a^b rw_{2r}^2\,dr\Big)^{1/2} \leqslant C_4\,\mathrm{e}^{-\delta t},$$

где

$$C_4 = \rho_1 C_1 C_2 C_3\sqrt{(\rho/\mu_2)[a^2 + \rho(b^2 - a^2)]/a}\,.$$

Следовательно,

$$|w_2(r,t)| \leqslant \sqrt{C_4}\,\mathrm{e}^{-\delta t/2} \tag{3.22}$$

при любых $r \in [a,b]$. Однако с помощью подобных рассуждений невозможно получить оценку $|w_1(r,t)|$. В этом случае из (3.22) и первого равенства в (3.6) находим

$$|w_1(a,t)| = |w_2(a,t)| \leqslant \sqrt{C_4}\,\mathrm{e}^{-\delta t/2}\,.$$

Если функцию $w_1(a,t)$ считать известной, то решение начально-краевой задачи для функции $w_1(r,t)$

$$w_{1t} = \nu_1(w_{1rr} + w_{1r}/r) + f_1(t), \qquad 0 < r < a,$$
$$w_1(r,0) = 0, \qquad |w_1(0,t)| < \infty, \qquad w_1(r,t)\big|_{r=a} = w_1(a,t)$$

имеет вид [6. С. 74]

$$w_1(r,t) = \frac{2\nu_1}{a^2}\sum_{n=1}^\infty \frac{\mu_n J_0(\mu_n r/a)}{J_1(\mu_n)}\int\limits_0^t w_1(a,\tau)\,\mathrm{e}^{-\nu_1\mu_n^2(t-\tau)/a^2}\,d\tau +$$

$$+\frac{2}{a}\sum_{n=1}^\infty \frac{J_0(\mu_n r/a)}{\mu_n J_1(\mu_n)}\int\limits_0^t f_1(\tau)\,\mathrm{e}^{-\nu_1\mu_n^2(t-\tau)/a^2}\,d\tau, \tag{3.23}$$

где μ_n — нули функции Бесселя J_0.

Для интегралов в (3.23) справедливы оценки

$$\begin{gathered}\Big|\int\limits_0^t w_1(a,\tau)\,\mathrm{e}^{-\nu_1\mu_n^2(t-\tau)/a^2}\,d\tau\Big| \leqslant \frac{2a^2\sqrt{C_4}}{2\nu_1\mu_n^2-a^2\delta}\big(\,\mathrm{e}^{-\delta t/2}-\mathrm{e}^{-\nu_1\mu_n^2 t/a^2}\,\big),\\ \Big|\int\limits_0^t f_1(\tau)\,\mathrm{e}^{-\nu_1\mu_n^2(t-\tau)/a^2}\,d\tau\Big| \leqslant \frac{a^2N}{\nu_1\mu_n^2-a^2\delta}\big(\,\mathrm{e}^{-\delta t}-\mathrm{e}^{-\nu_1\mu_n^2 t/a^2}\,\big),\end{gathered} \tag{3.24}$$

поскольку в силу (3.20) $|f_1(t)|\,\mathrm{e}^{\delta t}\leqslant N$ (N — константа).

Из (3.23), (3.24) следует, что

$$|w_1(r,t)|\leqslant N_1\begin{cases}\mathrm{e}^{-\delta t/2}, & \delta\leqslant 2\mu_1^2\nu_1/a^2,\\ \mathrm{e}^{-\mu_1^2\nu_1 t/a^2}, & \delta> 2\mu_1^2\nu_1/a^2.\end{cases} \tag{3.25}$$

Здесь N_1 — константа; μ_1 — первый корень уравнения $J_0(\mu)=0$ (не динамическая вязкость). Заметим, что ряды в (3.23) сходятся абсолютно с учетом неравенств (3.24). Таким образом, доказана

Теорема 1. *При выполнении условия* (3.20) *решение начально-краевой задачи* (3.1)–(3.6) *стремится к нулевому решению, причем справедливы оценки* (3.22), (3.25), *равномерные в интервалах* $[a,b]$, $[0,a]$.

Иными словами, если градиент давления в одной из жидкостей достаточно быстро приближается к нулю, то происходит торможение жидкостей за счет вязкого трения (см. (3.22), (3.25)).

4. Решение методом преобразования Лапласа. Положим

$$\tilde w_j(r,p)=\int\limits_0^\infty w_j(r,t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,dt. \tag{4.1}$$

Тогда задача (3.1)–(3.6) сводится к краевой задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}\tilde w_{1rr}+\tilde w_{1r}/r-p\tilde w_1/\nu_1=-\tilde f_1(p)/\nu_1, \qquad 0<r<a,\\ \tilde w_{2rr}+\tilde w_{2r}/r-p\tilde w_2/\nu_2=-\rho\tilde f_1(p)/\nu_2, \qquad a<r<b;\end{gathered} \tag{4.2}$$

$$\tilde w_1(a,p)=\tilde w_2(a,p), \qquad \tilde w_2(b,p)=0; \tag{4.3}$$

$$\mu_2\tilde w_{2r}(a,p)=\mu_1\tilde w_{1r}(a,p). \tag{4.4}$$

С учетом неравенства $|\tilde w_1(0,p)|<\infty$ общие решения уравнений (4.2) имеют вид

$$\tilde w_1=C_1I_0(\sqrt{p/\nu_1}\,r)+\tilde f_1(p)/p; \tag{4.5}$$

$$\tilde w_2=C_2I_0(\sqrt{p/\nu_2}\,r)+C_3K_0(\sqrt{p/\nu_2}\,r)+\tilde f_2(p)/p. \tag{4.6}$$

Из граничных условий (4.3), (4.4) получаем

$$C_1=\frac{\tilde f_1}{p\Delta}\begin{vmatrix}-\rho & I_0(z) & K_0(z)\\ \rho-1 & -I_0(y) & -K_0(y)\\ 0 & -I_1(y) & K_1(y)\end{vmatrix}; \tag{4.7}$$

$$C_2=\frac{\tilde f_1}{p\Delta}\begin{vmatrix}0 & -\rho & K_0(z)\\ I_0(x) & \rho-1 & -K_0(y)\\ \mu I_1(x)/\sqrt{\nu} & 0 & K_1(y)\end{vmatrix}; \tag{4.8}$$

$$C_3 = \frac{\tilde f_1}{p\Delta} \begin{vmatrix} 0 & I_0(z) & -\rho \\ I_0(x) & -I_0(y) & \rho - 1 \\ \mu I_1(x)/\sqrt{\nu} & -I_1(y) & 0 \end{vmatrix}; \tag{4.9}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & I_0(z) & K_0(z) \\ I_0(x) & -I_0(y) & -K_0(y) \\ \mu I_1(x)/\sqrt{\nu} & -I_1(y) & K_1(y) \end{vmatrix}, \tag{4.10}$$

где $\mu = \mu_1/\mu_2$; $\nu = \nu_1/\nu_2$; $x = a\sqrt{p/\nu_1}$; $y = a\sqrt{p/\nu_2}$; $z = b\sqrt{p/\nu_2}$; I_j, K_j — функции Бесселя первого и третьего рода мнимого аргумента.

Используя явные формулы (4.5)–(4.10), можно показать, что $\lim\limits_{t\to\infty} w_j(r,t) = \lim\limits_{p\to 0} p\tilde w_j(r,p) = w_j^0(r)$, где $w_j^0(r)$ — стационарное поле скоростей, определенное в (2.1). Действительно, так как при малых t справедливы представления $I_0(t) \approx 1 + t^2/4$, $K_0(t) \approx -\ln t/2$, $I_1(t) \approx t/2 + t^3/16$, $K_1(t) \approx 1/t + (t\ln t)/2$, то при $p \to 0$ имеем

$$\Delta(p) \sim -\Big(1 + \frac{x^2+z^2}{4} - \frac{y^2}{2}\,(\rho-1)\ln\frac{a}{b}\Big)\frac{1}{y}, \tag{4.11}$$

поэтому из (4.7)–(4.11) после ряда преобразований получаем

$$\begin{gathered} C_1 \sim -\tilde f_1[1 + (\rho y^2 - \rho z^2 - x^2)/4]/p, \quad C_2 \sim -\rho\tilde f_1(1 - z^2/4)/p, \\ C_3 \sim -\rho\tilde f_1 y^2[x^2 + (\rho-1)z^2 - \rho y^2]/(8p). \end{gathered} \tag{4.12}$$

При $p \to 0$ из (4.5), (4.12) следует выражение

$$\begin{aligned} p\tilde w_1(r,p) \sim -\tilde f_1[1 + (\rho(y^2 - z^2) - x^2)/4][1 + pr^2/(4\nu_1)] + \tilde f_1 = \\ = p\tilde f_1(p)[a^2 - r^2 + \mu(b^2-a^2)]/(4\nu_1) \to f_1^0[a^2 - r^2 + \mu(b^2-a^2)]/(4\nu_1), \end{aligned}$$

совпадающее с первым выражением для $w_1^0(r)$ в (2.1). Аналогично можно показать, что $\lim\limits_{t\to\infty} w_2(r,t) = \lim\limits_{p\to 0} p\tilde w_2(r,p) = w_2^0(r)$.

5. Определение расхода или градиента давления. Количество жидкости, протекающей через поперечное сечение в единицу времени, равно

$$Q_1(t) = 2\pi\int_0^a rw_1(r,t)\,dr, \qquad Q_2(t) = 2\pi\int_a^b rw_2(r,t)\,dr. \tag{5.1}$$

В случае стационарного решения (2.1) имеем

$$Q_1^0 = \pi a^4 f_1^0[1/2 + (b^2/a^2 - 1)\mu]/(4\nu_1), \qquad \mu = \mu_1/\mu_2; \tag{5.2}$$

$$Q_2^0 = \pi\rho_1 f_1^0(b^2 - a^2)^2/(8\mu_2). \tag{5.3}$$

Отношение расходов Q_1^0 и Q_2^0 равно

$$\frac{Q_1^0}{Q_2^0} = \frac{4[1/2 + \mu(b^2/a^2 - 1)]}{\mu(b^2/a^2-1)^2}.$$

Так, при $b/a = 1{,}1$, $\mu = 0{,}1$ расход Q_1^0 приблизительно в 500 раз больше расхода Q_2^0.

Если задан расход первой жидкости $Q_1(t)$, то можно найти функцию $\tilde Q_1(p)$. В то же время из первой формулы в (5.2) и из (4.5), (4.7), (4.10) получаем

$$\tilde Q_1(p) = 2\pi\int_0^a r\tilde w_1(r,p)\,dr = 2\pi\Big[\frac{\tilde f_1(p)a^2}{2p} + C_1\sqrt{\frac{\nu_1}{p}}\,I_1\Big(\sqrt{\frac{p}{\nu_1}}\,a\Big)\Big]. \tag{5.4}$$

Из (5.4) по известной функции $\tilde{Q}_1(p)$ находим $\tilde{f}_1(p)$ и по формуле

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l-i\infty}^{l+i\infty} \mathrm{e}^{pt}\, \tilde{f}_1(p)\, dp$$

восстанавливаем оригинал. Поскольку $f_2(t) = \rho f_1(t)$, при заданном $Q_1(t)$ полностью определяются поля скоростей и градиенты давлений в слоях. Иными словами, в этом случае может быть решена и обратная задача: по заданной функции $Q_1(t)$ найти три функции $w_1(r,t)$, $w_2(r,t)$, $f_1(t)$, удовлетворяющие начально-краевой задаче (3.1)–(3.6) и первому интегральному условию в (5.1).

6. Определение возмущений температуры в слоях. Начально-краевая задача для функций $T_j(r,t)$ имеет вид

$$\begin{gathered} T_{1t} = \chi_1(T_{1rr} + T_{1r}/r) - Aw_1(r,t), \qquad 0 < r < a, \\ T_{2t} = \chi_2(T_{2rr} + T_{2r}/r) - Aw_2(r,t), \qquad a < r < b, \\ T_1(a,t) = T_2(a,t), \qquad k_1 T_{1r}(a,t) = k_2 T_{2r}(a,t), \\ T_2(b,t) = 0, \qquad |T_1(0,t)| < \infty, \\ T_1(r,0) = 0, \qquad T_2(r,0) = 0. \end{gathered} \tag{6.1}$$

Отметим, что задача (6.1) совпадает с задачей (3.1)–(3.6), если выполнить замену $w_j \leftrightarrow T_j$, $f_j \leftrightarrow -Aw_j$, $\nu_j \leftrightarrow \chi_j$, $\mu_j \leftrightarrow k_j$. Кроме того, следует учесть, что $k_j = \chi_j \rho_j c_j$ (c_j — удельные теплоемкости). Поэтому, введя обозначение

$$E_1(t) = \frac{1}{2}\,\rho_1 c_1 \int\limits_0^a r T_1^2(r,t)\, dr + \frac{1}{2}\,\rho_2 c_2 \int\limits_a^b r T_2^2(r,t)\, dr, \tag{6.2}$$

получаем аналогичное (3.9) равенство

$$\frac{\partial E_1}{\partial t} + k_1 \int\limits_0^a r T_{1r}^2\, dr + k_2 \int\limits_a^b r T_{2r}^2\, dr = -A\Big(\rho_1 c_1 \int\limits_0^a r w_1 T_1\, dr + \rho_2 c_2 \int\limits_a^b r w_2 T_2\, dr\Big). \tag{6.3}$$

Согласно лемме

$$k_1 \int\limits_0^a r T_{1r}^2\, dr + k_2 \int\limits_a^b r T_{2r}^2\, dr \geqslant 2\delta_1 E_1, \tag{6.4}$$

где

$$\delta_1 = \frac{1}{M_0} \min\Big(\frac{1}{\rho_1 c_1}, \frac{1}{\rho_2 c_2}\Big) = \frac{1}{M_0} \min\Big(\frac{\chi_1}{k_1}, \frac{\chi_2}{k_2}\Big). \tag{6.5}$$

Выражение в скобках в правой части (6.3) допускает оценку сверху

$$\begin{aligned} &\Big|\rho_1 c_1 \int\limits_0^a r w_1 T_1\, dr + \rho_2 c_2 \int\limits_a^b r w_2 T_2\, dr\Big| \leqslant \\ &\leqslant \rho_1 c_1 \Big(\int\limits_0^a r w_1^2\, dr\Big)^{1/2} \Big(\int\limits_0^a r T_1^2\, dr\Big)^{1/2} + \rho_2 c_2 \Big(\int\limits_a^b r w_2^2\, dr\Big)^{1/2} \Big(\int\limits_a^b r T_2^2\, dr\Big)^{1/2} \leqslant \\ &\leqslant 2 \max\Big[\Big(\int\limits_0^a r w_1^2\, dr\Big)^{1/2}, \Big(\int\limits_a^b r w_2^2\, dr\Big)^{1/2}\Big] \max\big(\sqrt{\rho_1 c_1}\,, \sqrt{\rho_2 c_2}\,\big) \sqrt{E_1(t)}\,. \end{aligned} \tag{6.6}$$

С учетом (3.21) из (6.3)–(6.6) получаем

$$\frac{\partial E_1}{\partial t} + 2\delta_1 E_1 \leqslant C_5 \sqrt{E_1}\, \mathrm{e}^{-\delta t}, \tag{6.7}$$

где

$$C_5 = \sqrt{2\rho_1}\, C_1 C_2 |A| \max(1, \rho) \max\left(\sqrt{k_1/\chi_1}\,, \sqrt{k_2/\chi_2}\,\right).$$

Так как $E_1(0) = 0$, то, интегрируя неравенство (6.7), находим оценку $E_1(t)$:

$$E_1(t) \leqslant \frac{C_5^2}{4} \begin{cases} t^2\, \mathrm{e}^{-2\delta t}, & \delta_1 = \delta, \\ \left(\mathrm{e}^{-\delta t} - \mathrm{e}^{-\delta_1 t}\right)^2/(\delta_1 - \delta)^2, & \delta_1 \neq \delta. \end{cases} \tag{6.8}$$

Тогда из (6.2), (6.8) следует

$$\int\limits_0^a r T_1^2\, dr \leqslant \frac{2\chi_1}{k_1}\, E_1(t), \qquad \int\limits_a^b r T_2^2\, dr \leqslant \frac{2\chi_2}{k_2}\, E_1(t), \tag{6.9}$$

поэтому квадраты L_2-норм с весом r функций $T_1(r,t)$, $T_2(r,t)$ экспоненциально стремятся к нулю при $t \to \infty$, если выполнено равенство (3.20).

В случае задачи (6.1) имеет место тождество, аналогичное (3.13):

$$\rho_1 c_1 \int\limits_0^t \int\limits_0^a r\Big[T_{1t}^2 + \chi_1^2\Big(T_{1rr} + \frac{1}{r}\, T_{1r}\Big)^2\Big]\, dr\, dt + \rho_2 c_2 \int\limits_0^t \int\limits_a^b r\Big[T_{2t}^2 + \chi_2^2\Big(T_{2rr} + \frac{1}{r}\, T_{2r}\Big)^2\Big]\, dr\, dt +$$

$$+ k_1 \int\limits_0^a r T_{1r}^2\, dr + k_2 \int\limits_a^b r T_{2r}^2\, dr = A^2\Big(\rho_1 c_1 \int\limits_0^t \int\limits_0^a r w_1^2\, dr\, dt + \rho_2 c_2 \int\limits_0^t \int\limits_a^b r w_2^2\, dr\, dt\Big). \tag{6.10}$$

Отсюда и из оценок (3.21) следуют неравенства

$$\int\limits_0^a r T_{1r}^2\, dr \leqslant \frac{C_6}{k_1}, \qquad \int\limits_a^b r T_{2r}^2\, dr \leqslant \frac{C_6}{k_2}, \tag{6.11}$$

где

$$C_6 = A^2 C_1^2 C_3^2 \rho_1 (k_1/\chi_1 + \rho k_2/\chi_2)/(4\delta).$$

Из (6.9)–(6.11) по аналогии с оценкой (3.22) находим

$$|T_2(r,t)| \leqslant \sqrt{C_7}\, (E_1(t))^{1/4}, \qquad C_7 = (2/a)\sqrt{2\chi_2 C_6/k_2^2}\,. \tag{6.12}$$

Для получения оценки $|T_1(r,t)|$, $r \in [0, a]$ выполним те же действия, что и в п. **3**. Функция $T_1(r,t)$ является решением начально-краевой задачи

$$\begin{gathered} T_{1t} = \chi_1 (T_{1rr} + T_{1r}/r) - A w_1(r,t), \qquad 0 < r < a, \\ T_1(r,0) = 0, \qquad |T_1(0,t)| < \infty, \qquad T_1(a,t) = T_2(a,t), \end{gathered} \tag{6.13}$$

причем согласно оценке (6.12)

$$|T_1(a,t)| \leqslant \sqrt{C_7}\, (E_1(t))^{1/4}. \tag{6.14}$$

Решение задачи (6.13) [6. С. 74] имеет вид

$$T_1(r,t) = \frac{2\chi_1}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n J_0(\mu_n r/a)}{J_1(\mu_n)}\int\limits_0^t T_1(a,\tau)\,\mathrm{e}^{-\chi_1\mu_n^2(t-\tau)/a^2}\,d\tau -$$

$$- \frac{2A}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\mu_n r/a)}{J_1^2(\mu_n)}\int\limits_0^t\int\limits_0^a w_1(\xi,\tau)\xi J_0(\mu_n\xi/a)\,\mathrm{e}^{-\chi_1\mu_n^2(t-\tau)/a^2}\,d\xi\,d\tau. \quad (6.15)$$

Введем следующее обозначение:

$$\alpha = \chi_1\mu_n^2/a^2 - \delta/2. \quad (6.16)$$

Согласно (6.8), (6.14)

$$I_1 = \Big|\int\limits_0^t T_1(a,\tau)\,\mathrm{e}^{-\chi_1\mu_n^2(t-\tau)/a^2}\,d\tau\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{C_5C_7}{2}}\,\mathrm{e}^{-\chi_1\mu_n^2 t/a^2}\begin{cases}\displaystyle\int\limits_0^t\sqrt{\tau}\,\mathrm{e}^{\alpha\tau}\,d\tau, & \delta_1=\delta,\\ \displaystyle\frac{1}{\sqrt{|\delta_1-\delta|}}\int\limits_0^t|1-\mathrm{e}^{(\delta-\delta_1)\tau}|^{1/2}\,\mathrm{e}^{\alpha\tau}\,d\tau, & \delta_1\neq\delta.\end{cases}$$

Первый интеграл, очевидно, не превышает значения выражения $\alpha^{-1}t^{1/2}(\mathrm{e}^{\alpha t}-1)$. Для второго интеграла получаем оценку сверху

$$\int\limits_0^t|1-\mathrm{e}^{(\delta-\delta_1)\tau}|^{1/2}\,\mathrm{e}^{\alpha\tau}\,d\tau \leqslant \begin{cases}(\mathrm{e}^{\alpha t}-1)/\alpha, & \delta<\delta_1,\\ (\mathrm{e}^{\alpha_1 t}-1)/\alpha_1, & \delta>\delta_1,\end{cases}$$

где

$$\alpha_1 = \chi_1\mu_n^2/a^2 - \delta_1/2. \quad (6.17)$$

При $\delta>\delta_1$ использовалось неравенство $(\mathrm{e}^{(\delta-\delta_1)\tau}-1)^{1/2} < \mathrm{e}^{(\delta-\delta_1)\tau/2}$. С учетом обозначений (6.16), (6.17) и полученных оценок имеем неравенство

$$I_1 \leqslant \sqrt{\frac{C_5C_7}{2}}\begin{cases}t^{1/2}(\mathrm{e}^{-\delta t/2}-\mathrm{e}^{-\chi_1\mu_n^2 t/a^2})/\alpha, & \delta_1=\delta,\\ (\mathrm{e}^{-\delta t/2}-\mathrm{e}^{-\chi_1\mu_n^2 t/a^2})/(\alpha_1\sqrt{\delta_1-\delta}\,), & \delta_1>\delta,\\ (\mathrm{e}^{-\delta_1 t/2}-\mathrm{e}^{-\chi_1\mu_n^2 t/a^2})/(\alpha_1\sqrt{|\delta_1-\delta|}\,), & \delta_1<\delta.\end{cases} \quad (6.18)$$

Выполним оценку интеграла

$$I_2 = \Big|\int\limits_0^t\int\limits_0^a w_1(\xi,\tau)\xi J_0(\mu_n\xi/a)\,\mathrm{e}^{-\chi_1\mu_n^2(t-\tau)/a^2}\,d\xi\,d\tau\Big|.$$

Используя (3.25) и неравенство $|J_0(z)|\leqslant 1$, получаем

$$I_2 \leqslant \frac{a^2N_1}{2}\begin{cases}(\mathrm{e}^{-\delta t/2}-\mathrm{e}^{-\chi_1\mu_n^2 t/a^2})/\alpha, & \delta\leqslant 2\nu_1\mu_1^2/a^2,\\ (\mathrm{e}^{-\nu_1\mu_1^2/a^2}-\mathrm{e}^{-\chi_1\mu_n^2 t/a^2})/\alpha_2, & \delta>2\nu_1\mu_1^2/a^2,\end{cases} \quad (6.19)$$

где $\alpha_2 = \chi_1\mu_n^2/a^2 - \nu_1\mu_1^2/a^2$.

Вернемся к оценке ряда (6.15). Поскольку $\mu_n > \mu_1$ при $n > 1$, в правых частях неравенств (6.18), (6.19) можно положить $n = 1$. Тогда найдется постоянная $N_2 > 0$, такая что

$$|T_1(r,t)| \leqslant N_2 t^{1/2}\,\mathrm{e}^{-\delta_2 t}, \tag{6.20}$$

причем постоянная δ_2 выбирается в зависимости от соотношений между δ, δ_1, $\chi_1\mu_1^2/a^2$, $\nu_1\mu_1^2/a^2$ (см. неравенства (6.18), (6.19)). В неравенстве (6.20) множитель $t^{1/2}$ появляется, только если $\delta_1 = \delta$. Таким образом, доказана

Теорема 2. *При выполнении условия* (3.20) *решение начально-краевой задачи* (6.1) *стремится к нулевому решению, причем справедливы оценки* (6.12), (6.20), *равномерные в интервалах* $[a, b]$ *и* $[0, a]$.

Применение преобразования Лапласа к задаче (6.1) позволяет свести ее к краевой задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}\tilde T_{1rr} + \tilde T_{1r}/r - p\tilde T_1/\chi_1 = A\tilde w_1/\chi_1, \qquad 0 < r < a,\\ \tilde T_{2rr} + \tilde T_{2r}/r - p\tilde T_2/\chi_2 = A\tilde w_2/\chi_2, \qquad a < r < b;\end{gathered} \tag{6.21}$$

$$\begin{gathered}\tilde T_2(b,p) = 0, \qquad |\tilde T_1(0,p)| < \infty,\\ \tilde T_1(a,p) = \tilde T_2(a,p), \qquad k\tilde T_{1r}(a,p) = \tilde T_{2r}(a,p), \qquad k = k_1/k_2.\end{gathered} \tag{6.22}$$

Здесь $\tilde w_1(r,p)$, $\tilde w_2(r,p)$ определяются по формулам (4.5)–(4.10). Общие решения уравнений (6.21) имеют вид

$$\begin{gathered}\tilde T_1(r,p) = D_1 I_0\Big(\sqrt{\frac{p}{\chi_1}}\,r\Big) - \frac{A\tilde f_1(p)}{p^2} - \frac{AC_1}{p\chi_1(1/\chi_1 - 1/\nu_1)}\,I_0\Big(\sqrt{\frac{p}{\nu_1}}\,r\Big),\\ \tilde T_2(r,p) = D_2 I_0\Big(\sqrt{\frac{p}{\chi_2}}\,r\Big) + D_3 K_0\Big(\sqrt{\frac{p}{\chi_2}}\,r\Big) - \frac{A\tilde f_2(p)}{p^2} - {}\\ - \frac{AC_2}{p\chi_2(1/\chi_2 - 1/\nu_2)}\,I_0\Big(\sqrt{\frac{p}{\nu_2}}\,r\Big) - \frac{AC_3}{p\chi_2(1/\chi_2 - 1/\nu_2)}\,K_0\Big(\sqrt{\frac{p}{\nu_2}}\,r\Big)\end{gathered} \tag{6.23}$$

при $\nu_1 \ne \chi_1$, $\nu_2 \ne \chi_2$, т. е. числа Прандтля жидкостей не равны единице. Из граничных условий (6.22) находим D_1, D_2, D_3:

$$\begin{gathered}D_1 = \frac{1}{\Delta_1}\begin{vmatrix} H_1 & -I_0(y_1) & -K_0(y_1)\\ H_2 & I_0(z_1) & K_0(z_1)\\ H_3 & -\sqrt{p/\chi_2}\,I_1(y_1) & \sqrt{p/\chi_2}\,K_1(y_1)\end{vmatrix},\\ D_2 = \frac{1}{\Delta_1}\begin{vmatrix} I_0(x_1) & H_1 & -K_0(y_1)\\ 0 & H_2 & K_0(z_1)\\ k\sqrt{p/\chi_1}\,I_1(x_1) & H_3 & \sqrt{p/\chi_2}\,K_1(y_1)\end{vmatrix},\\ D_3 = \frac{1}{\Delta_1}\begin{vmatrix} I_0(x_1) & -I_0(y_1) & H_1\\ 0 & I_0(z_1) & H_2\\ k\sqrt{p/\chi_1}\,I_1(x_1) & -\sqrt{p/\chi_2}\,I_1(y_1) & H_3\end{vmatrix},\\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} I_0(x_1) & -I_0(y_1) & -K_0(y_1)\\ 0 & I_0(z_1) & K_0(z_1)\\ k\sqrt{p/\chi_1}\,I_1(x_1) & -\sqrt{p/\chi_2}\,I_1(y_1) & \sqrt{p/\chi_2}\,K_1(y_1)\end{vmatrix},\end{gathered} \tag{6.24}$$

где $x_1 = a\sqrt{p/\chi_1}$, $y_1 = a\sqrt{p/\chi_2}$, $z_1 = b\sqrt{p/\chi_2}$,

$$H_1 = \frac{A(\tilde f_1(p) - \tilde f_2(p))}{p^2} + \frac{AC_1}{p\chi_1(1/\chi_1 - 1/\nu_1)}\, I_0\Big(\sqrt{\frac{p}{\nu_1}}\,a\Big) -$$
$$- \frac{AC_2}{p\chi_2(1/\chi_2 - 1/\nu_2)}\, I_0\Big(\sqrt{\frac{p}{\nu_2}}\,a\Big) - \frac{AC_3}{p\chi_2(1/\chi_2 - 1/\nu_2)}\, K_0\Big(\sqrt{\frac{p}{\nu_2}}\,a\Big),$$
$$H_2 = \frac{A\tilde f_2(p)}{p^2} + \frac{AC_2}{p\chi_2(1/\chi_2 - 1/\nu_2)}\, I_0\Big(\sqrt{\frac{p}{\nu_2}}\,b\Big) + \frac{AC_3}{p\chi_2(1/\chi_2 - 1/\nu_2)}\, K_0\Big(\sqrt{\frac{p}{\nu_2}}\,b\Big), \quad (6.25)$$
$$H_3 = \frac{kAC_1}{\sqrt{p}\,\chi_1(1/\chi_1 - 1/\nu_1)\sqrt{\nu_1}}\, I_1\Big(\sqrt{\frac{p}{\nu_1}}\,a\Big) -$$
$$- \frac{AC_2}{\sqrt{p}\,\chi_2(1/\chi_2 - 1/\nu_2)\sqrt{\nu_2}}\, I_1\Big(\sqrt{\frac{p}{\nu_2}}\,a\Big) + \frac{AC_3}{\sqrt{p}\,\chi_2(1/\chi_2 - 1/\nu_2)\sqrt{\nu_2}}\, K_1\Big(\sqrt{\frac{p}{\nu_2}}\,a\Big).$$

Если $\nu_1 = \chi_1$, $\nu_2 = \chi_2$, то решение (6.23) записывается в виде

$$\tilde T_1(r,p) = D_1 I_0\Big(\sqrt{\frac{p}{\nu_1}}\,r\Big) - \frac{A\tilde f_1(p)}{p^2} + \frac{AC_1 r}{2\sqrt{p/\nu_1}\,\chi_1}\, I_1\Big(\sqrt{\frac{p}{\nu_1}}\,r\Big),$$
$$\tilde T_2(r,p) = D_2 I_0\Big(\sqrt{\frac{p}{\nu_2}}\,r\Big) + D_3 K_0\Big(\sqrt{\frac{p}{\nu_2}}\,r\Big) - \frac{A\tilde f_2(p)}{p^2} +$$
$$+ \frac{AC_2 r}{2\sqrt{p/\nu_2}\,\chi_2}\, I_1\Big(\sqrt{\frac{p}{\nu_2}}\,r\Big) - \frac{AC_3 r}{2\sqrt{p/\nu_2}\,\chi_2}\, K_1\Big(\sqrt{\frac{p}{\nu_2}}\,r\Big).$$

Покажем, что

$$\lim_{p\to 0} p\tilde T_j(r,p) = T_j^0(r),$$

если $\lim\limits_{p\to 0} p\tilde f_1(p) = f_1^0$, где $T_j^0(r)$ — стационарное решение (2.1) для возмущений температуры.

Выполним соответствующие преобразования для $\tilde T_1(r,p)$. Так как при $t \to 0$ $I_0(t) = 1 + t^2/4 + t^4/64 + O(t^6)$, то при $p \to 0$

$$p\tilde T_1(r,p) \sim pD_1\Big(1 + \frac{p}{4\chi_1}\,r^2 + \frac{p^2}{64\chi_1^2}\,r^4\Big) - \frac{A\tilde f_1}{p} - \frac{AC_1}{1 - \chi_1/\nu_1}\,\Big(1 + \frac{p}{4\nu_1}\,r^2 + \frac{p^2}{64\nu_1^2}\,r^4\Big) =$$
$$= pD_1 - \frac{A\tilde f_1}{p} - \frac{AC_1}{1 - \chi_1/\nu_1} + \Big(\frac{p^2 D_1}{4\chi_1} - \frac{AC_1 p}{4\nu_1(1 - \chi_1/\nu_1)}\Big) r^2 +$$
$$+ \Big(\frac{p^3 D_1}{64\chi_1^2} - \frac{AC_1 p^2}{64\nu_1^2(1 - \chi_1/\nu_1)}\Big) r^4. \quad (6.26)$$

Значит, необходимо исследовать поведение функций H_1, H_2, H_3 в (6.25) и D_1 в (6.24) при $p \to 0$.

С использованием асимптотических представлений (4.12) при $p \to 0$ находим

$$H_1 \sim \frac{A\tilde f_1}{p^2}\Big(\frac{\rho\chi_2}{\nu_2 - \chi_2} - \frac{\chi_1}{\nu_1 - \chi_1} + \frac{(\chi_2\nu_1 - \chi_1\nu_2)\rho(y^2 - z^2)}{4(\nu_1 - \chi_1)(\nu_2 - \chi_2)} -$$
$$- \frac{\rho\nu_2 y^2}{8(\nu_2 - \chi_2)}\,[x^2 + (\rho - 1)z^2 - \rho y^2]\ln y\Big),$$

$$H_2 \sim -\frac{A\rho\tilde{f}_1\chi_2}{p^2(\nu_2-\chi_2)}\Big[1-\frac{\nu_2}{8}\Big(\frac{z^4}{2}+y^2(x^2+(\rho-1)z^2-\rho y^2)\ln z\Big)\Big], \tag{6.27}$$

$$H_3 \sim \frac{A\tilde{f}_1\sqrt{\nu_1}}{2p\sqrt{p}}\Big[-\frac{k}{\nu_1-\chi_1}+\frac{\rho}{\nu_2-\chi_2}+\frac{k}{4(\nu_1-\chi_1)}\Big(\frac{x^2}{2}+\rho(z^2-y^2)\Big)+ \\ +\frac{\rho}{4(\nu_2-\chi_2)}\Big(x^2+\rho z^2-\frac{(2\rho+1)y^2}{2}\Big)\Big]x.$$

Из (6.24) следует

$$\Delta_1(p) \sim \frac{1}{a}\Big[1+\frac{x_1^2+z_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{2}\Big(1-\frac{k}{\chi}\Big)\ln\frac{a}{b}\Big]. \tag{6.28}$$

Для вычисления коэффициента при r^4 в (6.26) достаточно ограничиться только первыми членами разложения во всех формулах (6.27). Действительно, с использованием (4.12), (6.27) и (6.28), (6.24) находим

$$D_1 \sim \frac{A\tilde{f}_1}{p^2}\Big(\frac{\rho\chi_2}{\nu_2-\chi_2}-\frac{\chi_1}{\nu_1-\chi_1}\Big)-\frac{A\tilde{f}_1}{p^2}\,\frac{\rho\chi_2}{\nu_2-\chi_2}=-\frac{A\tilde{f}_1\chi_1}{p^2(\nu_1-\chi_1)}, \tag{6.29}$$

поэтому

$$\frac{p^3D_1}{64\chi_1^2}-\frac{AC_1p^2}{64\nu_1^2(1-\chi_1/\nu_1)} \sim \frac{pA\tilde{f}_1}{64}\Big(-\frac{1}{\chi_1(\nu_1-\chi_1)}+\frac{1}{\nu_1(\nu_1-\chi_1)}\Big)=-\frac{pA\tilde{f}_1}{64\chi_1\nu_1}.$$

При $p\to 0$ последнее выражение есть коэффициент при r^4 в формуле (2.1) для $T_1^0(r)$.

Найдем при $p\to 0$ предел коэффициента при r^2 в формуле (6.26). Заметим, что в (6.26) члены нулевого порядка по p взаимно сокращаются. Тогда из (6.26), (4.12), (6.29) находим

$$\frac{p^2D_1}{4\chi_1}-\frac{pAC_1}{4(\nu_1-\chi_1)} \sim -\frac{p^2A\tilde{f}_1\chi_1}{4\chi_1p^2(\nu_1-\chi_1)}+\frac{pA\tilde{f}_1}{4p(\nu_1-\chi_1)}\equiv 0.$$

Следовательно, во всех разложениях необходимо сохранить члены порядка x_j^2, y_j^2, z_j^2 $(j=1,2)$, соответствующие порядку p. В результате получаем искомое выражение $p\tilde{f}_1(p)$. Используя соотношения (4.12) для C_1, C_2, C_3, (6.27) для H_1, H_2, H_3, выражение (6.29) для D_1 и (6.28), при $p\to 0$ находим

$$\frac{p^2D_1}{4\chi_1}-\frac{pAC_1}{4(\nu_1-\chi_1)} \sim \frac{pA\tilde{f}_1(p)}{16\chi_1}\Big[\frac{\rho\chi_2}{\nu_2-\chi_2}\Big(\frac{a^2}{\nu_2}-\frac{a^2}{\chi_2}+\frac{b^2}{\chi_2}-\frac{b^2}{\nu_2}\Big)+\frac{\chi_1}{\nu_1-\chi_1}\Big(\frac{a^2}{\chi_1}-\frac{a^2}{\nu_1}\Big)\Big]= \\ =\frac{Ap\tilde{f}_1(p)}{16\nu_1\chi_1}\,[a^2+\mu(b^2-a^2)].$$

При $p\to 0$ это выражение есть коэффициент при r^2 в (6.26).

С помощью асимптотических соотношений (6.27) при $p\to 0$ получаем выражение для свободного члена в (6.26)

$$pD_1-\frac{A\tilde{f}_1}{p}-\frac{A\nu_1C_1}{\nu_1-\chi_1} \sim \frac{a^4f_1^0A}{8\nu_1\chi_1}\Big\{-\frac{3\mu\chi}{8}\Big(\frac{b}{a}\Big)^4+ \\ +\Big[k\Big(\frac{1}{2}+\mu\Big(\frac{b^2}{a^2}-1\Big)\Big)+\mu\chi\Big(\frac{1}{2}-\frac{b^2}{a^2}\Big)\Big]\ln\frac{a}{b}-\frac{\mu}{2}\Big[\frac{b^2}{a^2}-1+\chi\Big(\frac{1}{4}-\frac{b^2}{a^2}\Big)\Big]-\frac{3}{8}\Big\},$$

совпадающее с выражением для постоянной C_1 в формуле (2.1) для $T_1^0(r)$.

Для исследования поведения скоростей $w_j(r,t)$ и возмущений температур $T_j(r,t)$ при произвольном заданном перепаде давления $f_1(t)$ необходимо использовать численный метод обращения преобразования Лапласа.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973.
2. **Бетчелор Дж.** Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.
3. **Андреев В. К.** Эволюция совместного движения двух вязких теплопроводных жидкостей в плоском слое под действием нестационарного перепада давления // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 4. С. 94–107.
4. **Андреев В. К.** Термокапиллярная неустойчивость / В. К. Андреев, В. Е. Захватаев, Е. А. Рябицкий. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 2000.
5. **Андреев В. К.** О неравенстве типа Фридрихса для составных областей // Math. Phys. (J. Sib. Federal Univ.). 2009. V. 2. P. 146–157.
6. **Полянин А. Д.** Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001.

Поступила в редакцию 25/VIII 2009 г.