Рассмотрение неоднородной структуры импульсных плазменных струй показало сложность физических процессов при образовании таких возмущений. Наряду с общепринятой точкой зрения, что прерывистость струи обусловлена дискретным поступлением вещества электродов при взрывообразном испарении, следует рассматривать возмущения не только как плазменные микросгустки, но и как проявление волн разрежения и сжатия, распространяющихся со звуковой скоростью в замкнутом плазменном объеме, который образует сама структура струи при достаточной энергии разряда.

Автор благодарит Л. И. Киселевского за внимание к работе и ряд ценных замечаний.

Поступила 9 XI 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Минько Л. Я.* Получение и исследование импульсных плазменных потоков. Минск, 1970.
2. *Киселевский Л. И., Султанов М. А.* Исследование плазменных образований, возникающих при воздействии факелов импульсного разряда большой мощности. ПМТФ, 1966, № 4.
3. *Морозов В. А., Киселевский Л. И.* К вопросу о механизме разрушения тел под воздействием сверхзвуковых плазменных струй капиллярного импульсного разряда. Инж.-физ. ж., 1967, т. 13, № 5.
4. *Бай Ши-и.* Теория струй. М., Физматгиз, 1960.
5. *Бай Ши-и.* Введение в теорию течения сжимаемой жидкости. М., Изд-во иностр. лит., 1961.

УДК 536.24

ЗАДАЧА СТЕФАНА С ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ ЧЕТВЕРТОГО РОДА

М. А. Каниболотский

(Якутск)

Задача Стефана с граничным условием четвертого рода методом квазистационарных состояний сводится к решению системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно неизвестных границы раздела фаз и граничной температуры.

При расчетах режимов работы подземных хранилищ сжиженных газов большой интерес представляет динамика изменения температуры внутри хранилища.

Если такое хранилище расположено в водонасыщенном грунте, то после его заполнения грунт начнет промерзать, а температура сжиженного газа будет повышаться [1]. С точки зрения рациональной эксплуатации хранилища представляют интерес следующие две задачи: а) за какое время t_g температура сжиженного газа $T_\Gamma(t)$ поднимется от начальной температуры T_i до некоторой температуры T_g, определяемой технологическими соображениями? б) каким тепловым сопротивлением должны обладать стенки хранилища, чтобы за заданное время t_g температура $T_\Gamma(t)$ не поднялась выше допустимой?

Предположим, что хранилище представляет собой сферу радиуса R_0. Тогда для определения $T_g(t)$ можно сформулировать следующую задачу.

Пусть в области, представляющей собой внешность сферы радиуса R_0, находится водонасыщенный грунт с температурой $T_0 > 0$. Внутри этой сферы находится хорошо перемешиваемая жидкость, которая в момент времени $t = 0$ имеет температуру $T_i < 0$. Пусть также эта сфера обладает известным термосопротивлением. Очевидно, что в некоторый момент времни $t = t^*$ начнется промерзание грунта вокруг сферы. Найдем законы движения границы раздела фаз $R_p(t)$ и изменения температуры жидкости внутри сферы. Для этого нужно решить задачу Стефана со следующими граничными и начальными условиями [2]:

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = \varkappa_1\left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial T_1}{\partial r}\right) \quad (R_0 \leqslant r \leqslant R_p(t))$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = \varkappa_2\left(\frac{\partial^2 T_2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial T_2}{\partial r}\right) \quad (R_p(t) \leqslant r < \infty)$$

(1)
$$\lambda_1 \int\limits_{S\,(R_0)}\int \frac{\partial T_1}{\partial r}\, dS + M_g c_g \frac{dT_\Gamma}{dt} = 0 \quad (r = R_0)$$

$$\partial T_1/\partial r - h_1 (T_1 - T_\Gamma) = 0 \quad (r = R_0)$$

$$T_1 (R_p, t) = T_2 (R_p, t) = T_p \quad (r = R_p (t))$$

$$\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} - \lambda_1 \frac{\partial T}{\partial r} = L\rho_2 W \frac{dR_p (t)}{dt} \quad (r = R_p (t))$$

$$T_2 (r,\ 0) = T_0$$

Здесь T — температура, t — время, r — текущий радиус, R_0 — радиус сферы, R_p — координата границы раздела фаз, $\varkappa$, λ, c, ρ— соответственно коэффициент температуропроводности, теплопроводности, теплоемкости, плотности, M_g — масса сжиженного газа, $S\,(R_0)$ — поверхность сферы, T_0 — начальная температура грунта, T_p — температура фазового перехода, L — скрытая теплота фазового перехода, W — влажность, индекс 1 относится к промерзшей зоне, 2 — к талой, g — к параметрам сжиженного газа.

Известно [3], что при стационарных граничных условиях первого и третьего рода малая скорость движения границы раздела фаз позволяет успешно использовать квазистационарный метод [4]. Медленная скорость движения границы обусловливает медленное изменение температуры сжиженного газа внутри сферы, так как любая изотерма $T < 0$ не может обогнать изотерму $T = T_p = 0$ (T_p — температура перехода воды в лед).

Тогда, следуя вышеупомянутому методу, примем

(2)
$$T_1 (r) = T_p - \frac{h_1 R_0^2 (T_p - T_\Gamma)}{[h_1 R_0 (R_p - R_0) - R_p]} \left(\frac{R_p}{r} - 1\right)$$

$$T_2 (r, t) = T_0 - \frac{(T_0 - T_p)}{r} R_p \operatorname{erfc}\left[\frac{r - R_p}{2\sqrt{\varkappa_2 t}}\right]$$

Третье и шестое условия (1) с учетом (2) дают систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $R_p\,(t)$ и $T_g\,(t)$.

Для безразмерных переменных

$$\vartheta = \frac{T}{T_i}, \quad \xi = \frac{R_p}{R_0}, \quad \tau = \frac{t\varkappa_1}{R_0^2}, \quad h = h_1 R_0, \quad \frac{T_\Gamma (t)}{T_H}$$

эта система имеет вид

$$\frac{d\vartheta_g}{d\tau} = \frac{3c_1\rho_1}{c_g\rho_g} \frac{h (\vartheta_p - \vartheta_g)\,\xi}{[h (\xi - 1) + \xi]}$$

(3)
$$\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{c_1\rho_1 T_i}{L\rho_2 W} \frac{h (\vartheta_p - \vartheta_g)}{]h (\xi - 1) + \xi]\,\xi} - \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1} \frac{c_2 T_i (\vartheta_0 - \vartheta_p)}{LW} \left[\frac{1}{\xi} + \sqrt{\frac{\varkappa_1}{\pi\varkappa_2\tau}}\right]$$

Для задания начальных условий нужно решить соответствующую задачу без фазовых переходов и определить $\tau^* = t^*\varkappa_1/R_0^2$ и $\varkappa_g (\tau^*) = T_g (t^*) / T_i$ из условия равенства температуры на внешней границе сферы температуре фазового перехода.

Начальные условия при этом будут иметь вид

(4)
$$\nu_g (\tau^*) = \vartheta_g, \quad \xi (\tau^*) = 1$$

Систему (3) с начальными условиями (12) можно решить на ЭЦВМ с помощью стандартных процедур.

Способ решения задачи а) очевиден. Имея решение системы (3) с начальными условиями (4) $\vartheta_g\,(\tau)$, время $\tau_g = t_g\varkappa_1 / R_0^2$, найдем из условия

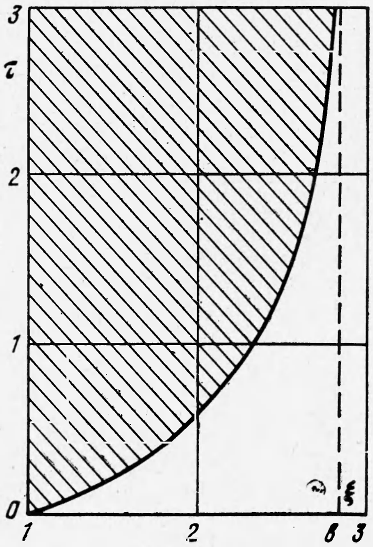
$$\vartheta_g (\tau_g) = \vartheta_{gi} \quad (\vartheta_{gi} = T_g/T_i)$$

Если термосопротивлением оболочки пренебречь, то вместо начальных условий (4) будем иметь

(5) $$\vartheta_g(0) = 1, \quad \xi(0) = 1$$

что упрощает задачу, так как исчезают параметры, определяемые из решения задачи без фазового перехода. Соответствующая этому случаю система получается из (3) при $h \to \infty$.

Если пренебречь тепловым потоком из талой зоны, который в большинстве практически важных случаев мал в силу незначительного различия начальной температуры грунта и температуры фазового перехода, то из систем (3) получим



(6) $$\frac{d\vartheta_g}{d\tau} = \frac{3c_1\rho_1}{c_g\rho_g}\,\frac{h(\vartheta_p - \vartheta_g)\,\xi}{[h(\xi-1)+\xi]}$$

(7) $$\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{c_1\rho_1 T_i}{L\rho_2 W}\,\frac{h(\vartheta_p - \vartheta_g)}{[h(\xi-1)+\xi]\,\xi}$$

Начальными условиями будут условия (5). Решение системы (6), (7) можно получить в квадратурах. Разделив (6) на (7), будем иметь

(8) $$\frac{d\vartheta_g}{d\xi} = \frac{3L\rho_2 W}{c_g\rho_g T_i}\,\xi^2$$

(9) $$\vartheta_g(1) = 1$$

Отсюда

(10) $$\vartheta_g(\xi) = L\rho_2 W\,(c_g\rho_g T_i)^{-1}\,(\xi^3 - 1) + 1$$

Отметим, что из (8) следует независимость кривых $\vartheta_g(\xi)$ параметра h. Физически это означает, что для любого термосопротивления определенной температуре внутри сферы соответствует определенное положение границы раздела фаз. Роль h сводится к влиянию только на скорость достижения этого состояния.

Подставляя (10) в (7) и выполняя интегрирование, получим

(11) $$\tau = \frac{1}{3b\alpha H}\left\{(b - H)\ln\frac{b-1}{b-\xi} - \left(b + \frac{H}{2}\right)\ln\frac{b^2 + b\xi + \xi^2}{b^2 + b + 1} + {} \right.$$
$$\left. + \sqrt{3}\,H\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{\sqrt{3}\,b(\xi-1)}{2b^2 + b + b\xi + 2\xi}\right\}$$

$$\left(\alpha = \frac{c_1\rho_1}{c_g\rho_g},\ H = \frac{h}{h+1},\ b^3 = 1 + \frac{(\vartheta_p + 1)\,c_g\rho_g T_i}{L\rho_2 W}\right)$$

Для задачи а) искомое время τ_g найдем из (11), подставив вместо ξ в правую часть ξ_g, которое однозначно определяется из (10) через заданную температуру ϑ_{gi}.

Решение задачи б) при тех же предположениях также находится в явном виде. Для этого выражение (11) разрешим относительно h, куда входят все параметры изоляции

(12) $$h = \left[b\ln\frac{b^3-1}{b^3-\xi}\right]\left\{3b\alpha\tau - \sqrt{3}\,\mathrm{arc\,tg}\left[\frac{\sqrt{3}\,b(\xi-1)}{2b^2 + b + b\xi + 2\xi}\right] - {}\right.$$
$$\left. - \ln\frac{(b^3-1)^b\,(b^2+b+1)^{3/2}}{(b^3-\xi^3)^b\,(b^2+b\xi+\xi^2)^{3/2}}\right\}^{-1}$$

Подставив τ_g вместо τ, а ξ_g, найденное из (10) по известному ϑ_g, вместо ξ, найдем необходимое значение h.

Если знаменатель в выражении (12) обратится в нуль, то $h=\infty$, т. е. кривая

$$3b\alpha\tau-\sqrt{3}\,\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{\sqrt{3}\,b\,(\xi-1)}{2b^2+b+b\xi+2\xi}\right]-\ln\left[\frac{(b^3-1)^b\,(b^2+b+1)^{3/2}}{(b-\xi)^b\,(b^2+b\xi+\xi^2)^{3/2}}\right]=0$$

изображенная на фигуре, есть решение $\xi(\tau)$ системы (6), (7) при отсутствии изоляции. При этом b есть безразмерный предельный радиус границы промерзания.

Вопрос о необходимости изоляции решается попаданием точки (τ_g, ξ_g) в заштрихованную область. В противном случае условия задачи б) выполняются и без изоляции.

Поступила 29 II 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Tien L. S., Churchill S. W.* Freezing front motion and heat transfer outside an infinite isothermal cylinder. A. I. Ch. E. Journal, 1965, vol. 11, No. 5.
2. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. М., «Высшая школа», 1967.
3. *Лейбензон Л. С.* Руководство по нефтепромысловой механике. М.— Л., ОНТИ НКТП СССР, 1934.
4. *Бабе Г. Д., Каниболотский М. А.* Об одной возможности обоснования квазистационарного метода решения задачи Стефана. Инж-физ. ж., 1973, т. 24, № 1.

К НАШИМ ЧИТАТЕЛЯМ

В целях обеспечения своевременной доставки нашего журнала, каждому подписчику присвоен постоянный цифровой код, который будет сообщен Вам Центральным подписным агентством «Союзпечать».

При возобновлении подписки на 1974 и последующие годы цифровой код следует проставлять на нижней строке абонемента, справа от фамилии, инициалов (наименования организации, выписывающей данное издание).

Технический редактор *Э. Ф. Бунова*

Сдано в набор 1/VI-1973 г. Т-11395 Подписано к печати 10/VIII-1973 г. Тираж 1955 экз.
Зак. 2423 Формат бумаги 70×108 1/16 Усл. печ. л. 16,8 Бум. л. 6 Уч.-изд. л. 16,8

2-я типография издательства «Наука». Москва, Шубинский пер., 10