

ЛИТЕРАТУРА

1. Шафранов В. Д. Об оптимальной форме тороидальных соленоидов.— ЖТФ, 1972, т. 42, № 9.
2. Лейтес Л. В. Тороидальный реактор без сердечника для энергосистем.— «Электричество», 1960, № 11.

УДК 539.319

РАСЧЕТ ТЕРМИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩИХ МАТЕРИАЛАХ ПРИ ПРОХОЖДЕНИИ МОЩНОГО ИМПУЛЬСА ТОКА

С. А. Баланкин, Л. П. Горбачев, Е. Г. Григорьев, Д. М. Скорое

(Москва)

Мощный импульс тока, проходящий через стержень, длительностью менее периода свободных колебаний стержня возбуждает в нем термоупругие колебания [1, 2]. Расчет напряжений, возникающий в колеблющемся стержне, проведен в [2] с учетом температурной зависимости модуля упругости в предположении однородного распределения тока.

Пренебрежение скин-эффектом в проводнике не всегда оправдано. Если радиус стержня превосходит толщину скин-слоя, необходимо учитывать неоднородность распределения плотности тока [3]. Неоднородное распределение тока в проводнике при высокочастотном электрическом импульсе создает градиент температуры и вызывает в материале проводника термические напряжения [4].

В данной работе проводится расчет термических напряжений в образце, подвергаемом нагреву импульсом тока, с учетом влияния скин-эффекта; постановка электродинамической задачи совпадает с постановкой задачи в [3]. Для описания процесса импульсного нагрева уравнения электродинамики дополняются уравнениями теплопроводности и упругости [5]

$$(1) \quad c_V \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{E}{1-2\mu} \frac{\alpha T}{3} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} - \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x_l} \right) + Q(x, t);$$

$$(2) \quad \rho \frac{\partial^2 u_l}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau_{lm}}{\partial x_m} + F_l, \quad l, m = 1, 2, 3,$$

где T — температура; c_V — удельная теплоемкость; E — модуль Юнга; μ — коэффициент Пуассона; α — коэффициент объемного расширения; Q — функция, описывающая джоулев нагрев образца; τ_{lm} — тензор внутренних напряжений; u_l — компоненты вектора деформации; ρ — плотность; F_l — компонента объемных сил, действующих на проводник.

Рассматривается квазистационарная электродинамическая задача с постоянной проводимостью σ . Условие квазистационарности электромагнитного поля для проводников длиной ~ 1 м выполняется для импульсов длительностью $\Delta t \geq 10^{-6}$ с. Закон Ома принимается в наиболее простой форме

$$j_l = \sigma E_l,$$

где j_l — плотность тока; E_l — напряженность электрического поля.

В такой постановке электродинамическая задача решается отдельно от уравнений теплопроводности и упругости. В предположении наличия аксиальной симметрии задачи плотность тока имеет одну отличную от нуля компоненту $j_z(r, t) = j(r, t)$, уравнение для которой имеет вид

$$(3) \quad \mu_0 \sigma \frac{\partial j}{\partial t} = \frac{\partial^2 j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial j}{\partial r}, \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{Г/м.}$$

Из линейности уравнения (3) следует возможность использования метода Фурье для нахождения решения. Учитывая конечность плотности тока на оси проводника, можно получить выражение для плотности тока в виде

$$(4) \quad j(r, t) = \frac{1}{2\pi r_0} \int d\omega \frac{ikJ_0(ikr)}{J_1(ikr_0)} I(\omega) e^{i\omega t},$$

где $k^2 = i\mu_0\sigma\omega$; $J_\nu(ikr)$ — функция Бесселя порядка ν ($\nu = 0, 1$) от комплексного аргумента; r_0 — радиус проводника; $I(\omega)$ — фурье-разложение полного тока. Полный ток может иметь вид затухающих колебаний или аperiodического сигнала [3]. Интегрирование (4) проводится методом вычетов. Для слабозатухающих колебаний и аperiodического разряда (4) совпадает с результатами, полученными в [3]. В случае сильного скин-эффекта выражение (4) переходит в хорошо известное экспоненциальное распределение плотности тока [6].

В работе [3] приводится связь параметров разрядного контура с параметрами электрического сигнала:

$$(5) \quad \beta = \frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}, \\ \gamma = \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}},$$

где R — активное сопротивление контура; L — индуктивность; C — емкость. Меняя параметры контура, можно варьировать параметры сигнала β и γ . При этом изменяется положение полюсов функции $I(\omega)$ в комплексной ω -плоскости. Необходимо отметить, что соотношения (5) справедливы для низкочастотных импульсов (слабого скин-эффекта), когда полюса $I(\omega)$ далеки от положения нулей $J_1(ikr_0)$. В противном случае связь параметров сигнала и электрического контура определяется другими соотношениями. Связь параметров сигнала с параметрами разрядного контура в более общем случае можно получить из закона сохранения энергии, записанного для цилиндрического проводника [6].

В обозначениях $\Omega = ikr_0$, $\Omega_0 = r_0(\mu_0\sigma/\sqrt{LC})^{1/2}$, $\Omega_1 = r_0(\mu_0\sigma R/2L)^{1/2}$ это соотношение имеет вид

$$(6) \quad \Omega^4 - \Omega^2 \Omega_1^2 \frac{J_0(\Omega)}{J_1(\Omega)} + \Omega_0^4 = 0.$$

Корни уравнения (6) в силу действительности выражения для полного тока имеют вид комплексно-сопряженных пар

$$\Omega_n^{(\pm)} = |\Omega_n| \exp(\pm i\psi_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

В случае аperiodического сигнала ($\psi_n = \pi/2$) корни уравнения (6) удовлетворяют соотношениям

$$\beta_n < \Omega_n < \alpha_n, \text{ где } \beta_n \text{ и } \alpha_n \text{ определяются уравнениями } J_0(\beta_n) = 0, J_1(\alpha_n) = 0, n = 1, 2, 3, \dots;$$

$\Omega_n \rightarrow \alpha_n$ при $n \rightarrow \infty$. Импульс, получаемый в контуре с заданными параметрами, представляет собой бесконечный ряд, состоящий из экспо-

нент. В показателях экспонент множителями при t стоят корни уравнения (6). Для описания импульса достаточно ограничиться первыми двумя членами ряда, так как остальные члены затухают со временем гораздо быстрее первых двух и слабо влияют на форму импульса.

Решение задачи о распределении тока позволяет решить систему уравнений теплопроводности (1) и упругости (2).

В уравнение баланса тепла (1) входит функция $Q = (1/\sigma)j^2(r, t)$, описывающая джоулев нагрев образца. Рассматриваются длительности импульсов тока $10^{-4} - 10^{-6}$ с. Явлением теплопроводности можно пренебречь, так как характерное время t_T для этого процесса велико по сравнению с длительностью импульса. Для молибденовых образцов цилиндрической формы с размерами $r_0 = 2 \cdot 10^{-3}$ м и длиной $l = 4 \cdot 10^{-2}$ м имеем $t_T \gg 10^{-2}$ с. Термоупругие напряжения значительно превышают напряжения, возникающие при электродинамическом обжатии образца [1]. Отношение термоупругих напряжений τ_0 и электродинамических τ_e порядка $\tau_e/\tau_0 \leq 10^{-4}$.

Длительность импульсов тока больше чем на порядок величины времени упругих колебаний образца. При этом инерционные члены дают малый вклад в уравнение (2) и деформации зависят от времени через температуру. Вектор деформации u_i в цилиндрической геометрии в силу аксиальной симметрии имеет две ненулевые компоненты u_r, u_z , а деформации кручения отсутствуют, $u_\phi = 0$.

С учетом всех приближений (1), (2) сводится к системе

$$(7) \quad c_V \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{E}{1-2\nu} \frac{\alpha T}{3} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{\sigma} j^2(r, t);$$

$$(8) \quad \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_{\alpha\alpha}^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_i \partial x_m} - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \frac{\alpha}{3} \frac{\partial T}{\partial x_i} = 0$$

со следующими граничными условиями:

1) отсутствие теплообмена с внешней средой, так как потери тепла за счет излучения малы в силу низких температур, а теплоотдачей при данных длительностях импульсов можно пренебречь;

2) отсутствие нормальных напряжений на боковой поверхности стержня $\tau_{rr}|_{r=r_0} = 0$;

3) свободные торцы стержня $\int_0^{r_0} \tau_{zz} r dr = 0$.

Начальными условиями являются постоянная температура T_0 и отсутствие деформации в момент $t = 0$.

Левая часть уравнения (7) содержит член с вектором деформации u_i . Так как зависимость деформации от температуры определяется уравнением равновесия (8), то систему (7), (8) можно свести к уравнению для температуры. Для рассматриваемых материалов (тантал, вольфрам, молибден) выполняется соотношение [7] $\alpha E/c_V \sim 1$, поэтому второе слагаемое в левой части уравнения (7) составляет от первого слагаемого величину порядка (u/r_0) . При малости упругих деформаций можно воспользоваться методом последовательных приближений, разлагая решение по параметру (u/r_0) .

Уравнения (8) для аксиально-симметричного распределения температуры интегрируются, компоненты вектора деформации u_r, u_z выражаются в квадратурах [7]. Решение системы (7), (8) и соотношения между деформациями и напряжениями [7] позволяют определить компоненты тензора напряжений

$$\begin{aligned}
 (9) \quad \tau_{rr} &= \frac{E}{1-\mu} \frac{\alpha}{3} \left\{ \frac{1}{r_0^2} \int_0^{r_0} T(r', t) r' dr' - \frac{1}{r^2} \int_0^r T(r', t) r' dr' \right\}, \\
 \tau_{\varphi\varphi} &= \frac{E}{1-\mu} \frac{\alpha}{3} \left\{ \frac{1}{r_0^2} \int_0^{r_0} T(r', t) r' dr' + \frac{1}{r^2} \int_0^r T(r', t) r' dr' - T(r, t) \right\}, \\
 \tau_{zz} &= \frac{E}{1-\mu} \frac{\alpha}{3} \left\{ \frac{2}{r_0^2} \int_0^{r_0} T(r', t) r' dr' - T(r, t) \right\}, \\
 \tau_{r\varphi} &= \tau_{\varphi z} = \tau_{rz} = 0
 \end{aligned}$$

и распределение температуры

$$T(r, t) = T^{(0)}(r, t) + T^{(1)}(r, t) + \dots$$

$$(10) \quad T^{(0)}(r, t) = \frac{1}{\sigma c_V} \int_0^t j^2(r, t') dt';$$

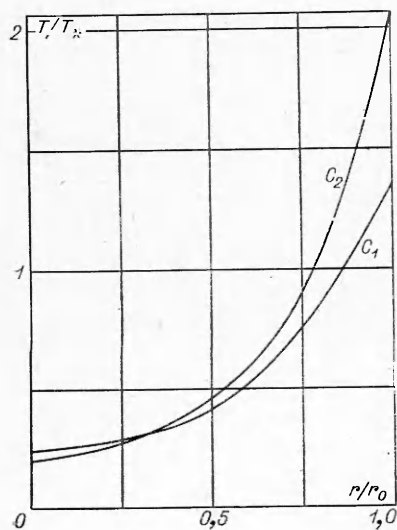
$$\begin{aligned}
 (11) \quad T^{(1)}(r, t) &= \frac{1}{r_0^2} \int_0^t q(r, t') dt' \int_0^{r_0} r' dr' \int_0^{t'} q(r', t'') dt'' - \\
 &- \frac{1}{2} \left(\int_0^t q(r, t') dt' \right)^2 - \frac{1}{r_0^2} \int_0^t q(r, t') dt' \int_0^{r_0} r' dr' \int_0^t q(r', t'') dt'',
 \end{aligned}$$

где

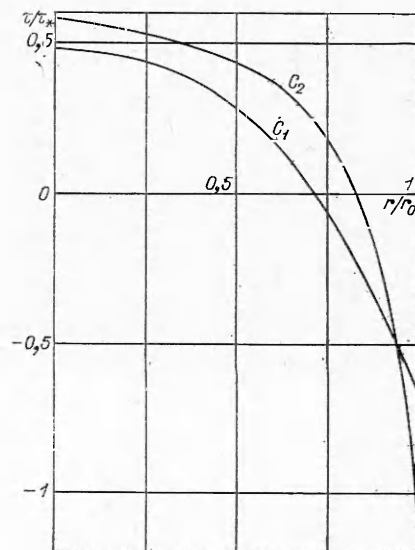
$$q(r, t) = \frac{1}{\sigma c_V} j^2(r, t).$$

По формулам (9)–(11) можно провести расчет пространственного и временного распределения температуры и связанного с ним напряженного состояния исследуемого материала.

Распределение температуры в исследуемом материале для момента времени $\omega_0 t = \pi/2$, когда параметры установки R , L постоянные, а C



Ф и г. 1



Ф и г. 2

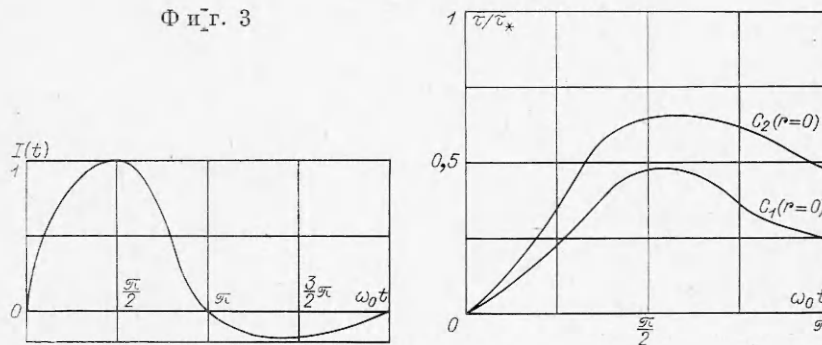
меняется ($C_2 = 0,45 C_1$), представлено на фиг. 1. Расчет проведен для молибденовых образцов $r_0 = 2 \cdot 10^{-3}$ м, $l = 4 \cdot 10^{-2}$ м при параметрах установки: $R = 3,4 \cdot 10^{-4}$ Ом; $L = 4,5 \cdot 10^{-7}$ Г; $C = 3 \cdot 10^{-3}$ Ф; напряжение на батарее конденсаторов ~ 5 кВ. Средняя температура определяется следующим образом:

$$T_* = \frac{1}{\pi r_0^2} \int_0^{r_0} T(r, t) r dr,$$

тогда $\tau_* = \frac{E}{1-\mu} \frac{\alpha T_*}{3}$.

Из фиг. 1 видно, что при уменьшении длительности импульса градиент температуры растет и с ним растут термические напряжения, которые могут привести к разрушению (фиг. 2). Термические напряжения достигают максимального значения к концу первой половины импульса

Фиг. 3



($\omega_0 t = \pi/2$), когда полный ток в контуре максимален. При падении тока в контуре температура на оси стержня повышается, градиент температуры уменьшается и внутренние напряжения в материале спадают (фиг. 3, $I(t)$ — полный ток).

Результаты расчета позволяют: 1) указать максимальный градиент температуры, который может выдерживать материал; 2) в совокупности с экспериментальными данными получить температурную зависимость термостойкости материала; 3) определить влияние параметров (R , L , C) установки на характер температурного распределения в образце.

Поступила 5 VII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Кульгавчук В. М., Мухранов А. П. Возбуждение продольных колебаний стержней при пропускании по ним импульсов электрического тока большой плотности. — ПМТФ, 1967, № 3.
2. Кульгавчук В. М., Учасев А. А. О влиянии переменности модуля упругости на величину термоупругих напряжений при импульсном нагреве стержня. — ПМТФ, 1969, № 4.
3. Haines M. G. The inverse skin effect. — «Proc. Phys. Soc.», 1959, vol. 74, pt 5, N 479.
4. Баланкин С. А., Башлыков С. С., Скоров Д. М., Ярцев В. А. Положительный отзыв комитета по делам изобретений по заявке № 1981616/25—28.
5. Geldmacher B. C. Exploding wires. Vol. 2. Ed. by W. G. Moore and H. K. Chase. N. Y., Plenum Press, 1962. Рус. пер. — В кн.: Электрический взрыв проводников. М., «Мир», 1965.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., Физматлит, 1959.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. М., «Наука», 1965.
- 5 ПМТФ, № 4, 1977 г.