

ЛИТЕРАТУРА

1. Воинов О.В., Перепелкин В.В. Об устойчивости поверхности газового пузыря, пульсирующего в жидкости // ПМТФ. — 1989. — № 3.
2. Plesset M.S., Mitchell T.P. On the stability of the spherical shape of a vapor cavity in a liquid // Quart. Appl. Math. — 1956. — V. 13, N 4.
3. Taylor G. The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes // Proc. Roy. Soc. — 1950. — V. A201. — P. 192.
4. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. — М.: Наука, 1987. — Т. 1.

г. Тюмень

Поступила 18/X 1990 г.

УДК 541.24:532.5

О.В. Воинов

О ВРЕМЕНИ ЖИЗНИ СИММЕТРИЧНО ПУЛЬСИРУЮЩЕГО ПУЗЫРЯ

Рассматривается проблема времени жизни газового пузыря до разрушения поверхности, совершающего в начальный момент сферически-симметричные пульсации в жидкости, покоящейся на бесконечности. Построена модель разрушения гладкой поверхности пульсирующего пузыря в результате роста начальных возмущений, обусловленных тепловыми флуктуациями — источником возмущений минимально возможной амплитуды. Показано, что тепловых флуктуаций достаточно для быстрого разрушения поверхности пульсирующего пузыря не только при больших, но и при умеренных перепадах давления. Определены зависимости числа циклов до разрушения поверхности от перепада давления, даны примеры для газовых пузырей, и приводятся оценки для паровых пузырей.

1. Динамика возмущений, обусловленных тепловыми флуктуациями. Отклонение радиуса r поверхности пузыря от радиуса сферы $R'(t)$ можно представить рядом по присоединенным функциям Лежандра со случайными коэффициентами $a_{nm}(t)$, $b_{nm}(t)$:

$$(1.1) \quad \xi = r - R' = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (a_{nm} P_n^m \cos m\varphi + b_{nm} P_n^m \sin m\varphi).$$

Так как амплитуды двух различных волн статистически независимы и $\overline{a_{nm}^2} = \overline{b_{nm}^2}$, из формулы (1.1) для среднего квадрата отклонения поверхности следует

$$(1.2) \quad \overline{\xi^2} = \sum \sum \overline{a_{nm}^2} (P_n^m(\cos \theta))^2.$$

В начальный момент $t = 0$ средний квадрат амплитуды волны принимаем совпадающим с соответствующим равновесным значением $(\overline{a_{nm}^2})_s$, обусловленным тепловыми флуктуациями:

$$(1.3) \quad t = 0, \quad \overline{a_{nm}^2} = (\overline{a_{nm}^2})_s.$$

Тепловые флуктуации могут быть основным источником начальных возмущений в коротковолновой области, в частности, для пузырьков в двухфазных средах. Следуя известному в физике представлению о равновесных тепловых флуктуациях в распределенных системах (см., например, [1]), которое впервые применено к капиллярной волне на поверхности жидкости в [2], среднюю потенциальную энергию отдельной капиллярной волны U в равновесном состоянии запишем как

© О.В. Воинов, 1994

$$U = (1/2)k'T'$$

(k' — постоянная Больцмана, T' — абсолютная температура). Учитывая, что U пропорциональна квадрату амплитуды возмущения поверхности пузыря, для волны с амплитудой a_{nm} найдем

$$(1.4) \quad \sigma' \gamma(m) \frac{\pi n (n+m)!}{2 (n-m)!} (\overline{a_{nm}^2})_s = \frac{1}{2} k' T',$$

$$n \gg 1; \gamma = 2, m = 0; \gamma = 1, m > 0.$$

Из (1.3) и (1.4) с учетом того, что закон изменения амплитуды не зависит от m [3, 4], для всех $t \geq 0$ вытекает

$$(1.5) \quad \overline{a_{nm}^2} = 2 \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \overline{a_{n0}^2}.$$

В силу следствия теоремы сложения для присоединенных функций Лежандра

$$(P_n)^2 + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} (P_n^m)^2 = 1$$

из (1.2)—(1.5) для коротких волн на пузыре в согласии с однородностью задачи по углу θ получим

$$(1.6) \quad \overline{\xi^2} = \sum_n a_n^2, \quad (\overline{a_n^2})_s = \frac{k'T'}{2\pi n \sigma}.$$

Логарифмическая расходимость суммы (1.6) при $n \rightarrow \infty$ не существенна, так как реально длины волн ограничены снизу микроскопическим масштабом порядка молекулярного.

Зависимость $\overline{a_n^2}$ от времени удобно представить в дискретной форме для двух точек цикла $t = (1/2)T, T - t_* - \delta$ (T — период пульсаций), где малое δ обеспечивает справедливость асимптотического решения (1.5) [4]. Каждой из этих точек припишем свой полуцелый номер N в порядке их следования. Тогда для указанных точек в соответствии с (1.3)—(1.5) [4] имеем

$$(1.7) \quad \overline{a_{nm}^2} = (\overline{a_{nn}^2})_s \exp F(N) (-q(0)/q(R))^{1/2} / R^3,$$

$$F = 2\mu_1 T[N - 0] + 4H(N - [N - 0]), \quad 2N = 1, 2, \dots,$$

$$q = -R''/R + \sigma n^2/R^3, \quad \exp(\mu_1 T) = 2 \exp(2H) \cos(2\sqrt{n} t_0),$$

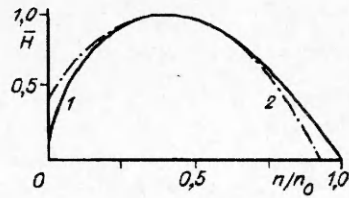
$$I_0 = \int_0^{t_*} \sqrt{q} dt, \quad q(t_*) = q(T - t_*) = 0$$

($[]$ означает целую часть числа). Для вычисления суммы (1.6), определенной (1.7), необходимо оценить поведение H в окрестности индекса n , обеспечивающего $\max H$. В точке $\max H$ справедливо

$$(1.8) \quad \frac{d^2 H}{dn^2} = -2c \frac{K_0}{n^{3/2}}, \quad H = \sqrt{n} K_0, \quad K_0 = \int_{t_*}^{T/2} \sqrt{-q} dt.$$

Согласно универсальной зависимости (4.5) из [4], значение постоянной c должно быть приблизительно одно и то же для любых показателей политропы k и отношений давлений ϵ . Действительно, при $\epsilon = 0$ $c = 0,546; 0,54; 0,536$ для $k = 1,1; 1,4; 1,6$, т.е. расчет подтверждает выводы из существования универсальной зависимости $H(n)$. Аппроксимация H в окрестности $\max H$ параболой

$$(1.9) \quad \overline{H} = H/\max H = 1 - c(n/n_0 - 1)^2, \quad c = 0,54$$



Р и с. 1

удовлетворительно описывает H , как это видно из рис. 1 (линии 1, 2 отвечают $\bar{H}(n)$ [4] и (1.9)). Применяя (1.9) и заменяя для $n \gg 1$ сумму (1.6) на интеграл, с помощью (1.7) получим

$$(1.10) \quad \bar{\xi}^2 = \frac{k'T'}{2\pi R^3} 4^{N_1} e^W \int_1^\infty (\cos(2\sqrt{n}I_0))^{2N_1} e^{-Wc(n/n_0-1)^2} \left(\frac{q(0)}{-q(t_N)} \right)^{1/2} \frac{dn}{n},$$

$$W = 4NH_{\max}, \quad N_1 = [N - 0], \quad 2N = 1, 2, \dots$$

Для произвольного неограниченного числа циклов N_1 предложить аналитический способ вычисления (1.10) затруднительно. Но это можно сделать для небольшого числа циклов N_1 , что представляет основной интерес. Вычисление интеграла (1.10) проведем на основе двух асимптотических приемов. Во-первых, формально устремим $I_0 \rightarrow \infty$, во-вторых, перейдем к пределу $Wc \rightarrow \infty$. Такой подход обоснован для коротких волн с большим индексом ($n \ll 1$), если второй предельный переход не нарушает первый. Отсюда следует условие правомерности указанного подхода

$$(1.11) \quad Wc(\Delta n/n_0)^2 \ll 1, \quad I_0 \Delta n / \sqrt{n_0} = \pi.$$

Первая формула (1.11) есть условие малого изменения экспоненты под интегралом (1.10) при изменении индекса волны на малую величину ($\Delta n \ll n_0$), которая отвечает локально периоду изменения $|\cos(2\sqrt{n}I_0)|$, что отражено второй формулой (1.11). Используя оценки, которые можно найти из формул [3, 4]

$$c \max H \leq 0,25 \sqrt{n_0}, \quad I_0 > \sqrt{\frac{3}{2}} \ln \frac{1}{R_*},$$

из (1.11) имеем ограничение на число циклов

$$(1.12) \quad N_1 \ll \sqrt{n_0}.$$

Отметим, что N_1 — это число циклов, предшествовавших текущему циклу, так что для второй точки цикла $N = N_1 + 1$, для первой $N = N_1 + 1/2$. Естественно, что для первого цикла $N = 1$ никаких ограничений нет, так как $N_1 = 0$. При условии (1.12) можно заменить вклад $\cos$ под интегралом (1.10) на его среднее значение и ввести коэффициент

$$(1.13) \quad e^{\Psi N_1} = \langle 4^{N_1} \cos^{2N_1}(2\sqrt{n}I_0) \rangle = \frac{4^{N_1}}{\pi} \int_0^\pi \cos^{2N_1} \varphi d\varphi,$$

$$e^{\Psi N_1} = 2, 6, 20, \dots, \quad \Psi = 0,69; 0,9; 1; \dots$$

Кроме перечисленных формул используем также соотношение

$$(1.14) \quad R^{-3}(-q(t_N))^{1/2} \geq R_m^{-3}(-q(T/2))^{1/2},$$

в котором для первой или средней точки цикла имеет место равенство, а для второй — неравенство, но на самом деле равенство по порядку величины. Знак $>$ неравенства важен, чтобы получить для $\bar{\xi}^2$ обоснованную оценку снизу. Переходя в (1.10) к пределу $I_0 \rightarrow \infty$, затем $Wc \rightarrow \infty$, используя (1.13), (1.14), найдем

$$(1.15) \quad \bar{\xi}^2 = \frac{k'T'}{2\sqrt{\pi c \sigma'}} \left(\frac{q(0)}{-q(T/2)} \right)^{1/2} \frac{\exp(W + \Psi N_1)}{R_m^3 \sqrt{W}}.$$

Формула для среднего квадрата отклонения поверхности (1.15) справедлива для маловозмущенной поверхности, пока характерная величина отклонения поверхности $\sqrt{\bar{\xi}^2}$ намного меньше длины волны максимального роста Λ . Когда эти величины одного порядка, происходит переход от линейной стадии роста возмущений к нелинейной. Условие разрушения первоначально гладкой поверхности пузыря, означающее конец линейной стадии роста возмущений, можно принять приближенно:

$$(1.16) \quad \sqrt{\bar{\xi}^2} = \frac{1}{4} \Lambda, \quad \Lambda = \frac{2\pi}{n_0} R', \quad R' = R_m R'_0.$$

Вид условия разрушения (1.16) с точностью до множителя порядка 2 мало существен для расчетов времени жизни пузыря до разрушения, поскольку разрушающее число пульсаций N логарифмически зависит от указанного множителя.

Число циклов до разрушения N определяется из уравнений (1.15), (1.16) с учетом формул для n_0 , K_0 , $H_{\max}$ (4.2) и (5.1) из [4], а также формул (1.7), (1.9), (1.10), (1.13), значений k' , абсолютной температуры T' , поверхностного натяжения σ' , начальных радиуса R'_0 и давления p_0 , перепада давления $1/\epsilon$ и показателя политропы k .

2. Длительность пульсаций пузыря до разрушения поверхности. Формулы (1.10), (1.15) для квадрата отклонения радиуса пригодны для дискретных значений — целого числа $2N$ половин длины интервала экспоненциального роста. С точки зрения представления результатов удобно приближенно распространить формулы на непрерывное число циклов, учитывая этим качественно возможность разрушения в произвольной точке интервала экспоненциального роста возмущений. Результаты расчетов по (1.15) и (1.16) зависимости числа циклов до разрушения N от ϵ даны на рис. 2 при различных k и R'_0 для $\sigma' = 0,072$ Н/м, соответствующего воде, и $p_0 = 0,1$ МПа. Для простоты представления результатов вязкость на графике не учтена. Отличие кривых из-за вязкости может достигать не более 25 % от приведенных, если иметь в виду чистую воду без добавок при нормальной температуре. Линии 4, 5 отвечают $k = 1,66$ (гелий) и $k = 1,31$ (метан или углекислый газ) при $R'_0 = 0,2$ см. Важно, что число циклов пульсаций до разрушения невелико. При $\epsilon = 0,1$ достаточно одного цикла пульсаций, чтобы чрезвычайно малые начальные возмущения, обусловленные тепловыми флуктуациями, выросли до конечных размеров. Это в 2 раза меньше, чем соответствующая оценка числа разрушающих циклов в [3]. Из рис. 2 видно, что увеличение k от 1,4 до 1,66 влияет на N примерно так же, как уменьшение R'_0 от 0,2 до 0,1 см. Линии 1—3 даны для $R'_0 = 0,05; 0,1; 0,2$ см при $k = 1,4$ (воздух или водород).

Интересно также оценить время разрушения поверхности парового пузырька, вводя приближенно понятие об аналогичном газовом пузырьке. Это имеет смысл, если число Флоршютца—Чао [5] небольшое. Степень отличия парового пузырька от газового, обусловленная интенсивностью фазового перехода на межфазной границе, может быть охарактеризована параметром, аналогичным параметру Флоршютца—Чао [5]:

$$\Phi' = \frac{\rho_g \Delta T'}{\rho_g l} \frac{3}{R'} \sqrt{\kappa_f T'}.$$

Здесь $\Delta T'$ — изменение температуры поверхности вдоль кривой насыщения; c_f и κ_f — теплоемкость и температуропроводность жидкости; l — теплота фазового перехода; ρ_g — плотность газа. Если в начальный момент при большом радиусе ($R' \sim R'_0$) $\Phi' < 1$, то при $R'_0 \rightarrow 0$ $\Phi' \rightarrow 0$ из-за уменьшения

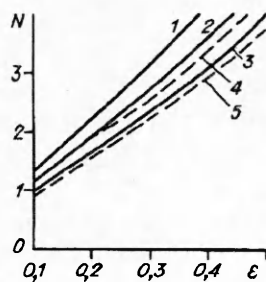


Рис. 2

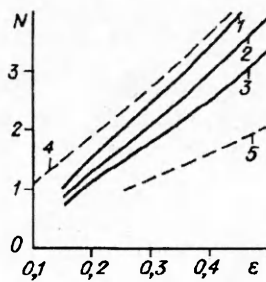


Рис. 3

$\tau \sim R^{5/2}$ и $1/\rho_g \sim R^3$ и пузырек при захлопывании близок к газовому, конденсация пара не существенна при малых радиусах ($R \sim R_m$), так как $\Phi' \ll 1$. Поэтому пузырек при $R' \ll R'_0$ эквивалентен в смысле динамики границы газовому пузырьку. Однако в силу уменьшенной массы газа внутри пузырька по сравнению с начальной (примерно в $1 - \Phi'$ раз) реальные значения эффективного начального давления газа заметно меньше, чем p_0 , и изменена также эффективная начальная температура. Эффективный перепад давления $1/\epsilon$ заметно больше, чем отношение p_∞/p_0 . Поэтому расчеты по модели газового пузырька с $\epsilon = p_0/p_\infty$ должны давать оценку сверху для числа циклов до разрушения, которая представляет несомненный интерес. Результаты расчетов числа циклов до разрушения поверхности газового пузырька, аналогичного по своим параметрам паровому, даны на рис. 3 для паровых пузырьков в воде ($k = 1,32$) при $R'_0 = 0,05; 0,1; 0,2$ см (кривые 1—3). Линия 4 — вариант $R'_0 = 0,05$ см, $\sigma' = 0,056$ Н/м, а 5 — оценочный расчет для фреона-113 ($k = 1,08$, $\sigma' = 0,015$ Н/м, $T_k = 47,6^\circ\text{C}$, $p_0 = 0,1$ МПа). Из-за близости критической точки для фреона при $\epsilon < 0,3$ расчет не проводился и для пароводяных пузырьков при $\epsilon = 0,15$ прекращался.

В расчетах для пузырьков в воде учитывалось изменение поверхностного натяжения с давлением в пузырьке $\sigma'(p)$ вдоль кривой насыщения (линии 1—3 рис. 3). При этом использовались известные табличные данные $\sigma'(p)$. За величину p принималось среднее давление в интервале экспоненциального роста волны. Из рис. 3 видно, что влияние изменения поверхностного натяжения на разрушение может быть заметным. При $\epsilon = 0,15$ отличие от случая $\sigma' = \text{const}$ достигает 1,5 раза. Для пароводяных пузырьков число циклов до разрушения поверхности заметно больше, чем для фреона, как это показывает расчет на модели их газовых аналогов.

В заключение отметим важность в общем случае учета вязкости жидкости, который можно производить по формулам [4]. Так, если увеличить вязкость воды за счет добавок глицерина в 5 раз, то число циклов до разрушения возрастет до 2 раз по сравнению с рис. 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Левин М.Л., Рытов С.М. Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике. — М.: Наука, 1967.
2. Мандельштам Л.И. Полное собрание трудов. — М.: Изд-во АН СССР, 1948. — Т. 1.
3. Воинов О.В., Перепелкин В.В. Об устойчивости поверхности газового пузыря, пульсирующего в жидкости // ПМТФ. — 1989. — № 3.
4. Воинов О.В. Динамика капиллярных волн на пузыре при нелинейных пульсациях в жидкости малой вязкости // ПМТФ. — 1994. — № 3.
5. Florschuetz L.W., Chao B.T. On the mechanics of vapor bubble collapse // Trans. ASME. Ser. C.J. Heat Transfer. — 1965. — V. C87, N 2.

г. Тюмень

Поступила 18/X 1990 г.