УДК 539.3

МОДЕЛЬ РАЗРУШЕНИЯ КВАЗИХРУПКИХ СТРУКТУРИРОВАННЫХ МАТЕРИАЛОВ

В. Д. Кургузов, Н. С. Астапов, И. С. Астапов*

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
630090 Новосибирск, Россия
* Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, 119192 Москва, Россия
E-mails: kurguzov@hydro.nsc.ru, nika@hydro.nsc.ru, velais@imec.msu.ru

Анализируется применимость модифицированной модели Леонова — Панасюка — Дагдейла для описания движения трещины нормального отрыва в материалах со структурой в условиях плоского напряженного состояния. Для квазихрупких материалов предложены уточненные формулы критической длины зоны предразрушения и критической нагрузки, содержащие структурный параметр. Проведено обобщение модели Корнева на случай квазивязких материалов. Выполнено численное моделирование распространения зон пластичности в квадратных пластинах из биметалла и однородного материала при квазистатическом нагружении. В численной модели использована лагранжева формулировка уравнений механики деформируемого твердого тела, наиболее предпочтительная для моделирования деформирования тел из упругопластического материала при больших деформациях. Обнаружено, что результаты численных экспериментов хорошо согласуются с результатами расчетов по аналитической модели разрушения материалов со структурой.

Ключевые слова: критерии разрушения, зона предразрушения, характерный размер элемента структуры, диаграмма квазивязкого разрушения.

Введение. В обзоре экспериментальных работ [1] отмечено, что одним из наиболее важных факторов, вызывающих разрушение в машиностроительных конструкциях, является наличие скрытых трещин или трещиноподобных дефектов. Кроме того, указаны проблемы построения аналитических моделей процесса разрушения в рамках линейной механики разрушения (ЛМР), особенно для конструкций сложной геометрии в условиях ползучести. В [2] для описания зоны пластичности использованы атомистические представления физики твердого тела и теории дислокаций. Это позволило выделить в зоне пластичности полукруг (ядро) с центром в вершине реальной трещины, внутри которого неприменимы законы ЛМР. Проведено численное исследование характеристик указанного ядра в зависимости от физических параметров материалов, в том числе от работы адгезии. Поскольку многие используемые в [2] параметры являются трудновычислимыми или оцениваются эвристически, в этой работе предложен подход, позволяющий лишь качественно описать механизм разрушения.

Представляют практический интерес решения задач о трещинах в телах конечных размеров, но для таких случаев не существует решений в замкнутой форме. Данные за-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14-08-00113) и в рамках Программы фундаментальных исследований РАН (н. г. 01201365412).

дачи сложны в силу граничных условий [3]. В работе [4] показано, что критерии разрушения, учитывающие характерный размер структуры материала, позволяют "расширить область применения по сравнению с традиционными критериями", хотя "вопрос о том, как этот размер связан с составом, структурой и, возможно, с другими параметрами реального материала, до сих пор не изучен". Частично описываемая ниже модель разрушения описана в [5], но и в этой работе отсутствуют конечные простые формулы, пригодные для инженерных расчетов. Наиболее близкие к рассматриваемым в данной работе проблемы изучены в работе [6], в которой при описании процесса разрушения учитываются пределы упругости составляющих композит материалов, но не учитывается их структура.

В настоящей работе при описании разрушения структурированных материалов используется модифицированная модель зоны предразрушения Леонова — Панасюка — Дагдейла с необходимым и достаточным критериями разрушения (подход Нейбера — Новожилова). Модификация этой аналитической модели выполнена В. М. Корневым в работах [7, 8] и используется при решении различных задач о квазихрупком разрушении, поэтому далее она называется моделью Корнева. Главным отличием модели Корнева от классической модели Леонова — Панасюка — Дагдейла является наличие ширины зоны предразрушения — дополнительного параметра, моделирующего поперечник зоны пластичности. Введение этого параметра позволяет более точно оценить разрушение структуры зоны предразрушения, используя информацию о параметрах стандартных ($\sigma{-}\varepsilon$)-диаграмм материалов (σ — напряжение, ε — деформация). Данная работа является продолжением работ [9–12]. Ниже приведены основные положения модели Корнева для трещины нормального отрыва, расположенной в центре структурированной биметаллической квадратной пластины размером $L \times L$ вдоль прямой линии раздела сред [9, 11]. Проводится уточнение приближенных соотношений модели Корнева. На примерах трещин в биметаллической [10] и однородной структурированной [12] пластинах проводится сравнение результатов расчетов по уточненной модели с результатами численного эксперимента.

1. Модель Корнева. Рассмотрим квадратную биметаллическую пластину размером $L\times L$ с центральной внутренней трещиной длиной $2l_0$, подвергнутую осевому растяжению напряжениями σ_∞, заданными на кромках. Предположим, что выполняются равенства $E_1 = E_2$, $\mu_1 = \mu_2$, где E_1, μ_1 и E_2, μ_2 — модули Юнга и коэффициенты Пуассона для материалов 1 и 2 соответственно. Пусть материалы верхней и нижней частей пластины различаются только пределами текучести: $\sigma_{Y1} < \sigma_{Y2}$. Введем систему координат Oxy в плоскости квадратной пластины [7–10]. Начало системы координат совпадает с вершиной фиктивной трещины, а вершина реальной трещины имеет абсциссу $x = -\Delta$ (рис. 1). Ось ординат Oy перпендикулярна плоскости, в которой распространяется трещина.

При построении прямоугольной зоны предразрушения размером $\Delta \times a$ перед вершиной трещины в биметалле и диаграмм разрушения используется достаточный критерий разрушения (подход Нейбера — Новожилова)

$$\frac{1}{kr_1}\int\limits_0^{nr_1} \sigma_y(x,0)\,dx \leqslant \sigma_{Y1}, \qquad x \geqslant 0; \tag{1}$$

$$2\nu(x) \leqslant \delta_1^*, \qquad -\Delta \leqslant x < 0. \tag{2}$$

Здесь $\sigma_y(x,0)$ — нормальное напряжение на продолжении трещины; n, k — натуральные числа ($1 \leqslant k \leqslant n \leqslant 4$); nr_1 — интервал осреднения; r_1 — характерный линейный размер элемента структуры материала 1; функция $\nu = \nu(x)$ — величина полураскрытия трещины; $\delta_1^* = (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{01})a$ — критическая величина раскрытия модельной трещины для однородного материала; ε_{01} — максимальное упругое относительное удлинение; ε_{11} — максимальное относительное удлинение менее прочного ($\sigma_{Y1} < \sigma_{Y2}$) материала 1.

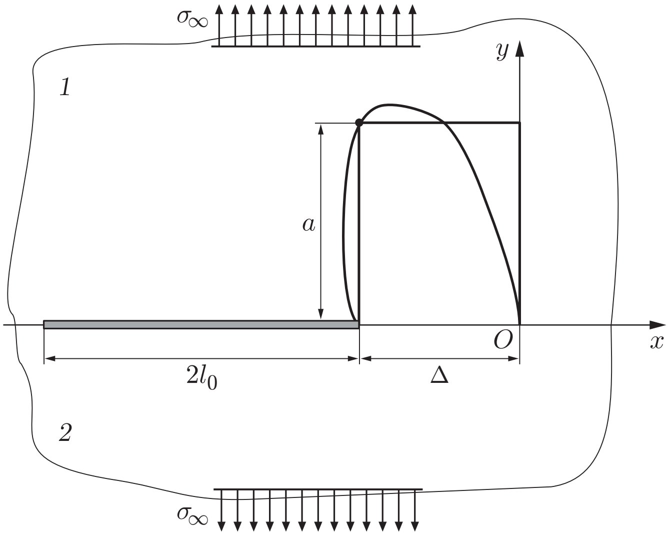

Рис. 1. Аппроксимация зоны пластичности в вершине трещины, расположенной на границе раздела сред:
1 — материал 1, *2* — материал 2

Поперечник a зоны предразрушения отождествляется с половиной поперечника (в условиях пластичности находится лишь один менее прочный металл) зоны пластичности [9, 13] в вершине реальной трещины однородного материала:

$$a = 5(K_{\mathrm{I}\infty}/\sigma_{Y1})^2/(8\pi). \tag{3}$$

При $x = -\Delta$ неравенство (2) превращается в равенство [11]

$$\frac{8\varepsilon_{01}}{\sigma_{Y1}}\,(K_{\mathrm{I}\infty} + K_{\mathrm{I}\Delta})\sqrt{\frac{\Delta}{2\pi}} = (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{01})\,\frac{5Y^2}{8\pi}\Big(\frac{\sigma_\infty}{\sigma_{Y1}}\Big)^2 l, \tag{4}$$

где $2l = 2l_0 + 2\Delta$ — длина модельной трещины. В равенстве (4) для коэффициента интенсивности напряжений (КИН) $K_{\mathrm{I}\infty}$, обусловленного напряжением σ_∞, будем использовать учитывающую конечные размеры образца аппроксимирующую формулу [3. С. 74] для центральной трещины

$$K_{\mathrm{I}\infty} = Y\sigma_\infty\sqrt{l},$$

где $Y = \sqrt{\pi/\cos(\pi l/L)}$, а для КИН, обусловленного постоянным напряжением σ_{Y1}, действующим в соответствии с моделью Леонова — Панасюка — Дагдейла, — формулу

$$K_{\mathrm{I}\Delta} = -\sigma_{Y1}\sqrt{\pi l}\,[1 - 2\arcsin(1 - \Delta/l)/\pi]. \tag{5}$$

Используя для упрощения выражения (5) приближение

$$\arcsin(1 - \Delta/l) \approx \pi/2 - \sqrt{2\Delta/l}, \tag{6}$$

получаем $K_{\mathrm{I}\Delta} \approx -2\sigma_{Y1}\sqrt{2\Delta/\pi}$. Запишем равенство (4) в виде квадратного уравнения относительно $\sqrt{\Delta/l}$:

$$\frac{8\varepsilon_{01}}{\sigma_{Y1}}\Big(\frac{Y\sigma_\infty}{\sqrt{2\pi}} - \frac{2\sigma_{Y1}}{\pi}\sqrt{\frac{\Delta}{l}}\Big)\sqrt{\frac{\Delta}{l}} = (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{01})\,\frac{5}{8}\Big(\frac{Y\sigma_\infty}{\sqrt{\pi}\sigma_{Y1}}\Big)^2. \tag{7}$$

Отбрасывая в соотношении (7) малое слагаемое, содержащее Δ/l, получаем соответствующее наименьшему корню приближенное выражение для критической длины зоны предразрушения в менее прочном материале:

$$\Delta = 25\Big(\frac{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{01}}{\varepsilon_{01}}\Big)^2\Big(\frac{Y\sigma_\infty}{\sigma_{Y1}}\Big)^2\frac{l}{2^{11}\pi}. \tag{8}$$

При критических значениях σ_∞ и Δ неравенство (1) также обращается в равенство. Подставляя в (1) приближенное представление нормальных напряжений $\sigma_y(x,0)$ на продолжении центральной трещины в образце конечных размеров [11, 14]:

$$\sigma_y(x,0) = \frac{K_{\mathrm{I}\infty}}{\sqrt{2\pi x}} + \frac{L}{L-2l}\,\sigma_\infty + \frac{K_{\mathrm{I}\Delta}}{\sqrt{2\pi x}}, \qquad x \geqslant 0, \tag{9}$$

после интегрирования имеем равенство

$$(K_{\mathrm{I}\infty} + K_{\mathrm{I}\Delta})\sqrt{\frac{2nr_1}{\pi}} + \frac{L}{L-2l}\,\sigma_\infty n r_1 = \sigma_{Y1} k r_1. \tag{10}$$

В (10) также подставляем приближение (6) для выражения $K_{\mathrm{I}\Delta} \approx -2\sigma_{Y1}\sqrt{2\Delta/\pi}$, из которого исключаем Δ с помощью представления (8). Окончательно для критического напряжения σ_∞ получаем соотношение

$$\frac{\sigma_\infty}{\sigma_{Y1}} = \frac{1}{Y}\Big[\sqrt{\frac{2l}{\pi r_1}\,\frac{n}{k^2}}\Big(1 - \frac{5}{16\pi}\,\frac{\varepsilon_{11}-\varepsilon_{01}}{\varepsilon_{01}}\Big) + \frac{L}{L-2l}\,\frac{1}{Y}\,\frac{n}{k}\Big]^{-1}. \tag{11}$$

Формулы (8), (11) описывают критическую длину зоны предразрушения Δ и критическое напряжение σ_∞ разрушения, в случае если трещина расположена вдоль границы раздела сред, а приближенное представление нормальных напряжений $\sigma_y(x,0)$ на продолжении трещины выбрано в виде (9).

Введем безразмерное критическое напряжение $\lambda = \sigma_\infty/\sigma_{Y1}$ (критическое напряжение, отнесенное к пределу текучести) и параметр $\chi = (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{01})/\varepsilon_{01}$, который можно назвать показателем пластичности или величиной, обратной показателю хрупкости. Тогда после ряда преобразований формулы (8), (11) можно записать в виде

$$\Delta = 25\chi^2\lambda^2 l Y^2/(2^{11}\pi); \tag{12}$$

$$\lambda = \frac{k}{n}\Big[\frac{Y}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{2l}{nr_1}}\Big(1 - \frac{5\chi}{16\pi}\Big) + \frac{L}{L-2l}\Big]^{-1}. \tag{13}$$

Формула (13), более компактная по сравнению с (11), позволяет лучше представить результаты расчетов по рассматриваемой модели.

2. Уточненная модель Корнева. Проанализируем полученную систему формул (12), (13). Система уравнений (1), (2) равносильна системе уравнений (4), (10), записанной с использованием КИН, при условии, что в обеих системах выбраны одни и те же функция $\sigma_y(x,0)$ нормального напряжения на продолжении трещины и функция величины полураскрытия трещины $\nu = \nu(x)$. В уравнениях (4), (10) использовано приближение (6) для представления коэффициента $K_{\mathrm{I}\Delta}$. Это приближение справедливо в силу неравенства $\Delta/l \ll 1$. Действительно, погрешность приближения (6) не превышает 0,4 % при $0 \leqslant x \leqslant 0{,}1$ ($x = \Delta/l$) и не превышает 6 % при увеличении x до значения $x \approx 0{,}4288$. Кроме того, при решении уравнения (7) отбрасывается слагаемое, содержащее Δ/l. Таким образом, при решении исходного уравнения (4) не учитывается (полагается равным нулю) коэффициент $K_{\mathrm{I}\Delta}$, описывающий зону предразрушения. Действительные корни уравнения (7)

$$\Delta_{+,-} = \pi Y^2\lambda^2 l\big(1 \pm \sqrt{1 - 5\chi/(4\pi)}\big)^2/32 \tag{14}$$

существуют лишь при условии $\chi \leqslant 4\pi/5 \approx 2{,}5$. При $\chi \ll 2{,}5$ для меньшего корня Δ_- с учетом двух членов биномиального разложения получаем приближенное равенство $\Delta_- \approx \pi Y^2\lambda^2 l(5\chi/(8\pi))^2/32 = 25\chi^2\lambda^2 lY^2/(2^{11}\pi)$, которое совпадает с выражениями (8), (12). Следовательно, приближение (8) применимо лишь при условии $\chi \ll 2{,}5$. Заметим, что это ограничение существенно сильнее ограничения $\chi \leqslant 16\pi/5 \approx 10$, следующего из формулы (11) модели Корнева при $n = k = 1$ [9–11].

Уточним выражение для критической длины Δ зоны предразрушения, не применяя в соотношении (5) приближение (6). Для этого запишем систему уравнений (4), (10) следующим образом:

$$\frac{K_{\mathrm{I}\infty} + K_{\mathrm{I}\Delta}}{\sigma_{Y1}} = \Big(\frac{k}{n} - \frac{L\lambda}{L-2l}\Big)\sqrt{\frac{\pi n r_1}{2}}\,; \tag{15}$$

$$\frac{K_{\mathrm{I}\infty} + K_{\mathrm{I}\Delta}}{\sigma_{Y1}}\sqrt{\frac{\Delta}{2\pi}} = \frac{\chi c Y^2\lambda^2 l}{8\pi}. \tag{16}$$

Здесь $c = 5/8$ в случае плоского напряженного состояния. В уравнение (16) подставим выражение $K_{\mathrm{I}\infty} + K_{\mathrm{I}\Delta}$ из уравнения (15), а в уравнение (15) — соотношение $K_{\mathrm{I}\infty} = Y\sigma_\infty\sqrt{l}$ и соотношение (5) для коэффициента $K_{\mathrm{I}\Delta}$. В результате получаем систему уравнений, равносильную системе уравнений (15), (16), а следовательно, и исходной системе уравнений (1), (2):

$$\frac{\lambda Y}{\sqrt{\pi}} - \Big[1 - \frac{2}{\pi}\arcsin\Big(1 - \frac{\Delta}{l}\Big)\Big] = \Big(\frac{k}{n} - \frac{L\lambda}{L-2l}\Big)\sqrt{\frac{n r_1}{2l}}\,; \tag{17}$$

$$\Big(\frac{k}{n} - \frac{L\lambda}{L-2l}\Big)\sqrt{\frac{\pi n r_1}{2}}\sqrt{\frac{\Delta}{2\pi}} = \frac{\chi c Y^2\lambda^2 l}{8\pi}. \tag{18}$$

Систему уравнений (17), (18) будем называть точной. Из уравнения (18) при условии, что выражение в скобках не равно нулю ($K_{\mathrm{I}\infty} + K_{\mathrm{I}\Delta} \neq 0$), получим точное выражение для длины зоны предразрушения в образце конечных размеров из биматериала

$$\sqrt{\Delta} = \frac{\chi c Y^2\lambda^2 l}{4\pi}\Big[\Big(\frac{k}{n} - \frac{L\lambda}{L-2l}\Big)\sqrt{n r_1}\Big]^{-1},$$

которое при $c = 5/8$ можно записать в виде, удобном для проведения сравнения с формулой (12):

$$\Delta = \frac{25\chi^2\lambda^2 Y^4}{2^{11}\pi^2}\,\frac{2l^2}{n r_1}\Big(\frac{k}{n\lambda} - \frac{L}{L-2l}\Big)^{-2}. \tag{19}$$

Заметим, что в отличие от формулы (12) выражение (19) для длины зоны предразрушения явно зависит (не опосредованно через λ) от параметров k и n, характеризующих поврежденность исходного материала, а также зависит от характерного размера r_1 элемента структуры материала. Выражение (19) является точным, поскольку оно следует из уравнений (4), (10) при условии $K_{\mathrm{I}\infty} = Y\sigma_\infty\sqrt{l}$, причем никакие приближения для коэффициента $K_{\mathrm{I}\Delta}$ в данном случае не используются.

Если в уравнении (17) использовать приближение (6), то с учетом равенства (18) получим квадратное относительно λ уравнение

$$\Big(\Big(\frac{L}{L-2l}\Big)^2\sqrt{\frac{\pi n r_1}{2l}}+\frac{LY}{L-2l}+\sqrt{\frac{2l}{\pi n r_1}}\,\frac{\chi c Y^2}{2\pi}\Big)\lambda^2-$$
$$-\frac{k}{n}\Big(Y+\frac{2L}{L-2l}\sqrt{\frac{\pi n r_1}{2l}}\,\Big)\lambda+\frac{k^2}{n^2}\sqrt{\frac{\pi n r_1}{2l}}\approx 0. \qquad (20)$$

Систему уравнений (18), (20) будем называть приближенной. Корни уравнения (20) можно записать следующим образом:

$$\lambda_{+,-}\approx\frac{k}{2n}\Big(\frac{2L}{L-2l}+\frac{Y}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{2l}{nr_1}}\,\Big(1\pm\sqrt{1-\frac{2\chi c}{\pi}}\,\Big)\Big)\Big/$$
$$\Big/\Big(\frac{L^2}{(L-2l)^2}+\frac{LY}{L-2l}\sqrt{\frac{2l}{\pi n r_1}}+\frac{\chi c Y^2 l}{\pi^2 n r_1}\Big). \qquad (21)$$

Заметим, что в случае плоского напряженного состояния ($c = 5/8$) действительные корни $\lambda_{+,-}$ уравнения (21), как и корни уравнения (14), существуют лишь при условии $\chi \leqslant 4\pi/5 \approx 2{,}5$, причем они неотрицательны.

3. Сравнение результатов аналитических и численных расчетов. Формулы (12), (13) модели Корнева и (19), (21) уточненной модели позволяют вычислить длину Δ зоны предразрушения и характерный линейный размер r_1 элемента структуры материала по значению критической нагрузки λ. Проведем сравнение результатов расчета по этим формулам с результатами численного моделирования.

3.1. *Длина зоны предразрушения в биметалле.* В работе [10] рассмотрена биметаллическая квадратная пластина размером $100{,}0 \times 100{,}0 \times 0{,}4$ мм с центральной трещиной длиной $2l_0 = 30$ мм в условиях плоского напряженного состояния, растягиваемая напряжениями σ_∞, приложенными на кромке. Материалы пластины имели следующие характеристики: $E_1 = E_2 = 2\cdot 10^5$ МПа, $\mu_1 = \mu_2 = 0{,}25$, $\sigma_{Y1} = 340$ МПа, $\sigma_{Y2} = 500$ МПа. В [10] представлены результаты, полученные методом конечных элементов (МКЭ) при численном моделировании реальной формы пластической зоны в окрестности вершины трещины нормального отрыва, распространяющейся вдоль границы раздела двух металлов. В таблице приведены значения заданной критической разрушающей нагрузки λ и соответствующей ей длины зоны предразрушения Δ_E, вычисляемой с помощью МКЭ [10].

Проведем сравнение значений Δ_E, полученных в численном эксперименте, с результатами прогнозирования длины Δ зоны предразрушения при заданной нагрузке λ с помощью аналитической модели. Точные формулы (4), (10) помимо параметров σ_∞, σ_{Y1}, Δ содержат

Значения длины Δ и r_1
при различных значениях критической нагрузки λ

λ	МКЭ	Исходная модель		Уточненная модель			
	Δ_E, мм	Δ_K, мм	r_{1K}, мм	Δ_M, мм	r_{1M}, мм	Δ_P, мм	r_{1P}, мм
0,0680	0,040	0,000 44	0,166	0,000 52	0,164	0,083	0,0010
0,0752	0,060	0,000 54	0,208	0,000 63	0,205	0,101	0,0013
0,0821	0,081	0,000 65	0,253	0,000 75	0,250	0,120	0,0016
0,0889	0,102	0,000 76	0,303	0,000 88	0,300	0,141	0,0019
0,1026	0,146	0,001 01	0,423	0,001 18	0,418	0,188	0,0026
0,1163	0,204	0,001 30	0,569	0,001 51	0,562	0,241	0,0035
0,1436	0,356	0,001 98	0,955	0,002 30	0,944	0,368	0,0059
0,1710	0,543	0,002 80	1,498	0,003 26	1,480	0,522	0,0093
0,2326	1,219	0,005 19	3,550	0,006 04	3,509	0,965	0,0220
0,3352	3,902	0,010 80	12,100	0,012 50	11,960	2,004	0,0749

неизвестные механическую характеристику материала χ и геометрические параметры r_1, l конструкции. Как показывают расчеты с помощью модели Корнева [10], при заданных значениях $n = k = 1$, $l = 15$ мм параметры χ и r_1 меняются в зависимости от нагрузки λ. Если характерный линейный размер r_1 элемента структуры материала считать константой, то при увеличении критической нагрузки λ в пять раз (см. табл. 1 в [10]) показатель пластичности χ увеличится в три раза, и наоборот, при фиксированном значении χ меняется значение r_1 в зависимости от нагрузки. По-видимому, эта зависимость обусловлена влиянием межфазного слоя на участках, расположенных вблизи границы раздела сред в композите. Возможность увеличения предела прочности материала в результате физико-химических взаимодействий фаз подробно обсуждается в работе [15].

Напомним, что в уравнениях механики сплошной среды, используемых при численном моделировании с помощью МКЭ, параметр r_1 не содержится [12], поэтому проведем сравнение результатов следующим образом. Предположим, что для композита, составленного из указанных в [10] материалов, существуют значения χ и r_1, одни и те же для всех значений нагрузки λ, приведенных в таблице. Положим $l = 15$ мм. Тогда при фиксированной нагрузке λ_1 система точных уравнений (17), (18) при $n = k = 1$ содержит три неизвестные величины: Δ_1, χ и r_1, причем последние две неизвестные имеют одни и те же значения для любой нагрузки λ_2, которой соответствует определенное значение длины зоны предразрушения Δ_2.

Составим систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными χ, r_1, Δ_1, Δ_2, соответствующими двум различным значениям нагрузки λ_1, λ_2, и найдем ее решение численно. При $\lambda_1 = 0{,}048$, $\lambda_2 = 0{,}3352$ получаем $\chi \approx 0{,}683$, $r_1 \approx 0{,}0768$, $\Delta_1 \approx 0{,}000\,26$, $\Delta_2 \approx 1{,}956$. Полагая $\chi = 0{,}683$, для каждого значения нагрузки в таблице вычислим значения Δ и r_1, решив систему точных уравнений (17), (18). Расчеты показали, что существует два различных решения: Δ_M, r_{1M} и Δ_P, r_{1P} (см. таблицу). Значения Δ_M плохо согласуются со значениями Δ_E, полученными в результате численного моделирования: Δ_M в $80 \div 300$ раз меньше Δ_E. Наоборот, значения Δ_P удовлетворительно согласуются со значениями Δ_E. Кроме того, заметим, что значения Δ_P изменяются в диапазоне $26r_{1P} \div 86r_{1P}$. В таблице также приведены вычисленные по формуле (12) модели Корнева значения длины зоны предразрушения Δ_K, которые при всех рассмотренных значениях нагрузки достаточно хорошо аппроксимируют значения Δ_M, причем $\Delta_K < \Delta_M$. Значения характерного линейного размера r_{1K} элемента структуры материала в модели Корнева, приведенные в таблице, вычислены по заданной нагрузке с помощью равенства (13). Для выяснения влияния приближения (6) на точность вычислений для каждого значения нагрузки по формуле (14) находились корни квадратного уравнения (7). Оказалось, что для всех значений нагрузки $\lambda \leqslant 0{,}1436$ корни $\Delta_{+,-}$ уравнения (7) с точностью до трех значащих цифр совпадают с приведенными в таблице значениями Δ_P, Δ_M и с решениями приближенной системы уравнений (18), (20). Результаты расчетов также показали, что для данной нагрузки λ знаку "+" в формуле (21) соответствует значение r_{1P} в таблице, а знаку "−" — значение r_{1M}.

Таким образом, в результате анализа данных, приведенных в таблице, можно сделать вывод, что именно значение λ_-, вычисленное по формуле (21), является значением критической нагрузки при разрушении квазихрупкого типа. При $\chi = 0$ (хрупкое разрушение) имеем равенство $\lambda_- \approx k/(L/(L-2l) + Y\sqrt{2l/(nr_1)}\,/\sqrt{\pi}\,)/n$, совпадающее с выражением, получаемым по формуле (13) модели Корнева в случае хрупкого разрушения.

Однако в работе [12] показано, что при численном моделировании биметаллической квадратной пластины с такими же характеристиками, как у исследуемой в данной работе и в [10] пластины, рассматривался квазивязкий тип разрушения. Результаты численного моделирования, приведенные в работе [10] (значения Δ_E в таблице), существенно лучше согласуются с результатами вычисления по формуле (21) в случае λ_+ (значения Δ_P в таблице). Следовательно, формула (21) в случае λ_+ описывает разрушение квазивязкого типа. Приведем дополнительные доводы для обоснования этого утверждения.

3.2. *Диаграммы разрушения в биматериале.* В модели Корнева [9, 10] в качестве приближенного представления нормальных напряжений $\sigma_y(x,0)$ на продолжении трещины использовано отличающееся от (9) выражение

$$\sigma_y(x,0) \approx \frac{\sigma_\infty |x+l|}{\sqrt{(x+l)^2 - l^2}} + \frac{K_{\mathrm{I}\Delta}}{\sqrt{2\pi x}}, \qquad K_{\mathrm{I}\infty} = \sigma_\infty \sqrt{\pi l}, \tag{22}$$

не учитывающее конечные размеры пластины. В этом случае для критической длины Δ зоны предразрушения в менее прочном материале и для безразмерного критического напряжения λ в [10] получены соотношения

$$\Delta = 25\chi^2\lambda^2 l/2^{11}; \tag{23}$$

$$\lambda = \frac{k}{n}\Big(\sqrt{1 + \frac{2l}{nr_1}} - \frac{5\chi}{16\pi}\sqrt{\frac{2l}{nr_1}}\,\Big)^{-1}. \tag{24}$$

Заметим, что при выборе функции $\sigma_y(x,0)$ в виде (22) длина Δ в выражении (23) модели Корнева не зависит явно от параметров k, n, r_1, так же как в формуле (12). В уточненной модели с функцией $\sigma_y(x,0)$ в виде (22) определяющие уравнения, равносильные системе уравнений (1), (2) и аналогичные соотношениям (17), (18), записываются следующим образом:

$$\lambda\sqrt{1 + \frac{nr_1}{2l}} - \frac{k}{n}\sqrt{\frac{nr_1}{2l}} = 1 - \frac{2}{\pi}\arcsin\Big(1 - \frac{\Delta}{l}\Big); \tag{25}$$

$$\Big[\lambda - \Big(\lambda\sqrt{1 + \frac{nr_1}{2l}} - \frac{k}{n}\sqrt{\frac{nr_1}{2l}}\,\Big)\Big]\sqrt{\Delta} = \frac{\sqrt{2l}\,\chi c\lambda^2}{8}. \tag{26}$$

Из (25), (26) находим выражения для критической длины зоны предразрушения Δ и (с помощью приближения (6)) критического напряжения разрушения λ:

$$\Delta = \frac{\chi^2 c^2 \lambda^4 l^2}{16 n r_1}\Big[\frac{k}{n} - \lambda\Big(\sqrt{1 + \frac{2l}{nr_1}} - \sqrt{\frac{2l}{nr_1}}\,\Big)\Big]^{-2}; \tag{27}$$

$$\lambda_{+,-} \approx \frac{k}{2n}\sqrt{\frac{nr_1}{2l}}\Big(2\sqrt{1 + \frac{nr_1}{2l}} - 1 \pm \sqrt{1 - \frac{2\chi c}{\pi}}\,\Big) \Big/ \Big(1 + \frac{nr_1}{2l} - \sqrt{1 + \frac{nr_1}{2l}} + \frac{\chi c}{2\pi}\Big). \tag{28}$$

На рис. 2 приведены кривые разрушения в двойных логарифмических координатах при $n = k = 1$, $c = 5/8$, $\chi = 2{,}4$. Расчеты показали, что при любом показателе пластичности $0 < \chi \leqslant 4\pi/5$ кривые *2, 3* расположены выше кривой *1*, т. е. прогнозируемая формулой (28) разрушающая нагрузка больше нагрузки, прогнозируемой формулой (24) модели Корнева. При $\chi = 0$ кривая *2* совпадает с кривой *1*, следовательно, в этом случае имеет место предельный переход от квазихрупкого типа разрушения к хрупкому. При $\chi = 4\pi/5$ кривая *2* совпадает с кривой *3*, это значение χ является критическим и соответствует точке перехода с ветви квазихрупкого (λ_-) разрушения к ветви квазивязкого (λ_+) разрушения. Для ветви, соответствующей квазивязкому типу разрушения (λ_+), выполняется равенство $\Delta_P \approx 30 r_{1P}$, что хорошо согласуется с результатами работы [12. С. 190], в которой получено приближенное равенство $\Delta \approx 34 r_1$ для нагрузки $\lambda = 0{,}4$ при квазивязком типе разрушения. По-видимому, неравенство $\Delta < r_1$ характерно для квазихрупких материалов, неравенство $\Delta > r_1$ — для квазивязких. Заметим, что в системе координат $(2l/(nr_1), \lambda)$ положение кривых *1–3* не зависит от значения параметра r_1.

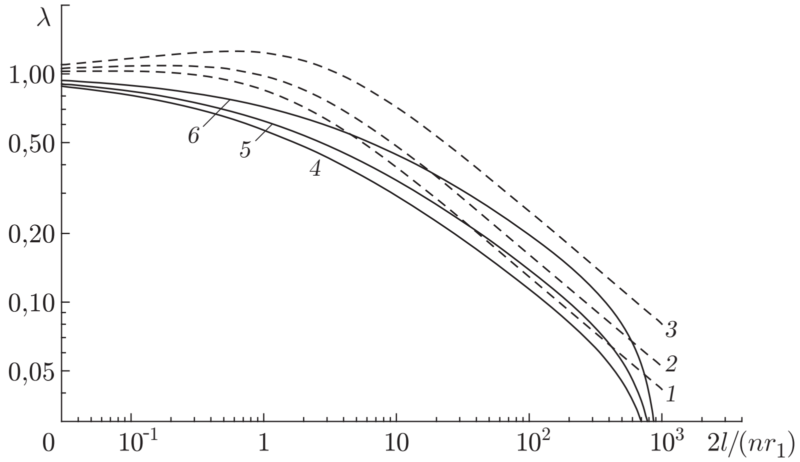

Рис. 2. Диаграммы разрушения квадратной биметаллической пластины с центральной трещиной при $n = k = 1$, $c = 5/8$, $\chi = 2{,}4$:
1 — расчет по формуле (24) модели Корнева, *2* — расчет по формуле (28) уточненной модели, соответствующей знаку "$-$", *3* — расчет по формуле (28), соответствующей знаку "+", *4* — расчет по формуле (13), *5* — расчет по формуле (21), соответствующей знаку "$-$", *6* — расчет по формуле (21), соответствующей знаку "+"

Выясним смысл параметра c, для которого до сих пор рассматривалось единственное значение $c = 5/8$ (плоское напряженное состояние). В случае плоского деформированного состояния имеем $c = (5-8\mu+8\mu^2)/(8-8\mu^2)$, т. е. параметр c характеризует напряженно-деформированное состояние. В то же время величина c пропорциональна поперечнику a зоны предразрушения: $a = c\lambda^2 l$ (см. (3), (16), (26)). Параметр c можно назвать показателем жесткости, или величиной, обратной показателю вязкости. Параметры c и χ связаны: если $\chi c = \pi/2$, то ветви, соответствующие квазихрупкому (λ_-) и квазивязкому (λ_+) типам разрушения, совпадают, если $c = 0$, то из формулы (3) следует, что $a = 0$ и, следовательно, выполняется равенство $K_{\mathrm{I}\infty} + K_{\mathrm{I}\Delta} = 0$ модели Леонова — Панасюка — Дагдейла. В случае $c = 0$ из уравнения (26) находим выражение для критической нагрузки

$$\lambda = \frac{k}{n}\sqrt{\frac{nr_1}{2l}} \Big/ \Big(\sqrt{1+\frac{nr_1}{2l}} - 1\Big) = \frac{k}{n}\sqrt{\frac{2l}{nr_1}}\,\Big(\sqrt{1+\frac{nr_1}{2l}} + 1\Big),$$

которое совпадает с выражением для λ_+ в (28) для квазивязкого типа разрушения:

$$\lambda_+ \approx \frac{k}{2n}\sqrt{\frac{nr_1}{2l}}\,\Big(2\sqrt{1+\frac{nr_1}{2l}}\,\Big) \Big/ \Big(1+\frac{nr_1}{2l} - \sqrt{1+\frac{nr_1}{2l}}\,\Big) = \frac{k}{n}\,\sqrt{\frac{2l}{nr_1}}\,\Big(\sqrt{1+\frac{nr_1}{2l}} + 1\Big).$$

Кроме того, при $c = 0$ из уравнения (26) следует равенство $\lambda = \lambda\sqrt{1+nr_1/(2l)} - k\sqrt{nr_1/(2l)}\,/n$, используя которое из уравнения (25) находим выражение $\lambda = 1 - 2\arcsin{(1 - \Delta/l)}/\pi$, связывающее длину зоны предразрушения с нагрузкой, или $\Delta/l = 1-\cos{(\pi\lambda/2)} \approx \pi^2\lambda^2/8 + 5\pi^4\lambda^4/384$. Это выражение хорошо согласуется с выражением $\Delta/l = \sec{(\pi\lambda/2)} - 1 \approx \pi^2\lambda^2/8 - \pi^4\lambda^4/384$, приведенным в [13. С. 65] для модели Леонова — Панасюка — Дагдейла.

Аналогично проводятся расчеты, если для представления нормальных напряжений $\sigma_y(x,0)$ выбрать выражение (9), в котором учтены конечные размеры пластины. Тогда при $c = 0$ (следовательно, согласно уравнению (16) $K_{\mathrm{I}\infty} + K_{\mathrm{I}\Delta} = 0$) из уравнения (18) получаем выражение для критической нагрузки $\lambda = k(L-2l)/L/n$, которое совпадает с выражением (21) для λ_+, описывающим разрушение квазивязкого типа. Из уравнения (17) следует равенство $\lambda Y/\sqrt{\pi} = 1 - 2\arcsin{(1 - \Delta/l)}/\pi$, из которого с учетом выражения $Y = \sqrt{\pi/\cos{(\pi l/L)}}$ получаем выражение для длины зоны предразрушения $\Delta/l = 1 - \cos{(\pi\lambda/(2\sqrt{\cos{(\pi l/L)}}\,))}$. При небольших длинах трещин ($l/L \ll 1$) это выражение хорошо согласуется с выражением для длины Δ в модели Леонова — Панасюка — Дагдейла.

На рис. 2 приведены также кривые разрушения *4–6*, построенные при $r_1 = 0{,}118$ по формулам (13), (21), учитывающим конечные размеры биметаллической пластины. В системе координат $(2l/(nr_1), \lambda)$ кривые *4–6* зависят от значения параметра r_1, но при любых значениях r_1 кривые *4, 5, 6* лежат ниже кривых *1, 2, 3* соответственно.

3.3. *Диаграммы разрушения однородного структурированного материала.* В работе [12] представлены результаты, полученные методом конечных элементов при численном моделировании распространения трещины в однородном материале. Подставим в равенство (1) то же, что и в работе [12], представление нормального напряжения $\sigma_y(x, 0)$ на продолжении трещины, обусловленного напряжением σ_∞:

$$\sigma_y(x, 0) \approx \frac{K_{\mathrm{I}\infty}}{\sqrt{2\pi x}} + \sigma_\infty + \frac{K_{\mathrm{I}\Delta}}{\sqrt{2\pi x}}, \qquad K_{\mathrm{I}\infty} = \sigma_\infty\sqrt{\pi l}. \tag{29}$$

Для поперечника зоны предразрушения в однородном материале при плоском напряженном состоянии будем использовать выражение $a = 5\lambda^2 l/4$, которое отличается от выражения (3). Выполняя процедуру, описанную в п. **2**, для аналитической уточненной модели получаем систему приближенных уравнений для длины Δ зоны предразрушения и безразмерной критической нагрузки λ:

$$\Delta = \frac{25\chi^2}{2^{11}}\,\lambda^2 l\,\frac{2l}{nr_1}\Big(\frac{k}{n\lambda} - 1\Big)^{-2}; \tag{30}$$

$$\lambda = \frac{k}{n}\Big(2 + \sqrt{\frac{2l}{nr_1}}\,\Big(1 \pm \sqrt{1 - \frac{5\chi}{2\pi}}\,\Big)\Big) \Big/ \Big(2 + 2\sqrt{\frac{2l}{nr_1}} + \frac{5\chi}{4\pi}\,\frac{2l}{nr_1}\Big). \tag{31}$$

На рис. 3 приведены кривые разрушения однородного материала. Кривая *1* построена по формуле

$$\lambda = 1/(1 + \sqrt{2l/r_1}\,), \tag{32}$$

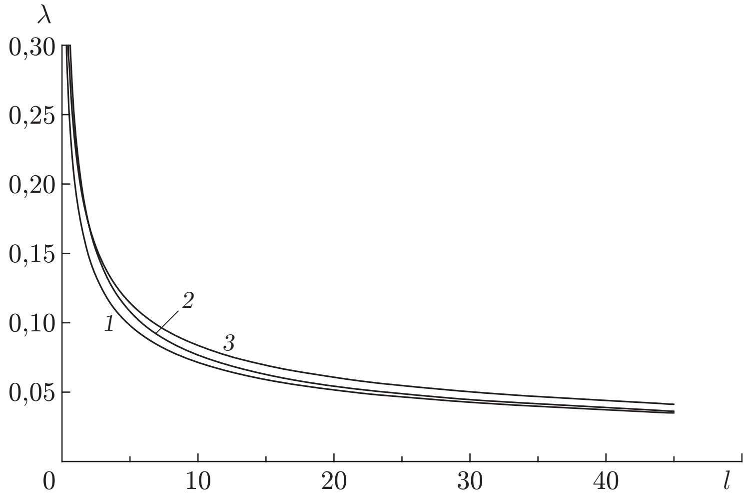

Рис. 3. Кривые разрушения однородного материала:
1 — расчет по формуле (32), *2* — расчет по формуле (33), *3* — расчет по формуле (31)

которая при $\chi = 0$ (хрупкое разрушение) соответствует представлению (29) нормального напряжения на продолжении трещины в модели Корнева. Так же как и в работе [12], кривая *1* получена при $r_1 = 0{,}118$.

Кривая *2* построена по формуле

$$\lambda = 1/\sqrt{0{,}9999 + 16{,}95l}\,, \tag{33}$$

которая была выбрана в результате аппроксимации методом наименьших квадратов данных численного моделирования [12]. При численном моделировании с помощью МКЭ рассматривалась квадратная стальная пластина размером $100{,}0 \times 100{,}0 \times 0{,}4$ мм. Длина $2l$ внутренней трещины варьировалась в диапазоне от 4 до 90 мм. Кривая *3* построена по формуле (31) уточненной модели при $\chi = 0{,}0001$ и $n = k = 1$. В формуле (31) перед квадратным корнем выбирался знак “+”. Значение параметра r_1 выбиралось с учетом условия совпадения значений нагрузки λ, вычисленных по формулам (31), (33) при $l = 2$. На рис. 3 видно, что при небольшой длине трещины ($l < 5$) кривая *3* лучше, чем кривая *1*, аппроксимирует кривую *2*. Отклонение кривой *3* при $l > 5$ объясняется влиянием конечных размеров пластины, которое в модели (30), (31) не учтено.

Для учета конечных размеров однородной квадратной пластины выберем представление нормальных напряжений $\sigma_y(x,0)$ на продолжении центральной трещины в виде (9), а для поперечника зоны предразрушения в однородном материале при плоском напряженном состоянии — выражение $a = 5\lambda^2 l/4$. Тогда для модели Корнева имеем систему уравнений для длины зоны предразрушения Δ и безразмерной критической нагрузки λ:

$$\Delta = 25\chi^2\lambda^2 l Y^2/(2^9\pi); \tag{34}$$

$$\lambda = \frac{k}{n}\Big[\frac{Y}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{2l}{nr_1}}\Big(1 - \frac{5\chi}{8\pi}\Big) + \frac{L}{L-2l}\Big]^{-1}, \tag{35}$$

а для уточненной модели — систему уравнений

$$\sqrt{\Delta} = \frac{5\chi Y^2}{16\pi}\,\lambda^2 l\Big[\Big(\frac{k}{n} - \frac{L\lambda}{L-2l}\Big)\sqrt{nr_1}\,\Big]^{-1}; \tag{36}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{k}{n}\Big(\frac{2L}{L-2l} + \frac{Y}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{2l}{nr_1}}\Big(1 \pm \sqrt{1 - \frac{5\chi}{2\pi}}\,\Big)\Big) \Big/ \Big/ \Big(\frac{2L^2}{(L-2l)^2} + \frac{2LY}{L-2l}\sqrt{\frac{2l}{\pi n r_1}} + \frac{5\chi Y^2 l}{2\pi^2 n r_1}\Big). \tag{37}$$

Соотношения (34), (35) и (36), (37) отличаются от соотношений (12), (13) и (19), (21) соответственно лишь числовыми коэффициентами: в биматериале ($c = 5/8$) поперечник a зоны предразрушения в два раза меньше, чем в однородном материале ($c = 5/4$).

На рис. 4 приведены кривые разрушения однородной квадратной пластины. Кривая *1* построена по формуле (35), которая при $\chi = 0$ (хрупкое разрушение) соответствует представлению (9) нормального напряжения на продолжении трещины в модели Корнева. Так же как и в работе [12], кривая *1* построена при $r_1 = 0{,}118$. Кривая *2* построена по формуле (33), кривая *3* — по формуле (37) уточненной модели при $\chi = 0{,}0001$, $n = k = 1$. В формуле (37) перед квадратным корнем выбирался знак “+” (квазивязкое разрушение). Значение параметра r_1 выбиралось из условия совпадения значений нагрузки λ, вычисленных по формулам (37), (33) при $l = 2$. Сравнение кривых, приведенных на рис. 3, 4, с результатами работы [12] показывает, что кривая *3* на рис. 4 лучше согласуется с результатами численного эксперимента.

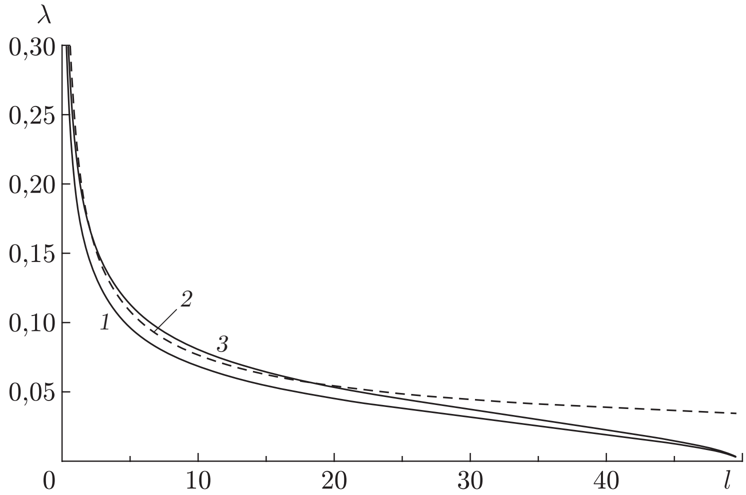

Рис. 4. Кривые разрушения квадратной металлической пластины:
1 — расчет по формуле (35), *2* — расчет по формуле (33), *3* — расчет по формуле (37)

4. Обсуждение результатов моделирования. В настоящей работе получено точное выражение (19) для длины зоны предразрушения квазихрупких материалов в модели Корнева. С помощью этого выражения уточнено выражение (21) для критической разрушающей нагрузки. Анализ уточненных соотношений (14), (21) показал, что область допустимых значений параметра χ в уточненной модели Корнева в четыре раза меньше области допустимых значений χ, соответствующей упрощенному соотношению (13) в модели Корнева.

Введение в рассматриваемую модель нового параметра c позволило дополнить модель формулами для длины зоны предразрушения и критической нагрузки при квазивязком типе разрушения материалов. Проведенное в п. **3** сравнение результатов численного моделирования [10, 12] с помощью МКЭ с теоретическими оценками, полученными с помощью представленной в настоящей работе уточненной модели в случае квазивязкого разрушения, показало, что они хорошо согласуются.

В работе [11] при прогнозировании разрушения клееного композита в рамках модели Корнева использовались формулы для критических нагрузок с учетом конечных размеров образцов. Однако при обработке данных натурных экспериментов с помощью модели Корнева для квазихрупких материалов возникли затруднения: часто не удавалось найти численное решение определяющих уравнений. Возможно, отчасти эти затруднения вызваны ограничением на параметр $\chi \leqslant 2{,}5$, которое в [11] не всегда соблюдалось.

5. Выводы. В работе предложены уточненные формулы для критической длины зоны предразрушения и критической нагрузки для квазихрупких материалов. Проведено обобщение модели Корнева на случай квазивязких материалов.

При использовании аналитической модели для описания разрушения структурированных материалов учитываются геометрия образцов и механические характеристики материалов этих образцов, в частности параметр, характеризующий линейный размер элемента структуры материала.

Анализ результатов расчетов позволяет сделать вывод, что с помощью модели Корнева можно получить качественную оценку разрушающей нагрузки в зависимости от длины исходной трещины. Таким образом, рассматриваемая аналитическая модель может быть использована при исследовании деформирования и разрушения композитов из структурированных материалов. Это позволит уменьшить количество натурных испытаний, необходимых для оценки разрушающей нагрузки.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Итон Н., Гловер А., Мак-Грат Дж.** Особенности разрушения при изготовлении и эксплуатации сварных конструкций // Механика разрушения. Разрушение конструкций. М.: Мир, 1980. Вып. 20. С. 92–120.
2. **Lipkin D. M., Beltz G. E., Clarke D. R.** A model of cleavage fracture along metal/ceramic interfaces // Mater. Res. Soc. Symp. Proc. 1997. V. 436. P. 91–96.
3. **Броек Д.** Основы механики разрушения. М.: Высш. шк., 1980.
4. **Сукнев С. В.** Применение нелокальных и градиентных критериев для оценки разрушения геоматериалов в зонах концентрации растягивающих напряжений // Физ. мезомеханика. 2011. Т. 14, № 2. С. 67–75.
5. **Usami S., Kimoto H., Takanashi I., Shida S.** Strength of ceramic materials containing small flaws // Engng Fract. Mech. 1986. V. 23, N 4. P. 745–761.
6. **Yun-Jae Kim, Karl-Heinz Schwalbe.** Mismatch effect on plastic yield loads in idealised weldments. 2. Heat affected zone cracks // Engng Fract. Mech. 2001. V. 68. P. 183–199.
7. **Корнев В. М.** Обобщенный достаточный критерий прочности. Описание зоны предразрушения // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 5. С. 153–161.
8. **Корнев В. М.** Распределение напряжений и раскрытие трещин в зоне предразрушения (подход Нейбера — Новожилова) // Физ. мезомеханика. 2004. Т. 7, № 3. С. 53–62.
9. **Корнев В. М., Астапов Н. С.** Модель разрушения кусочно-однородной среды при расслоении упругопластических структурированных материалов // Механика композиц. материалов и конструкций. 2010. Т. 16, № 3. С. 347–360.
10. **Кургузов В. Д., Корнев В. М., Астапов Н. С.** Модель разрушения биматериала при расслоении. Численный эксперимент // Механика композиц. материалов и конструкций. 2011. Т. 17, № 4. С. 462–473.
11. **Демешкин А. Г., Корнев В. М., Астапов Н. С.** Прочность клееного композита при наличии трещиноподобных дефектов // Механика композиц. материалов и конструкций. 2013. Т. 19, № 3. С. 445–458.
12. **Кургузов В. Д., Корнев В. М.** Построение диаграмм квазихрупкого и квазивязкого разрушения материалов на основе необходимых и достаточных критериев // ПМТФ. 2013. Т. 54, № 1. С. 179–194.
13. **Керштейн И. М.** Основы экспериментальной механики разрушения / И. М. Керштейн, В. Д. Клюшников, Е. В. Ломакин, С. А. Шестериков. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989.
14. **Корнев В. М., Демешкин А. Г.** Диаграмма квазихрупкого разрушения тел со структурой при наличии краевых трещин // ПМТФ. 2011. Т. 52, № 6. С. 152–164.
15. **Яновский Ю. Г.** Наномеханика и прочность композиционных материалов. М.: Ин-т прикл. механики РАН, 2008.

Поступила в редакцию 27/VIII 2013 г.,
в окончательном варианте — 27/I 2014 г.