

УДК 539.375

ТЕРМОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТОЛСТОСТЕННОГО ЦИЛИНДРА С РАДИАЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ

И. М. Лавит, Нгуен Вьет Чунг

Тульский государственный университет, 300600 Тула

E-mail: IgorLavit@yandex.ru

Термоупругопластическая задача механики разрушения о действии внутреннего давления и неоднородного температурного поля на толстостенный цилиндр решается методом упругих решений в сочетании с методом конечных элементов. Корректность решения обеспечивается использованием модели трещины Баренблатта, в которой поля напряжений и деформаций регулярны. Решены упругопластические задачи о действии внутреннего давления и неравномерного температурного поля на цилиндр с трещиной. Проведено сравнение результатов расчетов с известными данными.

Ключевые слова: толстостенный цилиндр, трещина, разрушение, термопластичность, силы сцепления, зона сцепления.

Введение. При расчете на прочность элементы конструкций энергетического и химического машиностроения могут рассматриваться как толстостенные цилиндры, на которые оказывают воздействие внутреннее давление и неоднородное температурное поле. В условиях квазистатического нагружения разрушение цилиндра происходит в результате развития трещины, распространяющейся в радиальном направлении от внутренней поверхности. Длина участка устойчивого роста трещины оказывается сопоставимой с толщиной цилиндра, поэтому анализ его прочности должен основываться на представлениях механики разрушения. При этом необходимо учесть возможность пластического деформирования.

Расчетная схема задачи приведена на рис. 1. Цилиндр с внутренним радиусом R_1 и внешним R_2 находится в состоянии плоской деформации. Материал цилиндра предполагается однородным и изотропным, идеально пластичным, его деформации — малыми. При упругом деформировании поведение материала подчиняется закону Гука, при пластическом — соотношениям Прандтля — Рейсса при условии текучести Мизеса. Предел текучести σ_Y зависит от температуры. Цилиндр ослаблен радиальной трещиной длиной a . В канале цилиндра и полости трещины действует давление p . Цилиндр неравномерно нагрет. В силу квазистатической постановки задачи температурное поле можно считать осесимметричным.

Впервые задача об упругом деформировании цилиндра с трещиной решена в работе [1] методом Колосова — Мусхелишвили с использованием конформного отображения кругового кольца на поперечное сечение цилиндра с трещиной и метода коллокации. Изучалось только действие внешнего давления. В [2] для решения задачи о действии внутреннего давления применен метод конечных элементов. Принципиальным отличием этого случая от случая, рассмотренного в [1], является то, что давление приложено также к

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 04-01-00247, 07-01-96402).

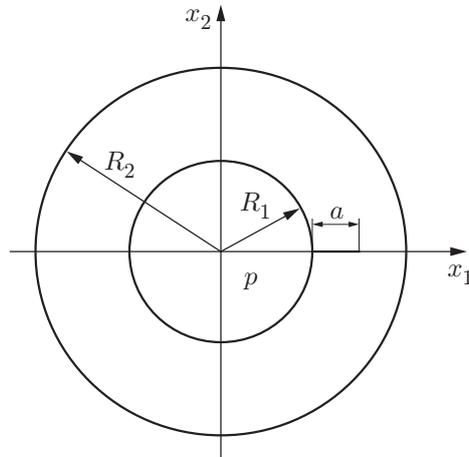


Рис. 1. Расчетная схема

кромкам трещины. В работах [3–5] усовершенствован метод, предложенный в [1], и решена задача линейной механики разрушения для цилиндра с различным числом одинаковых равноотстоящих друг от друга трещин при действии внешнего и внутреннего давления, а также при наличии самоуравновешенного поля остаточных напряжений. В [6] та же задача решена методом конечных элементов. Дальнейшие исследования были посвящены изучению упругопластического деформирования цилиндров с трещинами. В работе [7] с использованием метода конечных элементов получено решение упругопластической задачи для цилиндра при действии внутреннего давления, в [8] то же решение найдено с помощью метода граничных элементов. В работе [9] с использованием метода конечных элементов рассмотрена термоупругопластическая задача для цилиндра с трещиной, в [10] — упругопластическая задача при наличии остаточных напряжений после автофреттажа.

Решения задач, приведенные в работах [7–10], имеют общий недостаток. Как известно, характер сингулярности полей напряжений и деформаций в кончике трещины для упругого и упругопластического состояний различен [11]. Так как решение упругопластической задачи получается методом последовательных приближений, в расчетах невозможно корректно учесть эту сингулярность (в отличие от решения упругих задач), используя специальные элементы, обеспечивающие выполнение заданного закона сингулярности. Стандартный способ уточнения численного решения — сгущение сетки в зоне максимальных напряжений — в данном случае применим, когда аппроксимацию сингулярного поля вблизи особой точки еще можно улучшить кусочно-аналитическими функциями. На практике такая возможность устанавливается эмпирически, путем сопоставления численных решений упругой задачи, полученных на различных сетках, с эталонным решением, найденным каким-либо специальным методом линейной механики разрушения. Ясно, что такой подход отличается от способа построения сходящегося решения упругопластической задачи. Можно ожидать, что при решении одной и той же задачи и достаточно точном соответствии упругого решения эталону будут получены существенно различающиеся решения упругопластической задачи [12]. Поэтому в работе [13] при решении термоупругопластической задачи для цилиндра с трещинами применен новый численный метод [14], в котором вместо модели трещины Гриффитса использовалась модель Баренблатта [15]. В этой модели отсутствуют сингулярности полей напряжений и деформации в кончике трещины, что обеспечивает корректность применения метода упругих решений [16] — итерационного метода решения упругопластической задачи. Однако и этот метод имеет недостаток — условие, согласно которому длина зоны сцепления должна быть равна длине конечного

элемента, прилегающего к кончику трещины. Сгущение сетки оказывается невозможным без уменьшения длины зоны сцепления, что, так же как и в предыдущем случае, ставит под сомнение корректность метода. В приведенных ниже решениях особенности полей напряжений и деформаций исключаются в каждой итерации решения упругопластической задачи с помощью конечноэлементного метода, разработанного в [17, 18]. При этом размеры элементов и длина зоны сцепления независимы. В тех случаях, когда это возможно, проведено сопоставление результатов с известными данными.

1. Формулировка и решение задачи термоупругопластичности. Определяющие соотношения, описывающие термоупругопластическое деформирование материала, имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{mn} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \right), & \varepsilon_{mn} &= \varepsilon_{mn}^e + \varepsilon_{mn}^p, & \varepsilon &= \frac{\varepsilon_{mm}}{3}, \\ \Delta T &= T - T_0, & \sigma_{mn} &= 3K(\varepsilon - \alpha \Delta T) \delta_{mn} + 2G(\varepsilon_{mn}^e - \varepsilon \delta_{mn}), \\ \sigma &= \sigma_{mm}/3, & d\varepsilon_{mn}^p &= d\lambda(\sigma_{mn} - \sigma \delta_{mn}), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где x_m — декартовы координаты; u_m — вектор перемещений; ε_{mn} — тензор деформаций; ε_{mn}^e , ε_{mn}^p — тензоры упругих и пластических деформаций соответственно; T — температура; T_0 — начальная температура; ΔT — приращение температуры; σ_{mn} — тензор напряжений; K , G — модули упругости; α — коэффициент линейного расширения; δ_{mn} — символ Кронекера; ε , σ — средние деформация и напряжение соответственно; $d\lambda$ — неопределенный множитель. При активном нагружении выполняется условие текучести Мизеса

$$(\sigma_{mn} - \sigma \delta_{mn})(\sigma_{mn} - \sigma \delta_{mn}) = 2\sigma_Y^2/3. \quad (1.2)$$

При этом $d\lambda \geq 0$ (равенство нулю соответствует случаю нейтрального нагружения). При чисто упругом деформировании и разгрузке левая часть выражения (1.2) меньше правой, в этом случае $d\lambda = 0$.

Решение вариационного уравнения

$$\int_S \sigma_{mn} \delta \varepsilon_{mn} dS = \int_l p_k \delta u_k dl \quad (1.3)$$

(S — площадь поперечного сечения цилиндра; l — его граничный контур; p_k — вектор нагрузки, приложенной к контуру) совместно с кинематическими граничными условиями (в данной задаче они сводятся к исключению жестких перемещений цилиндра) и соотношениями (1.1), (1.2) при заданном температурном поле позволяет определить все параметры напряженно-деформированного состояния. Поставленная задача нелинейна, ее решение находится итерационным методом упругих решений [16], вариант которого, предназначенный для решения задач механики разрушения, предложен в работе [19]. Напряжения представляются в виде суммы

$$\sigma_{mn} = t_{mn} - 3K\alpha \Delta T \delta_{mn} + s_{mn},$$

где тензор напряжений t_{mn} связан с тензором деформаций законом Гука, а тензор начальных напряжений s_{mn} пропорционален тензору пластических деформаций:

$$t_{mn} = 3K\varepsilon \delta_{mn} + 2G(\varepsilon_{mn} - \varepsilon \delta_{mn}), \quad s_{mn} = -2G\varepsilon_{mn}^p. \quad (1.4)$$

Вариационное уравнение (1.3) преобразуется к виду

$$\int_S t_{mn} \delta \varepsilon_{mn} dS = \int_l p_k \delta u_k dl + \int_S (3K\alpha \Delta T \delta_{ij} - s_{ij}) \delta \varepsilon_{ij} dS. \quad (1.5)$$

При известных начальных напряжениях уравнение (1.5) представляет собой вариационное уравнение задачи теории упругости для цилиндра, нагруженного поверхностными (первое слагаемое в правой части) и объемными (второе слагаемое) усилиями. Зависимость давления и температурного поля от некоторого монотонного параметра нагружения τ предполагается известной. Интервал изменения τ разбивается на M отрезков, называемых далее шагами нагружения. Пусть известны начальные напряжения s_{mn}^* , распределенные в цилиндре к началу очередного шага нагружения. За счет изменения давления и (или) температурного поля на рассматриваемом шаге нагружения начальные напряжения получают приращения Δs_{mn} . Предполагая эти приращения малыми, можно приближенно заменить ими дифференциалы ds_{mn} . С использованием соотношений (1.4), (1.1) получим

$$\Delta s_{mn} = -\Delta \varkappa (t_{mn} - t\delta_{mn} + s_{mn}^*), \quad \Delta \varkappa = \frac{2G \Delta \lambda}{1 + 2G \Delta \lambda}, \quad \Delta \varkappa \in [0; 1), \quad t = \frac{t_{mm}}{3} \quad (1.6)$$

(величина $d\lambda$ заменяется на $\Delta\lambda$). При известных значениях t_{mn} , s_{mn}^* для определения Δs_{mn} необходимо знать значение множителя $\Delta \varkappa$, которое находится из условия (1.2):

$$\Delta \varkappa = 1 - \sigma_Y / \sqrt{1,5(t_{mn} - t\delta_{mn} + s_{mn}^*)(t_{mn} - t\delta_{mn} + s_{mn}^*)}. \quad (1.7)$$

Если в результате расчетов по формуле (1.7) $\Delta \varkappa < 0$, то равенство (1.2) не выполняется, т. е. имеет место чисто упругое деформирование или разгрузка. При этом все приведенные выше соотношения сохраняются, но в них надо положить $\Delta \varkappa = 0$. Итерационный процесс метода упругих решений строится следующим образом. В первом приближении приращения начальных напряжений Δs_{mn} полагаются равными нулю. При этом, очевидно, поле начальных напряжений $s_{mn} = s_{mn}^*$ известно. Решается уравнение (1.5), определяющее задачу линейной теории упругости. В результате находится тензорное поле t_{mn} . Далее по формулам (1.6), (1.7) определяются приращения начальных напряжений, затем — скорректированные значения начальных напряжений $s_{mn} = s_{mn}^* + \Delta s_{mn}$, вновь решается уравнение (1.5) и так далее до тех пор, пока итерационный процесс не сойдется, после чего делается следующий шаг нагружения. Отметим, что условие малости приращений Δs_{mn} , приводящее к требованию $\Delta \varkappa \ll 1$, является необходимым условием достоверности решения, поэтому метод упругих решений может рассматриваться как корректный метод решения упругопластических задач только при отсутствии сингулярности поля напряжений.

2. Решение краевой задачи теории упругости. Таким образом, в каждой итерации решения упругопластической задачи необходимо решить задачу теории упругости с заданными поверхностными и объемными нагрузками. Так как в данном случае это задача линейной механики разрушения, необходимо сформулировать ее таким образом, чтобы исключить сингулярность поля напряжений, что достигается введением в рассмотрение сил сцепления [15], притягивающих друг к другу противоположные кромки трещины. Однако не следует считать, что это только математический прием. В окрестности кончика трещины имеется узкая зона больших пластических деформаций, распространение которой при росте трещины и обуславливает в основном сопротивление этому росту. Действие данной зоны на остальной материал моделируется силами сцепления [20, 21].

Так как задача симметрична, достаточно рассмотреть половину сечения цилиндра (рис. 2). Граничные условия формулируются следующим образом. Участок граничного контура CD (внешняя поверхность цилиндра) свободен от нагрузки, на участках DE , BC перемещение u_2 и напряжение σ_{12} равны нулю (условия симметрии), на участке EA (внутренняя поверхность цилиндра) приложено давление p , на участке AB (поверхность трещины) также действует давление p , и часть этого участка, прилегающая к кончику

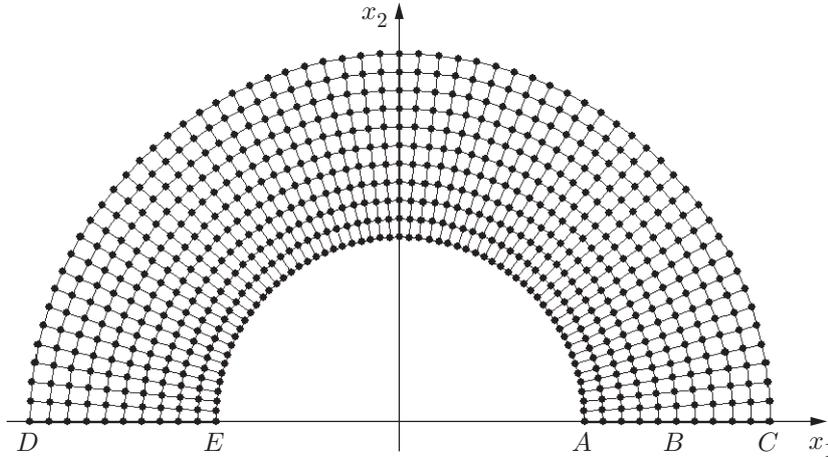


Рис. 2

Рис. 2. Конечноэлементная сетка

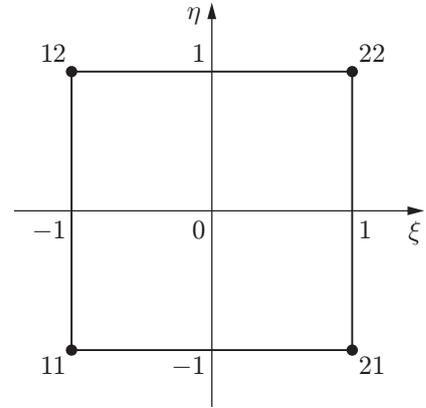


Рис. 3

Рис. 3. Конечный элемент в локальных координатах

трещины (точке B), нагружена силами сцепления. Дополнительно задается ограничение на жесткое перемещение вдоль оси абсцисс: $u_1 = 0$ в точке B .

Решение упругой задачи получается методом конечных элементов [22]. Типичное разбиение расчетной области на элементы представлено на рис. 2. В данной работе использованы четырехугольные изопараметрические элементы первого порядка (рис. 3) [22]. Узлы элементов имеют двойную нумерацию. Глобальные декартовы координаты точек элемента определяются формулой

$$x_m = L_i(\xi)L_j(\eta)X_m^{ij}, \quad i, j = 1, 2, \quad \xi, \eta \in [-1; 1],$$

где X_m^{ij} — заданные глобальные декартовы координаты узлов (верхние индексы обозначают номер узла в локальной нумерации); $L_i(\xi)$ — полиномы Лагранжа:

$$L_1(\xi) = (1 - \xi)/2, \quad L_2(\xi) = (1 + \xi)/2.$$

Пусть r, θ — полярные координаты, причем r отсчитывается от кончика трещины. При $r \rightarrow 0$ напряжения, деформации и перемещения определяются асимптотическими формулами [11]

$$\sigma_{mn} = K_I \sigma_{mn}^*, \quad \varepsilon_{mn} = K_I \varepsilon_{mn}^*, \quad u_m = K_I u_m^*,$$

где K_I — коэффициент интенсивности напряжений (в данном случае вследствие симметрии задачи $K_{II} = 0$); $\sigma_{mn}^*, \varepsilon_{mn}^*, u_m^*$ — известные функции координат [11]. В частности, в случае плоской деформации

$$u_1^* = \frac{2(1 + \nu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2}\right), \quad u_2^* = \frac{2(1 + \nu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left(2(1 - \nu) - \cos^2 \frac{\theta}{2}\right)$$

(E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона).

Перемещения внутри любого конечного элемента задаются в виде

$$u_m = L_i(\xi)L_j(\eta)U_m^{ij} + K_I u_m^*, \tag{2.1}$$

где U_m^{ij} — узловые перемещения (перемещения узлов без учета вклада второго слагаемого в формуле (2.1)). Коэффициент интенсивности напряжений K_I неизвестен и вместе

с узловыми перемещениями входит в число варьируемых переменных. Задание поля перемещений в виде (2.1) обеспечивает, во-первых, правильную асимптотику напряжений и деформаций при приближении к кончику трещины и, во-вторых, непрерывность поля перемещений на границах элементов.

Далее применяется стандартная конечноэлементная процедура, позволяющая свести решение поставленной задачи к решению системы линейных алгебраических уравнений [22]. Исходное вариационное уравнение (1.5), записанное для одного элемента, приводится к виду

$$\begin{aligned} & \{a_0[(1-\nu)a_{ijmn} + (1-2\nu)b_{ijmn}/2]U_1^{mn} + a_0[\nu c_{ijmn} + (1-2\nu)c_{mni j}/2]U_2^{mn} + \\ & \quad + (d_{ij11} + e_{ij12})K_I\}\delta U_1^{ij} + \{a_0[\nu c_{mni j} + (1-2\nu)c_{ijmn}/2]U_1^{mn} + \\ & \quad + a_0[(1-\nu)b_{ijmn} + (1-2\nu)a_{ijmn}/2]U_2^{mn} + (e_{ij22} + d_{ij12})K_I\}\delta U_2^{ij} + \\ & \quad + \{a_0[(1-\nu)f_{mn11} + \nu f_{mn22} + (1-2\nu)g_{mn12}]U_1^{mn} + a_0[(1-\nu)g_{mn22} + \nu g_{mn11} + \\ & \quad + (1-2\nu)f_{mn12}]U_2^{mn} + hK_I\}\delta K_I = \chi_{ij} \delta U_1^{ij} + \psi_{ij} \delta U_2^{ij} + \omega \delta K_I, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где коэффициенты определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)}, & a_{ijmn} &= \int_S \Phi_{ij} \Phi_{mn} dS, & b_{ijmn} &= \int_S F_{ij} F_{mn} dS, \\ c_{ijmn} &= \int_S \Phi_{ij} F_{mn} dS, & d_{ijmn} &= \int_S \Phi_{ij} \sigma_{mn}^* dS, & e_{ijmn} &= \int_S F_{ij} \sigma_{mn}^* dS, \\ f_{ijmn} &= \int_S \Phi_{ij} \varepsilon_{mn}^* dS, & g_{ijmn} &= \int_S F_{ij} \varepsilon_{mn}^* dS, & h &= \int_S \sigma_{mn}^* \varepsilon_{mn}^* dS, \\ \chi_{ij} &= \int_l p_1 L_i(\xi) L_j(\eta) dl - \int_S [(3K\alpha\Delta T + s_{11})\Phi_{ij} + s_{12}F_{ij}] dS, \\ \psi_{ij} &= \int_l p_2 L_i(\xi) L_j(\eta) dl - \int_S [s_{12}\Phi_{ij} + (3K\alpha\Delta T + s_{22})F_{ij}] dS, \\ \omega &= \int_l p_m u_m^* dl - \int_S (3K\alpha\Delta T \delta_{mn} + s_{mn}) \varepsilon_{mn}^* dS. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Контурные интегралы в формулах (2.3) отличны от нуля только для элементов, к сторонам которых приложена внешняя нагрузка. Функции, входящие в подынтегральные выражения для коэффициентов (2.3), находятся из выражений

$$\begin{aligned} \Phi_{ij}(\xi, \eta) &= [(-1)^i L_j(\eta) \partial_1 \xi + (-1)^j L_i(\xi) \partial_1 \eta]/2, \\ F_{ij}(\xi, \eta) &= [(-1)^i L_j(\eta) \partial_2 \xi + (-1)^j L_i(\xi) \partial_2 \eta]/2, \\ \partial_m &= \frac{\partial}{\partial x_m}, & \begin{pmatrix} \partial_1 \xi & \partial_2 \xi \\ \partial_1 \eta & \partial_2 \eta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \partial_\xi x_1 & \partial_\eta x_1 \\ \partial_\xi x_2 & \partial_\eta x_2 \end{pmatrix}^{-1}, \\ \partial_\xi x_m &= (-1)^i L_j(\eta) X_m^{ij}/2, & \partial_\eta x_m &= (-1)^j L_i(\xi) X_m^{ij}/2. \end{aligned}$$

Суммирование выражений (2.2) по всем конечным элементам с переходом от двумерной нумерации неизвестных к одномерной и с учетом того, что один узел входит в несколько элементов, приводит к системе $N + 1$ линейных алгебраических уравнений

$$TZ = P, \quad (2.4)$$

где первые N элементов матрицы-столбца Z представляют собой искомые узловые перемещения; $z_{N+1} = K_I$. Перемещения узлов, лежащих на участках граничного контура BC и DE (см. рис. 2), должны удовлетворять кинематическим граничным условиям. Так как на участке BC перемещения u_2^* равны нулю, условия учитываются стандартным способом [22]: полагаются равными нулю соответствующие элементы вектора правых частей P , а также соответствующие строки и столбцы матрицы T , за исключением диагональных членов. На участке DE перемещения u_2^* отличны от нуля. В данном случае кинематические граничные условия удовлетворяются следующим образом. Пусть j — номер узлового перемещения, которое в сумме с перемещением $K_I u_2^*$, равным в рассматриваемой точке, например, bK_I , должно дать нуль. Так как в этом случае $\delta z_j = -b\delta K_I$, необходимо j -ю строку матрицы T , умноженную на $-b$, прибавить к $(N + 1)$ -й строке, а затем j -й столбец, умноженный на $-b$, прибавить к $(N + 1)$ -му столбцу. Далее, в соответствии со стандартным подходом [22] в j -й строке и j -м столбце все элементы полагаются равными нулю, за исключением диагонального элемента, который принимается равным единице, и элемента $t_{j,N+1}$, принимаемого равным b .

Матрица T (преобразованная с учетом граничных условий) не является ленточной, поэтому для решения системы уравнений (2.4) целесообразно разделить ее на систему первых N уравнений, матрица коэффициентов которой является ленточной, и $(N + 1)$ -е уравнение. Пусть вектор неизвестных Y включает первые N компонент вектора Z , вектор правых частей B — первые N компонент вектора P , а матрица A — первые N строк и N столбцов матрицы T . Система уравнений (2.4) эквивалентна системе уравнений

$$AY = B - CK_I, \quad (2.5)$$

$$\sum_{i=1}^N t_{N+1,i} y_i + t_{N+1,N+1} K_I = p_{N+1},$$

где вектор C состоит из первых N элементов $(N + 1)$ -го столбца матрицы T . Матрица A , очевидно, является ленточной. Решив первое (матричное) уравнение системы (2.5) сначала с правой частью B , а затем с правой частью $-C$, получим решение в виде

$$Y = Y_1 + K_I Y_2.$$

Далее из второго уравнения системы (2.5) легко определяется значение K_I .

Силы сцепления приложены к участку границы AB в направлении, противоположном направлению оси ординат. Модуль этих сил изменяется вдоль оси абсцисс по закону [19]

$$q(x_1) = \begin{cases} q_*(1 - 3\zeta^2 + 2\zeta^3), & \zeta \in [0, 1], \\ 0, & \zeta > 1, \end{cases}$$

где $\zeta = (R_1 + a - x_1)/\delta$; $\delta \ll a$ — длина зоны сцепления. При заданном значении δ силы сцепления определяются их максимальным значением q_* , которое находится из условия отсутствия сингулярности поля напряжений в кончике трещины. В силу линейности упругой задачи коэффициент интенсивности напряжений можно представить в виде суммы:

$$K_I = K_{I1} + q_* K_{I2}$$

(K_{I1} — коэффициент интенсивности напряжений, возникших под действием давления, температурного градиента и начальных напряжений; K_{I2} — коэффициент интенсивности на-

пряжений, возникших под действием сил сцепления при $q_* = 1$). Полагая $K_1 = 0$, находим значение q_* и как следствие суммарное поле напряжений, не имеющее сингулярности.

Энергетическая характеристика разрушения — J -интеграл — определяется через силы сцепления по формуле Райса [11]

$$J = -2 \int_{R_1+a-\delta}^{R_1+a} q \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1.$$

Эта формула справедлива и в тех случаях, когда значение J без учета сил сцепления уже невозможно найти как не зависящий от пути интегрирования контурный интеграл, например, при действии неоднородного температурного поля [21].

3. Результаты расчетов. С использованием разработанного метода решен ряд термоупругопластических задач для цилиндра с трещиной. Во всех приведенных ниже примерах расчета конечноэлементная сетка сгущалась до тех пор, пока изменялись первые три значащие цифры результата — значения J -интеграла. В окончательном варианте число уравнений в системе составляло 60 702. Сначала была рассмотрена задача об упругопластическом деформировании цилиндра, нагруженного внутренним давлением, результаты решения которой можно сопоставить с данными [8]. Расчеты проводились при следующих исходных данных: модуль Юнга $E = 2,15 \cdot 10^5$ Н/мм², коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, предел текучести $\sigma_Y = 275$ Н/мм², параметр толстостенности $\beta = R_2/R_1 = 2$, относительная длина трещины $a_* = a/(R_2 - R_1) = 0,5$. На рис. 4 представлена расчетная зависимость J -интеграла от давления в канале цилиндра в безразмерных переменных

$$p_* = \frac{p}{p_f}, \quad p_f = \frac{2\sigma_Y}{\sqrt{3}} \ln \beta, \quad J_* = \frac{EJ}{a\sigma_Y^2}, \quad (3.1)$$

где p_f — предельное внутреннее давление для цилиндра без трещины [23].

Кривые 1–3, полученные с учетом упругопластического деформирования, рассчитаны до момента достижения предельного давления (давления, при котором происходит потеря несущей способности цилиндра). На рис. 4 видно, что длина зоны сцепления слабо влияет на результаты расчета: при ее изменении в два раза предельное давление изменяется лишь на 4,2 %. Результаты расчета разработанным методом согласуются с результатами, полученными в [8]. В данной задаче учет возможности появления пластического деформирования приводит к зависимостям, существенно отличающимся от полученных с учетом только упругого деформирования (кривая 4).

На рис. 5 представлены результаты решения термоупругопластической задачи для цилиндра, нагреваемого с внешней поверхности, при $p = 0$ и следующих исходных данных: $E = 2 \cdot 10^5$ Н/мм², $\nu = 0,3$, $\sigma_Y = 200$ Н/мм², $\beta = 1,2$, $a_* = 0,5$, $\alpha = 10^{-5}$ 1/°С. Стационарное температурное поле в цилиндре определяется формулой

$$T = T_2 + (T_1 - T_2) \ln(r/R_2) / \ln(R_1/R_2), \quad (3.2)$$

где T_1 , T_2 — температура внутренней и внешней поверхностей цилиндра соответственно; r — радиальная координата. Расчеты проводились при $T_0 = T_1 = 0$ °С, $\delta/a = 0,05$. Сопоставление результатов вычислений с данными [9], полученными другим методом, показывает, что они удовлетворительно согласуются (рис. 5).

Более сложным для расчета и более важным для инженерной практики является случай совместного действия давления и температурного поля. При значительном нагреве необходимо учитывать зависимость предела текучести от температуры, которую целесообразно представить в виде $\sigma_Y = \sigma_{Y0}\psi(T)$, где $\psi(T)$ — безразмерная функция; σ_{Y0} — предел текучести при $\psi = 1$. Значения функции $\psi(T)$ для высокопрочных сталей приведены

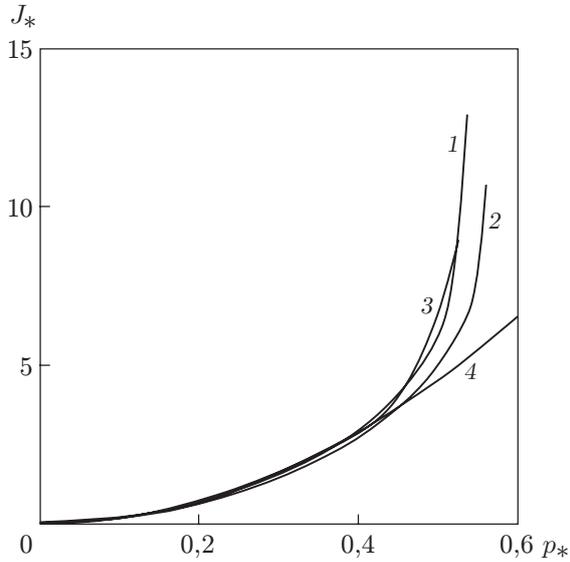


Рис. 4

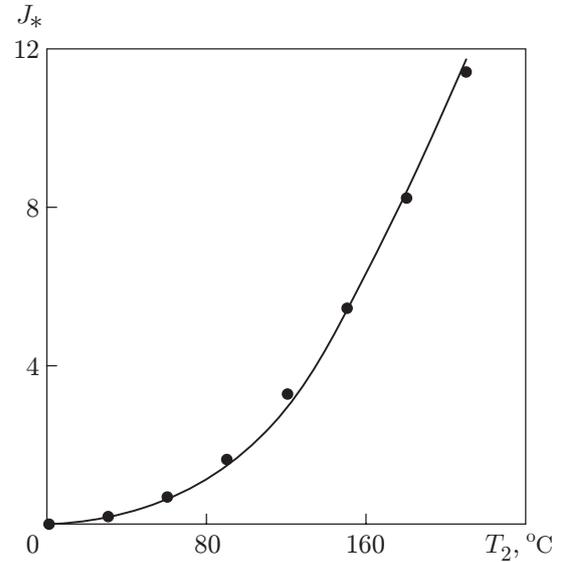


Рис. 5

Рис. 4. Зависимость J -интеграла от давления в случае ненагретого цилиндра:

1–3 — расчет с учетом упругопластического деформирования (1 — $\delta/a = 0,05$; 2 — $\delta/a = 0,1$; 3 — результаты расчета [8]); 4 — расчет с учетом только упругого деформирования [3]

Рис. 5. Зависимость J -интеграла от температуры внешней поверхности цилиндра: линия — результаты расчета разработанным методом; точки — результаты расчета [9]

$T, ^\circ\text{C}$	$\psi(T)$	$T, ^\circ\text{C}$	$\psi(T)$
0	1,00	500	0,57
100	1,00	600	0,35
200	1,00	700	0,19
300	0,97	800	0,09
400	0,83		

в таблице. Расчеты проводились при следующих исходных данных: $E = 2,15 \cdot 10^5 \text{ Н/мм}^2$, $\nu = 0,3$, $\sigma_{Y0} = 275 \text{ Н/мм}^2$, $\beta = 2$, $a_* = 0,5$, $\delta/a = 0,05$, $\alpha = 10^{-5} \text{ 1/}^\circ\text{C}$, $T_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$. Результаты расчетов приведены на рис. 6 (величины p_* , J_* определяются формулами (3.1), в которых под величиной σ_Y следует понимать величину σ_{Y0}). Различие кривых обусловлено различием режимов нагружения. Кривая 1 на рис. 6 (кривая 1 на рис. 4) характеризует сопротивление ненагретого цилиндра. Кривая 2 получена в случае стационарного распределения температуры (3.2), причем значения температуры внутренней и внешней поверхностей возрастают пропорционально давлению по законам

$$T_1 = T_0 + 1460p_*, \quad T_2 = T_0 + 1060p_*.$$

Кривая 3 соответствует следующему режиму нагружения: сначала цилиндр нагревается при $p = 0$ до значений температуры $T_1 = 750 \text{ }^\circ\text{C}$ и $T_2 = 550 \text{ }^\circ\text{C}$ (при этом распределение температуры по сечению цилиндра задается формулой (3.2)), затем цилиндр охлаждается до температуры T_0 , после чего его внутренняя поверхность нагружается давлением. Действие поля остаточных напряжений, образовавшегося после нагрева с последующим охлаждением, аналогично действию поля напряжений, возникающего при воздействии давления, вследствие чего кривая 3 расположена выше кривой 1.

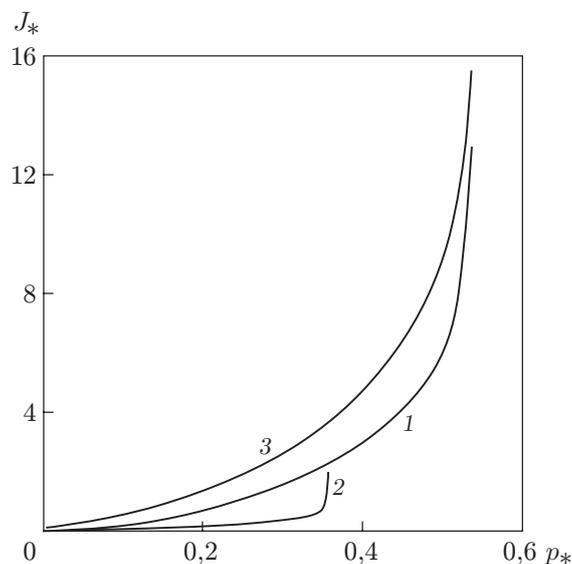


Рис. 6. Зависимость J -интеграла от давления в канале цилиндра при различных режимах нагружения:

1 — ненагретый цилиндр; 2 — совместное действие нагрева и давления; 3 — нагрев цилиндра с последующим охлаждением и нагружением давлением

Если оценивать прочность цилиндра по его несущей способности, то определяющим будет режим нагружения, которому соответствует кривая 2 на рис. 6, но если возможно усталостное разрушение или критическое значение J -интеграла сравнительно невелико, основным будет режим нагружения, которому соответствует кривая 3. Таким образом, режим нагружения может оказывать влияние на оценку прочности цилиндра.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Bowie O. L., Freese C. E.** Elastic analysis for a radial crack in a circular ring // Engng Fract. Mech. 1972. V. 4. P. 315–321.
2. **Shannon R. W. E.** Stress intensity factors for thick-walled cylinders // Intern. J. Pressure Vessels Piping. 1974. V. 2. P. 19–29.
3. **Andrasic C. P., Parker A. P.** Stress intensity factors for externally and internally cracked pressurized thick cylinders with residual and thermal stressed // Fract., Mech. Technol. Appl. Mater. Evaluat. and Struct. Design. The Hague: S. n., 1983. P. 193–214.
4. **Andrasic C. P., Parker A. P.** Dimensionless stress intensity factors for cracked thick cylinders under polynomial crack face loadings // Engng Fract. Mech. 1984. V. 19. P. 187–193.
5. **Parker A. P., Underwood J. H., Throop J. E., Andrasic C. P.** Stress intensity and fatigue crack growth in a pressurized, autofrettaged thick cylinder // ASTM Spec. Tech. Publ. 1983. N 791. P. I-216–I-237.
6. **Pu S. L., Hussain M. A.** Stress-intensity factors for radial cracks in a partially autofrettaged thick-wall cylinder // ASTM Spec. Tech. Publ. 1983. N 791. P. I-194–I-215.
7. **Sumpter J. D. G.** Elastic-plastic fracture analysis and design using the finite element method: PhD thesis. L.: Imperial College, 1973.
8. **Tan C. L., Lee K. H.** Elastic-plastic stress analysis of a cracked thick-walled cylinder // J. Strain Anal. 1983. V. 18. P. 253–260.

9. **Cheissoux J. L.** Numerical applications of path independent integrals in the case of thermal strains, creep analysis and mixed mode situations // Adv. Fract. Res.: Proc. of the 6th Intern. conf. fract. (ICF 6), New Delhi. Oxford, S. a. V. 5. P. 3623–3630.
10. **Zhigun W.** Elastic-plastic fracture analysis of a thick-walled cylinder // Intern. J. Pressure Vessels Piping. 1995. V. 63. P. 165–168.
11. **Райс Дж.** Математические методы в механике разрушения // Разрушение. М.: Мир, 1975. Т. 2. С. 204–235.
12. **Larsson L. H.** A calculational round robin in elastic-plastic fracture mechanics // Intern. J. Pressure Vessels Piping. 1983. V. 11. P. 207–228.
13. **Лавит И. М., Толоконников Л. А.** Термоупругопластическая задача механики разрушения для полого цилиндра с внутренними трещинами // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения. Горький: Изд-во Горьк. гос. ун-та, 1990. С. 55–60.
14. **Лавит И. М.** Об устойчивом росте трещины в упругопластическом материале // Пробл. прочности. 1988. № 7. С. 18–23.
15. **Баренблатт Г. И.** Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении // ПМТФ. 1961. № 4. С. 3–56.
16. **Ильюшин А. А.** Пластичность. Ч. 1. Упругопластические деформации. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1948.
17. **Krukova N. V., Lavit I. M.** The finite-element method in linear fracture mechanics problems // Proc. of the 3rd Europ. conf. on comput. mech., Lisbon, June 5–8, 2006. Lisbon: ECCM, 2006. CD-ROM.
18. **Лавит И. М., Сибирцева Н. В.** Конечноэлементный метод решения задач линейной механики разрушения // Изв. Тул. гос. ун-та. Актуальные вопросы механики. 2006. Вып. 2. С. 96–102.
19. **Лавит И. М.** Рост трещины в условиях квазихрупкого разрушения при монотонно возрастающей и циклической нагрузках // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2001. № 2. С. 109–120.
20. **Баренблатт Г. И.** О некоторых общих представлениях математической теории хрупкого разрушения // Прикл. математика и механика. 1964. Т. 28, вып. 4. С. 630–643.
21. **Лавит И. М.** Энергетический баланс окрестности кончика трещины в упругопластической среде // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2001. № 3. С. 123–131.
22. **Зенкевич О.** Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975.
23. **Качанов Л. М.** Основы теории пластичности. М.: Высш. шк., 1969.

Поступила в редакцию 18/VI 2007 г.
