УДК 532.529

ВЛИЯНИЕ ВНУТРЕННЕЙ ВЯЗКОСТИ И УПРУГОСТИ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫХ МАКРОМОЛЕКУЛ НА РЕОЛОГИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РАЗБАВЛЕННЫХ РАСТВОРОВ ПОЛИМЕРОВ. РЕОЛОГИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ

Ю. В. Придатченко, Ю. И. Шмаков

(*Киев*)

С позиций структурно-континуального подхода получены реологические уравнения состояния разбавленных растворов полимеров, макромолекулы которых могут быть моделированы эллипсоидом вращения, обладающим внутренней вязкостью и упругостью.

Получение реологических уравнений состояния разбавленных растворов полимеров с помощью структурного и структурно-континуального подходов предполагает выбор модели макромолекулы полимера. Промоделируем макромолекулу непроницаемой для жидкости эллипсоидальной частицей, обладающей внутренней упругостью и вязкостью, предполагая при этом, что в процессе взаимодействия с дисперсионной средой частица меняет свои размеры, но по форме остается эллипсоидом вращения, сохраняющим свой объем.

Для получения реологических уравнений состояния рассматриваемой среды с помощью структурно-континуального подхода [1 — 3] можно использовать модель структурного континуума, содержащую один внутренний параметр — вектор n_i. Положение вектора n_i в пространстве характеризует влияние ориентации частиц, а изменение модуля — влияние их деформации на реологическое поведение раствора.

Определяющие уравнения такого структурного континуума имеют вид [4, 5]

$$t_{ij} = (c_0 + c_1 d_{km} n_k n_m + c_2 N_k n_k)\delta_{ij} + c_3 n_i n_j + c_4 d_{km} n_k n_m n_i n_j + c_5 N_k n_k n_i n_j + c_6 d_{ij} + c_7 d_{ik} n_k n_j + c_8 d_{jk} n_k n_i + c_9 n_i N_j + c_{10} n_j N_i; \tag{1}$$

$$\dot{n}_i = \omega_{ij} n_j + \lambda_1 n_i + \lambda_2 d_{km} n_k n_m n_i + \lambda_3 d_{ij} n_j + \lambda_4 \varepsilon_{ijk} M_j n_k + \lambda_5 f_j n_j n_i, \tag{2}$$

где t_{ij} — тензор напряжений; d_{ij} — тензор скоростей деформации; $N_i = \dot{n}_i - \omega_{ij} n_j$; ω_{ij} — тензор вихря скорости; f_i, M_j — сила и момент сил, действующие на элемент микроструктуры, за исключением гидродинамических сил; c_i и λ_i — реологические функции, зависящие от $n^2 = n_i n_i$; δ_{ij}, ε_{ijk} — симметричные и кососимметричные символы Кронекера.

Свяжем направление вектора n_i с направлением оси вращения эллипсоидальной частицы, а его модуль — с длиной полуоси вращения a, положив $n = a$.

Для нахождения реологических функций модели (1), (2) будем искать в приближении Стокса возмущения скорости и давления, вносимые взвешенной частицей в течение дисперсионной среды, предполагаемой вязкой ньютоновской жидкостью. В качестве граничных условий примем условие прилипания дисперсионной среды на поверхности частицы, предполагая, что деформации частицы однородны, и условие обращения в нуль возмущений скорости и давления на больших расстояниях от частицы. Решение рассматриваемой гидродинамической задачи строим методом, использованным Джеффри [6] при решении задачи о поведении жесткой эллипсоидальной частицы в течении вязкой жидкости. Получив решение в подвижной системе координат x_i, связанной с частицей (начало координат — в центре частицы, оси совпадают по направлению с главными осями эллипсоидальной частицы), перенесем граничные условия, задаваемые для скорости на бесконечности, на поверхность сферы радиуса R, значительно превосходящего возможные размеры частицы. Окончательно получим следующие выражения для скорости и давления, справедливые в окрестности поверхности рассматриваемой сферы:

$$u_i = u_{0i} + (4/3)[(R^3-r^3)/R^3r^3](c_{ki} - c_{ik})x_k - 4x_i[(R^5-r^5)/R^5r^5]\Phi + 5[(R^2 - r^2)/R^5]\partial\Phi/\partial x_i;$$

$$p = p_0 - (8\mu/r^5)\Phi - (42\mu/R^5)\Phi,$$

где u_i — скорость; u_{0i} — скорость невозмущенного потока; p — давление; p_0 — давление в невозмущенном потоке; r — модуль радиус-вектора; μ — динамический коэффициент вязкости растворителя; $\Phi = c_{ij}x_ix_j$;

$$c_{11} = \frac{d_{11}}{6\beta_0''} - \frac{\dot a}{6a\beta_0''}; \quad c_{22} = \frac{d_{22}}{4b^2\alpha_0'} + \frac{d_{11}(\beta_0'' - \alpha_0'')}{12b^2\beta_0''\alpha_0'} + \frac{\dot a}{12a\beta_0''}; \tag{3}$$

$$c_{33} = \frac{d_{33}}{4b^2\alpha_0'} + \frac{d_{11}(\beta_0'' - \alpha_0'')}{12b^2\beta_0''\alpha_0'} + \frac{\dot a}{12a\beta_0''}; \quad c_{12} = \frac{\alpha_0 d_{12} + b^2\beta_0'(\omega_{12} + \omega_3)}{2\beta_0'(a^2\alpha_0 + b^2\beta_0)};$$

$$c_{21} = \frac{\beta_0 d_{21} + a^2\beta_0'(\omega_{21} - \omega_3)}{2\beta_0'(a^2\alpha_0 + b^2\beta_0)}; \quad c_{13} = \frac{\alpha_0 d_{13} + b^2\beta_0'(\omega_{13} - \omega_2)}{2\beta_0'(a^2\alpha_0 + b^2\beta_0)};$$

$$c_{31} = \frac{\beta_0 d_{31} + a^2\beta_0'(\omega_{31} + \omega_2)}{2\beta_0'(a^2\alpha_0 + b^2\beta_0)}; \quad c_{23} = \frac{\beta_0 d_{23} + b^2\alpha_0'(\omega_{23} + \omega_1)}{4b^2\alpha_0'\beta_0};$$

$$c_{32} = \frac{\beta_0 d_{32} + b^2\alpha_0'(\omega_{32} - \omega_1)}{4b^2\alpha_0'\beta_0},$$

где α_0, β_0, α_0', β_0', α_0'', β_0'' — функции a, b, определенные в [6]; b — экваториальный радиус частицы; ω_i — угловая скорость частицы; $\dot a$ — скорость изменения полуоси a.

В качестве тензора напряжений σ_{ij}, описывающего напряженное состояние в растворе полимера, примем, следуя Ландау [7], осредненное по объему рассматриваемой сферы значение тензора напряжений, возникающих в течении дисперсионной среды, возмущенном взвешенной частицей, с переходом от интегрирования по этому объему к интегрированию по поверхности введенной сферы [7—9]

$$\sigma_{ij} = - p_0\delta_{ij} + 2\mu d_{ij} + (8\mu V/ab^2)c_{ij}, \tag{4}$$

где V — объемная концентрация взвешенных частиц.

Рассмотрим ориентацию и деформацию взвешенной частицы. Пренебрегая инерционными свойствами частицы, в качестве уравнений ориентации имеем

$$M_1^0 + M_1 = 0, \quad M_2^0 + M_2 = 0, \quad M_3^0 + M_3 = 0, \tag{5}$$

где M_i — компоненты момента внешних сил, действующих на частицу; M_i^0 — компоненты момента гидродинамических сил, определяемые решением гидродинамической задачи

$$M_1^0 = (32/3)\pi\mu(c_{32} - c_{23}), \quad M_2^0 = (32/3)\pi\mu(c_{13} - c_{31}), \quad M_3^0 = (32/3)\pi\mu(c_{21} - c_{12}). \tag{6}$$

Предполагая симметрию свойств частицы относительно оси вращения ($M_1 = 0$), из (5), (6) получим

$$c_{23} = d_{23}/4b^2\alpha_0', \quad c_{32} = d_{32}/4b^2\alpha_0'. \tag{7}$$

Тогда из (3), (5)—(7) следует, что ориентация оси вращения частицы описывается следующими уравнениями:

$$\begin{gathered}[(a^2 - b^2)/(a^2 + b^2)]d_{31} + \omega_{31} + \omega_2 - [3(a^2\alpha_0 + b^2\beta_0)/16\pi\mu(a^2 + b^2)]M_2 = 0;\\ -[(a^2 - b^2)/(a^2 + b^2)]d_{12} + \omega_{12} + \omega_3 - [3(a^2\alpha_0 + b^2\beta_0)/16\pi\mu(a^2 + b^2)]M_3 = 0.\end{gathered} \tag{8}$$

Если частица обладает вышеуказанными свойствами, а ее реологическое поведение можно моделировать линейной упругостью и вязкостью, то получим, используя принцип виртуальных перемещений, уравнение, описывающее деформацию частицы,

$$\frac{\dot{a}}{a} = -\frac{2ab^2\beta_0'Ga/a_0(1 - q_0/q)}{\mu\left(2 + 3ab^2\beta_0''\eta/\mu\right)} + \frac{2d_{11}}{2 + 3ab^2\beta_0'\eta/\mu} + \frac{3a\beta_0''f}{4\pi\mu\left(2 + 3ab^2\beta_0''\eta/\mu\right)}, \tag{9}$$

где G — модуль сдвига материала частицы; η — динамический коэффициент вязкости материала частицы; $q = a/b$; $q_0 = a_0/b_0$; a_0, b_0 —значение полуоси вращения и экваториального радиуса частицы в недеформированном состоянии; f — внешняя сила, деформирующая частицу, за исключением гидродинамических сил.

Рассматривая соотношения (1), (2) в подвижной системе координат $x_i(n_1 = a,\ n_2 = n_3 = 0,\ \dot{n}_1 = \dot{a},\ \dot{n}_2 = a\omega_3,\ \dot{n}_3 = -a\omega_2)$ и сравнивая (1) с (4), (3), (7), а (2) с (8), (9), найдем реологические функции, входящие в (1), (2),

$$a_0 = -p_0; \quad a_1 = \frac{2\mu V(\beta_0'' - \alpha_0'')}{3a^3b^4\beta_0''\alpha_0'};$$

$$c_2 = \frac{2\mu V}{3a^3b^2\beta_0''}; \quad c_3 = 0;$$

$$c_4 = \frac{2\mu V}{a^5b^2}\left[\frac{\alpha_0'' + \beta_0'}{b^2\alpha_0'\beta_0''} - \frac{2(\alpha_0 + \beta_0)}{\beta_0'(a^2\alpha_0 + b^2\beta_0)}\right];$$

$$c_5 = \frac{2\mu V}{a^5b^2}\left[\frac{2(a^2 - b^2)}{a^2\alpha_0 + b^2\beta_0} - \frac{1}{\beta_0''}\right]; \quad c_6 = 2\mu\left(1 + \frac{V}{ab^4\alpha_0'}\right);$$

$$c_7 = \frac{4\mu V}{a^3b^2}\left[\frac{\beta_0}{\beta_0'(a^2\alpha_0 + b^2\beta_0)} - \frac{1}{2b^2\alpha_0'}\right];$$

$$c_8 = \frac{4\mu V}{a^3 b^2}\left[\frac{\alpha_0}{\beta_0'(a^2\alpha_0 + b^2\beta_0)} - \frac{1}{2b^2\alpha_0'}\right];$$

$$c_9 = \frac{4b^2\mu V}{a^3 b^2(a^2\alpha_0 + b^2\beta_0)}; \quad c_{10} = -\frac{4a^2\mu V}{a^3 b^2(a^2\alpha_0 + b^2\beta_0)};$$

$$(10) \quad \lambda_1 = -\frac{2ab^2\beta_0''Ga/a_0(1 - q_0/q)}{\mu\left(2 + 3ab^2\beta_0''\eta/\mu\right)}; \quad \lambda_2 = \left(\frac{2}{2 + 3ab^2\beta_0'\eta/\mu} - \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)\frac{1}{a^2};$$

$$\lambda_3 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}; \quad \lambda_4 = \frac{3(a^2\alpha_0 + b^2\beta_0)}{16\pi\mu(a^2 + b^2)}; \quad \lambda_5 = \frac{3\beta_0''}{4\pi\mu\left(2 + 3ab^2\beta_0'\eta/\mu\right)}.$$

Поскольку вектор n_i характеризует поведение микроструктуры, при построении реологических уравнений состояния в соотношении (1) необходимо произвести осреднение с помощью функции распределения F угловых положений оси симметрии частицы и ее относительных размеров

$$(11) \quad T_{ij} = \langle t_{ij} \rangle = (c_0 + \langle c_1 n_k n_m \rangle d_{km} + \langle c_2 N_k n_k \rangle)\delta_{ij} + \\ + \langle c_4 n_k n_m n_i n_j \rangle d_{km} + \langle c_5 N_k n_k n_i n_j \rangle + \langle c_6 \rangle d_{ij} + \\ + \langle c_7 n_k n_j \rangle d_{ik} + \langle c_8 n_k n_i \rangle d_{jk} + \langle c_9 n_i N_j \rangle + \langle c_{10} n_j N_i \rangle.$$

Функция распределения F удовлетворяет уравнению

$$\partial F/\partial t + \partial(F\dot{n}_i)/\partial n_i = 0,$$

где t — время; $\dot{n}_i$ — определяется соотношениями (2), (10).

Если внешние силы, действующие на элемент микроструктуры, обусловлены только броуновским движением, M_j и f_j, входящие в (2), имеют вид [10, 1]

$$(12) \quad M_j = -kT\varepsilon_{jkm}(n_k/F)\partial F/\partial n_m; \\ f_j = -kT(1/F)\partial F/\partial n_j,$$

где k — постоянная Больцмана; T — абсолютная температура. Используя (12), (2), запишем реологические уравнения состояния (11) в виде

$$(13) \quad T_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\langle \mu_0 \rangle d_{ij} + \langle \mu_1 n_i n_j \rangle + \\ + \langle \mu_2 n_k n_m n_i n_j \rangle d_{km} + 2\langle \mu_3(d_{ik} n_k n_j + d_{jk} n_k n_i)\rangle,$$

где

$$p = p_0 - \langle c_2\lambda_1 n^2 \rangle - kT\langle 3c_2\lambda_5 n^2 + n(d/dn)(c_2\lambda_5 n^2) + \\ + (c_9 + c_{10})\lambda_4 n^2 \rangle + \langle (c_1 + c_2\lambda_2 n^2 + c_2\lambda_3) n_k n_m \rangle d_{km};$$

$$\mu_0 = (1/2)c_6, \quad \mu_1 = c_5\lambda_1 n^2 + \lambda_1(c_9 + c_{10}) + kT\{5c_5\lambda_5 n^2 + \\ + (5\lambda_5 - 3\lambda_4)(c_9 + c_{10}) + n(d/dn)[\lambda_5(c_5 n^2 + c_9 + c_{10})]\};$$

$$\mu_2 = c_4 + c_5(\lambda_2 n^2 + \lambda_3) + \lambda_2(c_9 + c_{10}); \quad \mu_3 = (1/4)[c_7 + c_8 + \lambda_3(c_9 + c_{10})].$$

Функция распределения F в данном случае удовлетворяет уравнению

$$(14) \quad \partial F/\partial t + kT(\lambda_4 - \lambda_5)n_i n_j \partial^2 F/\partial n_i \partial n_j - kT\lambda_4 n^2 \partial^2 F/\partial n_i \partial n_i + \\ + \lambda_2 n_i(\partial F/\partial n_i) d_{km} n_k n_m + [\lambda_1 + kT(2\lambda_1 - 4\lambda_5 - n d\lambda_5/dn)] n_i \partial F/\partial n_i + \\ + (\omega_{ij} + \lambda_3 d_{ij}) n_j \partial F/\partial n_i + (3\lambda_1 + n d\lambda_1/dn)F + \\ + (5\lambda_2 + n d\lambda_2/dn + (1/n) d\lambda_3/dn) F d_{km} n_k n_m = 0.$$

Броуновское движение взвешенных частиц и их внутренние свойства входят в (13) посредством их «прямого вклада», получаемого при подстановке соотношений (2), (10), (12) в уравнение (11) и через функцию распределения F (14), зависящую от этих факторов.

Отметим, что реологические уравнения состояния (13), в которых учтены только силы, обусловленные броуновским движением частиц, по форме совпадают с уравнениями состояния разбавленных суспензий жестких эллипсоидальных частиц [3]. Изменение внутренних свойств взвешенных частиц выражается в том, что вместо реологических постоянных уравнения состояния содержат реологические функции, а осреднение в этих уравнениях проводится не только по возможным угловым положениям взвешенной частицы, но и по ее возможным относительным размерам.

Поступила 8 IV 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. **Шмаков Ю. И., Бегоулев П. Б., Придатченко Ю. В.** Структурно-континуальный подход в реологии дисперсных и полимерных систем.— В кн.: Тепло- и массоперенос. Т. 3. Минск, 1972.
2. **Schmakov Y. I., Begoulev P. B.** Structure-continual approach in rheology of disperse and polymer system.—«Rheol. Acta», 1974, vol. 13, N 3.
3. **Шмаков Ю. И., Таран Е. Ю.** Структурно-континуальный подход в реологии полимерных материалов.—«Инж.-физ. журн.», 1970, т. 18, № 6.
4. **Ericksen J. L.** Theory of anisotropic fluids —«Trans. Soc. Rheol.», 1960, vol. 4, p. 29.
5. **Ericksen J. L.** Orientation induced by flow —«Trans. Soc. Rheol.», 1962, vol. 6, p. 275.
6. **Jeffery G. B.** The motion of ellipsoidal particles immersed in a viscous fluid.—«Proc. Roy. Soc.», 1922, vol. A 102, N 715.
7. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
8. **Hand G. L.** A theory of dilute suspensions.—«Arch. Ration. Mech. and Analys.» 1961, vol. 7, N 1.
9. **Придатченко Ю. В., Шмаков Ю. И.** Реологические уравнения состояния слабых растворов полимеров с жесткими эллипсоидальными макромолекулами.— ПМТФ, 1972, № 2.
10. **Покровский В. Н.** Напряжения, вязкость и оптическая анизотропия движущейся суспензии жестких эллипсоидов.—«Усп. физ. наук», 1971, т. 103, вып 4.

УДК 622.276.031 : 532 : 5

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В ЗАМКНУТЫХ ГЕТЕРОГЕННЫХ СРЕДАХ

С. Н. Багир-заде, Г. П. Гусейнов, А. Г. Керимов

(*Баку*)

Работа является заключительным этапом изучения особенностей нестационарной фильтрации однородной жидкости к центральной скважине с полусферическим забоем в гетерогенных средах с двойной пористостью, состоящих из вложенных одна в другую полусферических областей с различными значениями параметров среды [1, 2].

Найдены точные решения задач о понижении пластового давления в зависимости от времени и расстояния, а также изменение во времени дебита скважины с полусферическим забоем, действующей соответственно при заданном рас-