

УДК 539.3+519.63

## РАСЧЕТ ЭФФЕКТИВНЫХ ЖЕСТКОСТЕЙ ГОФРИРОВАННОЙ ПЛАСТИНЫ ПУТЕМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НА ПОПЕРЕЧНОМ СЕЧЕНИИ ПЛАСТИНЫ

А. Г. Колпаков, С. И. Ракин\*

Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики,  
630108 Новосибирск, Россия

\* Сибирский государственный университет путей сообщения,  
630049 Новосибирск, Россия

E-mails: algk@ngs.ru, rakinsi@ngs.ru

Показано, что для гофрированных пластин, в том числе многослойных, трехмерная ячеечная задача осреднения может быть сведена к двумерной задаче на поперечном сечении ячейки периодичности пластины. Это позволяет существенно увеличить точность численного расчета эффективных жесткостей гофрированных пластин. Выполнены численные расчеты жесткостей пластины с синусоидальным гофром и проведено сравнение полученных результатов с известными данными.

Ключевые слова: гофрированные пластины, эффективные жесткости, понижение размерности задачи.

DOI: 10.15372/PMTF20160420

**Введение.** Задача вычисления эффективных жесткостей гофрированной пластины исследовалась во многих работах (см., например, [1]). Это обусловлено широким применением гофрированных пластин. Следует отметить, что даже для однослойной гофрированной пластины (рис. 1, *a*), геометрия которой достаточно проста, не удается получить решение трехмерной задачи теории упругости в явном виде. Вследствие использования многослойных пластин с гофрированной сердцевинкой (рис. 2) возросла актуальность задачи разработки метода расчета жесткостей гофрированной пластины [2–5]. Применение приближенных подходов приводит к различию результатов (сравнение приближенных теорий расчета эффективных жесткостей гофрированной пластины проведено в [1, 2]).

Большинство решений задачи вычисления эффективных жесткостей гофрированной пластины было получено с использованием двумерной модели теории оболочек [1, 2, 6] и теории осреднения [3, 7]. В работах [3, 4] в рамках двумерной модели с помощью теории осреднения решалась задача осреднения для модельной ячейки, образованной пластинами (метод аппроксимации ячейки задачи теории упругости задачей теории пластин [8]). При использовании двумерной модели толщина пластины должна быть существенно меньше длины периода и радиуса кривизны гофра. Если это условие не выполнено, то в качестве исходной задачи следует выбирать трехмерную задачу теории упругости и для нахождения эффективных жесткостей решать ячейечную задачу теории осреднения [9–11] (данная

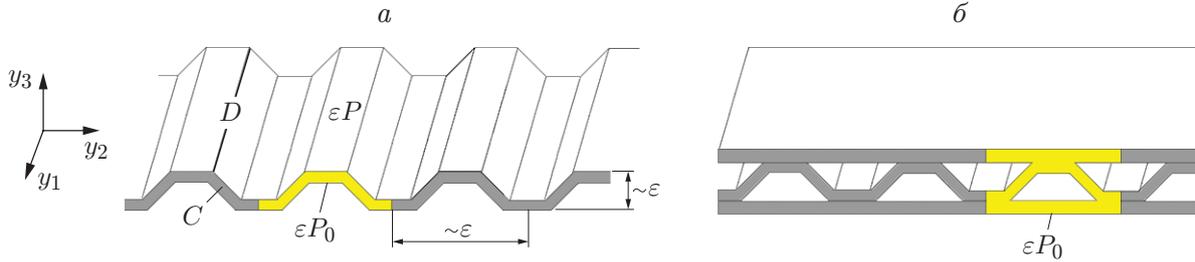


Рис. 1. Гофрированные однослойная (а) и многослойная (б) пластины

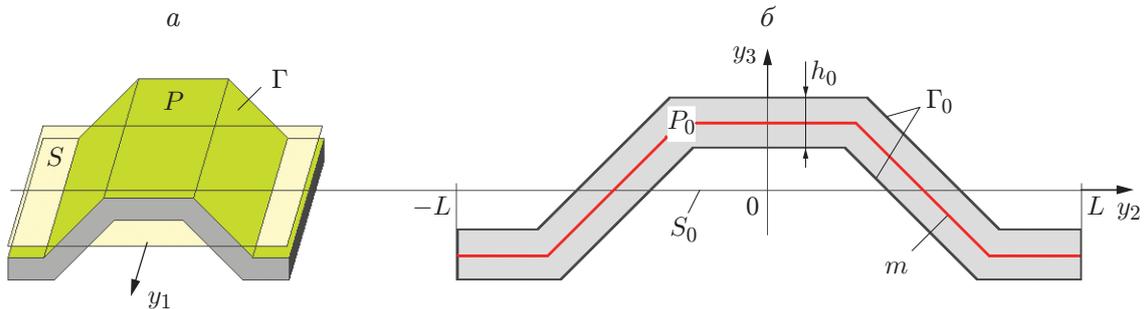


Рис. 2. Ячейка периодичности (а) и ее поперечное сечение (б)

задача сформулирована ниже). Указанная задача решалась ранее как трехмерная задача на трехмерной ячейке периодичности [3, 4].

В данной работе показано, что для гофрированной пластины трехмерная ячеечная задача может быть сведена к двумерной задаче на поперечном сечении ячейки периодичности.

Следует отметить, что переход к задаче на сечении пластины осуществлялся в [12] для плоских пластин кусочно-постоянной толщины путем представления решения ячеечной задачи в форме, аналогичной форме задачи классической теории плоских пластин (см. формулы (16) в [12]). Подход [12] близок к методу аппроксимации ячеечной задачи теории упругости задачей теории пластин [8] и не совпадает с предлагаемым в данной работе методом, основанным на снижении размерности задачи теории упругости за счет ее инвариантности по одной из пространственных переменных. Ранее анализ ячеечной задачи, основанный на понятии инвариантности, был применен для балок в форме геликоида [13], работающих в режиме осевого растяжения и кручения. Задача для балок в [13] отлична от исследуемой в данной работе задачи, в которой учитывается изгиб.

**Постановка задачи.** Рассмотрим пластину периодического строения, занимающую цилиндрическую область  $P$ , в случае, когда прямолинейная образующая  $D$ , перпендикулярная двумерной области периодического строения  $C$  — сечению пластины, пробегает всю эту область (см. рис. 1). В пластине периодического строения выделяется ячейка периодичности  $\varepsilon P$  ( $\varepsilon$  — характерный размер ячейки периодичности). Пластина состоит из этих ячеек периодичности. Без ограничения общности можно считать, что образующая  $D$  параллельна оси  $y_1$ . В этом случае ячейка периодичности представляется в виде  $\varepsilon P = [0, 1] \times \varepsilon P_0$ , где  $\varepsilon P_0$  — ячейка периодичности поперечного сечения  $C$ .

Если характерный размер ячейки периодичности  $\varepsilon$  мал по сравнению с характерным размером пластины в ее плоскости, то исходной пластине может быть поставлена в соответствие плоская пластина с так называемыми эффективными (осредненными) жесткостями (см., например, [9–11]).

Эффективные жесткости не зависят от краевых условий и приложенных сил и определяются микроструктурой пластины — геометрией ее ячейки периодичности и распределением свойств материала в пределах данной ячейки [9–11]. В силу этого вычисление эффективных жесткостей может рассматриваться как самостоятельная задача. Такой подход широко используется при проектировании композиционных материалов [9]. Во многих работах осреднение применяется при исследовании некоторой исходной неосредненной задачи, например при расчете и проектировании композиционных конструкций [14]. В данной работе вычисляются эффективные жесткости гофрированной пластины.

Для расчета эффективной жесткости пластины периодического строения вводятся “быстрые” переменные  $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\varepsilon$  и на ячейке периодичности  $P = [0, 1] \times P_0$  (см. рис. 2) решается так называемая ячеечная задача, которая в данном случае имеет вид [9]

$$\begin{aligned} (a_{ijkl}N_{k,l}^{AB\nu}(\mathbf{y}) + (-1)^\nu a_{ijAB}y_3^\nu)_{,j} &= 0 \quad \text{в } P, \\ (a_{ijkl}N_{k,l}^{AB\nu}(\mathbf{y}) + (-1)^\nu a_{ijAB}y_3^\nu)n_j &= 0 \quad \text{на } \Gamma, \\ \mathbf{N}^{AB\nu}(\mathbf{y}) &\text{ периодическая по } y_2, y_3 \in S. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь и далее индексы у величин, обозначенные латинскими буквами, принимают значения 1, 2, 3, прописными греческими буквами — значения 1, 2, строчными греческими буквами (кроме  $\mu, \nu$ ) — значения 2, 3; индексы  $\mu, \nu$  принимают значения 0 и 1 и по ним в выражениях, содержащих множители  $(-1)^\nu y_3^\nu$  и  $(-1)^\mu y_3^\mu$ , суммирование не проводится;  $\Gamma$  — свободные верхняя и нижняя поверхности ячейки периодичности  $P$ ;  $S$  — проекция ячейки периодичности на плоскость  $0y_1y_2$  (см. рис. 2);  $\mathbf{n}$  — вектор-нормаль;  $a_{ijkl}$  — упругие постоянные материала пластины.

Ячеечная задача (1) приведена для общего случая. Для цилиндрической пластины в условиях периодичности решения (1) по  $y_2, y_3$  нетривиальным является только условие периодичности по  $y_2$ . Ниже показано, что решение (1) не зависит от  $y_3$  (частный случай периодичности).

Решив задачу (1), эффективные жесткости пластины  $D_{AB\Gamma\Delta}^{\nu+\mu}$  ( $A, B, \Gamma, \Delta = 1, 2; \mu, \nu = 0, 1$ ) можно вычислить по формуле [9]

$$D_{AB\Gamma\Delta}^{\nu+\mu} = \frac{1}{|S|} \int_P (a_{ABi\alpha}N_{i,\alpha}^{\Gamma\Delta\nu}(\mathbf{y}) + (-1)^\nu a_{AB\Gamma\Delta}y_3^\nu)(-1)^\mu y_3^\mu dy, \quad (2)$$

где  $|S|$  — площадь проекции  $S$  ( $A, B, \Gamma, \Delta = 1, 2$ ).

Жесткости с индексами  $\mu + \nu = 0$  соответствуют жесткостям в плоскости пластины, с индексами  $\mu + \nu = 1$  — несимметричным жесткостям, с индексами  $\mu + \nu = 2$  — жесткостям на изгиб и кручение. Выбор жесткостей указанным способом обеспечивает близость перемещений и прогибов исходной пластины и поставленной ей в соответствие плоской пластины (см. [10, 11]).

Далее тонкая гофрированная пластина называется также оболочкой.

**Сведение ячеечной задачи к задаче на поперечном сечении пластины.** Задача (1) является трехмерной задачей теории упругости в трехмерной цилиндрической области  $P = [0, 1] \times P_0$  (см. рис. 2).

Покажем, что в рассматриваемом случае задачу (1) можно свести к двумерной задаче на поперечном сечении ячейки периодичности  $P_0$ . Обозначим производную от функции  $\mathbf{N}^{AB\nu}(\mathbf{y})$  по переменной  $y_1$  через  $\mathbf{N}^{AB\nu'}$ . Дифференцируя все равенства в задаче (1) по  $y_1$  и учитывая, что производная от  $y_3$  по  $y_1$  равна нулю и нормаль  $\mathbf{n}$  ( $n_j$  —  $j$ -я компонента нормали) не зависит от  $y_1$ , получаем задачу

$$(a_{ijkl}N_{k,l}^{AB\nu'}(\mathbf{y}))_{,j} = 0 \quad \text{в } P_0,$$

$$a_{ijkl}N_{k,l}^{AB\nu'}(\mathbf{y})n_j = 0 \quad \text{на } \Gamma_0, \quad (3)$$

$$\mathbf{N}^{AB\nu'}(\mathbf{y}) \quad \text{периодическая по } y_2 \in [-L, L]$$

( $2L$  — длина периода поперечного сечения пластины (см. рис. 2)).

Задача (3) имеет решение  $\mathbf{N}^{AB\nu'}(\mathbf{y}) = 0$ . Известно [10, 11], что решение задач (1), (3) единственно с точностью до произвольной постоянной, которая не влияет на величину осредненных жесткостей (2), так как обращается в нуль при дифференцировании в формуле (2). Данную постоянную выберем равной нулю.

Равенство  $\mathbf{N}^{AB\nu'}(\mathbf{y}) = 0$  означает, что  $\mathbf{N}^{AB\nu}$  является функцией двух переменных  $y_2$  и  $y_3$ :  $\mathbf{N}^{AB\nu}(\mathbf{y}) = \mathbf{N}^{AB\nu}(y_2, y_3)$ . Поскольку в (1) свободный член  $(-1)^\nu a_{i\delta AB} y_3^\nu$  также не зависит от  $y_1$ , ячеечная задача (1) принимает вид

$$\begin{aligned} (a_{i\delta k\lambda}N_{k,\lambda}^{AB\nu}(y_2, y_3) + (-1)^\nu a_{i\delta AB} y_3^\nu)_{,\delta} &= 0 \quad \text{в } P_0, \\ (a_{i\delta k\lambda}N_{k,\lambda}^{AB\nu}(y_2, y_3) + (-1)^\nu a_{i\delta AB} y_3^\nu)n_\delta &= 0 \quad \text{на } \Gamma_0, \\ \mathbf{N}^{AB\nu}(y_2, y_3) &\text{ периодическая по } y_2 \in [-L, L]. \end{aligned} \quad (4)$$

Формулировка задачи (4) зависит от значения индекса  $AB$ .

**Ячеечные задачи при  $AB \neq 12$ .** Рассмотрим задачу (4) при  $i = 1$ . Для изотропного материала  $a_{1\delta 11} = 0$ ,  $a_{1\delta 22} = 0$ ,  $a_{1212} \neq 0$ , а среди коэффициентов  $a_{1\delta k\lambda}$  только  $a_{1\delta 1\delta} \neq 0$  ( $k = 1, 2, 3$ ;  $\lambda = 2, 3$ ). С учетом этого при  $i = 1$  из (4) получаем следующую задачу относительно функции  $N_1^{AB\nu}$ :

$$\begin{aligned} (a_{i\delta 1\delta}N_{1,\delta}^{AB\nu}(y_2, y_3) + (-1)^\nu a_{1\delta AB} y_3^\nu)_{,\delta} &= 0 \quad \text{в } P_0, \\ (a_{i\delta 1\delta}N_{1,\delta}^{AB\nu}(y_2, y_3) + (-1)^\nu a_{1\delta AB} y_3^\nu)n_\delta &= 0 \quad \text{на } \Gamma_0, \\ N_1^{AB\nu}(y_2, y_3) &\text{ периодическая по } y_2 \in [-L, L]. \end{aligned} \quad (5)$$

При  $AB \neq 12$   $a_{1\delta AB} = 0$  и задача (5) принимает вид

$$\begin{aligned} (a_{i\delta 1\delta}N_{1,\delta}^{AB\nu}(y_2, y_3))_{,\delta} &= 0 \quad \text{в } P_0, \\ a_{i\delta 1\delta}N_{1,\delta}^{AB\nu}(y_2, y_3)n_\delta &= 0 \quad \text{на } \Gamma_0, \\ N_1^{AB\nu}(y_2, y_3) &\text{ периодическая по } y_2 \in [-L, L]. \end{aligned}$$

Решением этой задачи является постоянная, которую можно выбрать равной нулю [9]:  $\mathbf{N}^{\alpha\beta\nu}(y_2, y_3) = 0$ . Остальные уравнения в (4) (при  $i \neq 1$ ) образуют двумерную задачу теории упругости

$$\begin{aligned} (a_{\gamma\delta i\lambda}N_{i,\lambda}^{AB\nu}(y_2, y_3) + (-1)^\nu a_{\gamma\delta AB} y_3^\nu)_{,\delta} &= 0 \quad \text{в } P_0, \\ (a_{\gamma\delta i\lambda}N_{i,\lambda}^{AB\nu}(y_2, y_3) + (-1)^\nu a_{\gamma\delta AB} y_3^\nu)n_\delta &= 0 \quad \text{на } \Gamma_0, \\ \mathbf{N}^{AB\nu}(y_2, y_3) &\text{ периодическая по } y_2 \in [-L, L]. \end{aligned} \quad (6)$$

При  $AB = 11, 12, 21, 22$  величины  $a_{\gamma\delta AB} y_3^\nu$  можно представить в виде  $a_{\gamma\delta\alpha\beta} e_{\alpha\beta}$  (напомним, что  $\alpha, \beta = 2, 3$ ). Для нахождения деформаций  $e_{\alpha\beta}$  ( $\alpha, \beta = 2, 3$ ) решим систему уравнений

$$a_{\gamma\delta\alpha\beta} e_{\alpha\beta} = a_{\gamma\delta AB} y_3^\nu \quad (7)$$

для всех возможных значений  $AB$ . При  $AB \neq 12$  возможны следующие случаи: 1)  $AB = 11$ ; 2)  $AB = 22$ .

1.  $AB = 11$ . В данном случае система уравнений (7) принимает вид

$$\begin{aligned} a_{2222}e_{22} + a_{2233}e_{33} &= a_{2211}y_3^\nu, \\ a_{2323}e_{23} &= 0, \\ a_{3322}e_{22} + a_{3333}e_{33} &= a_{3311}y_3^\nu. \end{aligned} \quad (8)$$

С учетом изотропности компонентов получаем решение системы (8)

$$e_{22} = e_{33} = \frac{a_{2211}}{a_{2222} + a_{2233}} y_3^\nu, \quad e_{23} = 0. \quad (9)$$

Для изотропных материалов отношение  $a_{2211}/(a_{2222} + a_{2233})$  равно коэффициенту Пуассона, который обозначим  $\nu_0$ . Формулы (9) принимают вид  $e_{22} = e_{33} = \nu_0 y_3^\nu$ ,  $e_{23} = 0$ . Деформации, являющиеся линейными функциями координат, удовлетворяют уравнениям совместности [15]. Найдем соответствующие перемещения.

При  $\nu = 0$  формулы (9) принимают вид

$$u_{2,2} = \nu_0, \quad u_{3,3} = \nu_0, \quad u_{2,3} + u_{3,2} = 0. \quad (10)$$

Решение (10) имеет вид

$$u_2 = \nu_0 y_2, \quad u_3 = \nu_0 y_3. \quad (11)$$

Рассмотрим случай  $\nu = 1$ . В этом случае (9) можно записать следующим образом:

$$u_{2,2} = \nu_0 y_3, \quad u_{3,3} = \nu_0 y_3, \quad u_{2,3} + u_{3,2} = 0. \quad (12)$$

Из первых двух уравнений (8) находим

$$u_2 = \nu_0 y_2 y_3 + f(y_3), \quad u_3 = \frac{\nu_0}{2} y_3^2 + g(y_2), \quad (13)$$

а из третьего с учетом (12) получаем  $\nu_0 y_2 + f'(y_3) + g'(y_2) = 0$ . Разделяя в (13) переменные, находим  $\nu_0 y_2 + g'(y_2) = 0$  и  $f'(y_3) = 0$ . В качестве решений последних уравнений выберем функции  $g(y_2) = -\nu_0 y_2^2/2$  и  $f(y_3) = 0$ . Окончательно получаем

$$u_2 = \nu_0 y_2 y_3, \quad u_3 = \frac{\nu_0}{2} y_3^2 - \frac{\nu_0}{2} y_2^2. \quad (14)$$

2.  $AB = 22$ . Данный случай, соответствующий традиционной процедуре осреднения жесткости для пластин, рассмотрен в работе [16] (см. также [17]). В рассматриваемом случае система уравнений (7) имеет вид

$$\begin{aligned} a_{2222}e_{22} + a_{2233}e_{33} &= a_{2222}y_3^\nu, \\ a_{2323}e_{23} &= 0, \\ a_{3322}e_{22} + a_{3333}e_{33} &= a_{3322}y_3^\nu. \end{aligned} \quad (15)$$

Решение (15) есть

$$e_{22} = y_3^\nu, \quad e_{33} = 0, \quad e_{23} = 0. \quad (16)$$

При  $\nu = 0$  соответствующие (16) перемещения записываются в виде

$$u_2 = y_2, \quad u_3 = 0. \quad (17)$$

При  $\nu = 1$  из (16) следует

$$u_{2,2} = y_3, \quad u_{3,3} = 0, \quad u_{2,3} + u_{3,2} = 0. \quad (18)$$

Из первых двух уравнений в (18) находим

$$u_2 = y_2 y_3 + f(y_3), \quad u_3 = g(y_2), \quad (19)$$

а из третьего —  $y_2 + f'(y_3) + g'(y_2) = 0$ . Разделяя переменные, получаем  $y_2 + g'(y_2) = 0$  и  $f'(y_3) = 0$ . Решениями последних уравнений являются функции  $g(y_2) = -y_2^2/2$  и  $f(y_3) = 0$ . Окончательно получаем

$$u_2 = y_2 y_3, \quad u_3 = -\frac{1}{2} y_2^2. \quad (20)$$

Далее решения (11), (14), (17), (20) будем помечать индексами  $AB$  и  $\nu$  и записывать в виде  $\mathbf{u}^{AB\nu}$ .

Для функции  $\mathbf{M}^{AB\nu}(y_2, y_3) = \mathbf{N}^{AB\nu}(y_2, y_3) + (-1)^\nu \mathbf{u}^{AB\nu}(y_2, y_3)$  задача (6) принимает вид

$$\begin{aligned} (a_{\gamma\delta i\kappa} M_{i,\kappa}^{AB\nu}(y_2, y_3))_{,\delta} &= 0 \quad \text{в } P_0, \\ a_{\gamma\delta i\kappa} M_{i,\kappa}^{AB\nu}(y_2, y_3) n_\delta &= 0 \quad \text{на } \Gamma_0, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\mathbf{M}^{AB\nu}(y_2, y_3) - (-1)^\nu \mathbf{u}^{AB\nu}(y_2, y_3) \quad \text{периодическая по } y_2 \in [-L, L].$$

Задача (21) более удобна для анализа, особенно численного, поскольку не содержит “массовые” и “поверхностные” силы.

**Ячеечная задача при  $AB = 12$ .** В данном случае при  $i = 1$  из (5) получаем следующую задачу относительно функции  $N_1^{AB\nu}$ :

$$\begin{aligned} (a_{1\delta 1\delta} N_{1,\delta}^{12\nu}(y_2, y_3) + (-1)^\nu a_{1\delta 12} y_3^\nu)_{,\delta} &= 0 \quad \text{в } P_0, \\ (a_{1\delta 1\delta} N_{1,\delta}^{12\nu}(y_2, y_3) + (-1)^\nu a_{1\delta 12} y_3^\nu) n_\delta &= 0 \quad \text{на } \Gamma_0, \\ N_1^{12\nu}(y_2, y_3) &\text{ периодическая по } y_2 \in [-L, L]. \end{aligned} \quad (22)$$

Остальные уравнения в (4) (при  $i \neq 1$ ) образуют двумерную задачу

$$\begin{aligned} (a_{\gamma\delta i\kappa} N_{i,\kappa}^{12\nu}(y_2, y_3) + (-1)^\nu a_{\gamma\delta 12} y_3^\nu)_{,\delta} &= 0 \quad \text{в } P_0, \\ (a_{\gamma\delta i\kappa} N_{i,\kappa}^{12\nu}(y_2, y_3) + (-1)^\nu a_{\gamma\delta 12} y_3^\nu) n_\delta &= 0 \quad \text{на } \Gamma_0, \\ \mathbf{N}^{12\nu}(y_2, y_3) &\text{ периодическая по } y_2 \in [-L, L]. \end{aligned} \quad (23)$$

Поскольку для изотропного материала  $a_{\gamma\delta 12} = 0$  ( $\gamma, \delta = 2, 3$ ), задача (23) принимает вид

$$\begin{aligned} (a_{\gamma\delta i\kappa} N_{i,\kappa}^{12\nu}(y_2, y_3))_{,\delta} &= 0 \quad \text{в } P_0, \\ a_{\gamma\delta i\kappa} N_{i,\kappa}^{12\nu}(y_2, y_3) n_\delta &= 0 \quad \text{на } \Gamma_0, \\ \mathbf{N}^{12\nu}(y_2, y_3) &\text{ периодическая по } y_2 \in [-L, L]. \end{aligned}$$

Решение этой задачи есть вектор-постоянная, которую можно принять равной нулю. Таким образом, в случае  $AB = 12$  ячейчатая задача сводится к задаче (22) для одного уравнения относительно одной функции  $N_{1,\delta}^{12\nu}(y_2, y_3)$ . Задача (22) описывает антиплоскую деформацию.

Рассмотрим вопрос о возможности представления свободного члена в (23) в виде  $a_{1\delta 1\delta} w_{,\delta}$ . Запишем уравнение

$$a_{1\delta 1\delta} e_\delta = a_{1\delta 12} y_3^\nu. \quad (24)$$

При  $\delta = 2$  и  $\delta = 3$  из (24) получаем  $a_{1212} e_2 = -(-1)^\nu a_{1212} y_3^\nu$ ,  $a_{1312} e_2 = 0$ , откуда следует  $e_2 = -(-1)^\nu y_3^\nu$ ,  $e_3 = 0$  и

$$w_{,2} = -(-1)^\nu y_3^\nu, \quad w_{,3} = 0. \quad (25)$$

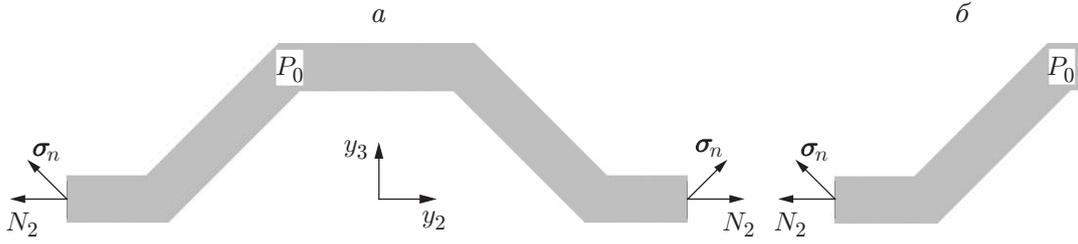


Рис. 3. Стык соседних ячеек периодичности, симметричных относительно оси  $y_3$ :  
 а — ячейка периодичности, б — фрагмент соседней ячейки

При  $\nu = 0$  система (25) интегрируема и ее решением является функция  $w(y_2, y_3) = y_2$ . Вводя функцию  $M^{120}(y_2, y_3) = N_1^{120}(y_2, y_3) + y_2$ , можно записать (22) в виде задачи без “массовых” и “поверхностных” сил:

$$\begin{aligned} \Delta M^{120} &= 0 \quad \text{в } P_0, \\ \frac{\partial M^{120}}{\partial \mathbf{n}} &= 0 \quad \text{на } \Gamma_0, \end{aligned} \tag{26}$$

$$M^{120}(\pm L, y_3) - y_2 \quad \text{периодическая по } y_2 \in [-L, L].$$

При  $\nu = 1$  система (25) не интегрируема (не выполнено условие интегрируемости  $w_{,23} = y_{3,3} = 1 \neq w_{,32} = 0$ ). При  $\nu = 1$  задачу (22) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Delta N_1^{121} &= 0 \quad \text{в } P_0, \\ \frac{\partial N_1^{121}}{\partial \mathbf{n}} - y_3 n_2 &= 0 \quad \text{на } \Gamma_0, \end{aligned} \tag{27}$$

$$N_1^{121}(y_2, y_3) \quad \text{периодическая по } y_2 \in [-L, L].$$

**Эффективные жесткости пластины.** Для функции вида  $\mathbf{N}^{\alpha\beta\nu}(\mathbf{y}) = \mathbf{N}^{\alpha\beta\nu}(y_2, y_3)$  формула (2) для вычисления эффективных жесткостей принимает вид

$$D_{AB\Gamma\Delta}^{\nu+\mu} = \frac{1}{|S_0|} \int_P (a_{ABi\kappa} N_{i,\kappa}^{\Gamma\Delta\nu}(y_2, y_3) + (-1)^\nu a_{AB\Gamma\Delta} y_3^\nu) (-1)^\mu y_3^\mu dy_2 dy_3,$$

$$A, B, \Gamma, \Delta = 1, 2, \quad \mu, \nu = 0, 1.$$

**Пластина симметричного строения.** Пусть поперечное сечение ячейки периодичности  $P_0$  симметрично относительно оси  $y_3$ . Тогда решение ячеечной задачи (1) обладает такой же симметрией.

Непрерывное сопряжение перемещений  $N_2^{AB\nu}$  и нормальных напряжений  $\boldsymbol{\sigma}_n = \sigma_{22}\mathbf{e}_2 + \sigma_{23}\mathbf{e}_3$  (рис. 3) на границах смежных ячеек периодичности возможно, только если

$$N_2^{AB\nu} = 0, \quad \sigma_{23} = 0. \tag{28}$$

Условие (28), выполненное при  $y_2 = \pm L$ , заменяет условие периодичности в ячеечной задаче (21).

Напряжения  $\sigma_{23}$ , соответствующие перемещениям  $\mathbf{u}^{AB\nu}(y_2, y_3)$ , по построению есть  $a_{23AB} y_3^\nu$  (см. (7)). Поскольку  $AB = 11, 12, 21, 22$ , для изотропных материалов  $a_{23AB} = 0$ . Тогда второе равенство в (28) выполнено и для функций  $\mathbf{N}^{AB\nu}(y_2, y_3)$ , и для функций  $\mathbf{M}^{AB\nu}(y_2, y_3)$ .

Для первого равенства в (28) возможны два нетривиальных случая:  $AB = 11$  и  $AB = 22$ . В случае  $AB = 11$  получаем условие

$$M_2^{11\nu}(\pm L, y_3) = \pm \nu_0 L y_3^\nu, \quad (29)$$

в случае  $AB = 22$  — условие  $M_2^{22\nu}(\pm L, y_3) = \pm L y_3^\nu$ . Из последнего равенства и (29) следует равенство

$$\mathbf{M}^{11\nu}(y_2, y_3) = \nu_0 \mathbf{M}^{22\nu}(y_2, y_3).$$

**Эффективные жесткости**  $D_{2222}^{\nu+\mu}$ ,  $D_{1111}^{\nu+\mu}$ . Для того чтобы рассчитать  $D_{2222}^{\nu+\mu}$ , необходимо решить задачу (4) при  $AB = 22$ . Жесткость  $D_{2222}^{\nu+\mu}$  вычисляется по формуле

$$D_{2222}^{\nu+\mu} = \frac{(-1)^\mu}{|S_0|} \int_P a_{22i\kappa} M_{i,\kappa}^{22\nu}(y_2, y_3) y_3^\mu dy_2 dy_3. \quad (30)$$

Для того чтобы рассчитать  $D_{1111}^{\nu+\mu}$ , требуется решить задачу (30) при  $AB = 11$ . Жесткость  $D_{1111}^{\nu+\mu}$  вычисляется по формуле

$$D_{1111}^{\nu+\mu} = \frac{1}{|S_0|} \int_P (a_{11i\kappa} N_{i,\kappa}^{11\nu}(y_2, y_3) + (-1)^\nu a_{1111} y_3^\nu) (-1)^\mu y_3^\mu dy_2 dy_3. \quad (31)$$

Подставляя  $\mathbf{N}^{11\nu}(y_2, y_3) = \mathbf{M}^{11\nu}(y_2, y_3) - (-1)^\nu \mathbf{u}^{11\nu}(y_2, y_3)$  в (31), получаем

$$D_{1111}^{\nu+\mu} = \frac{1}{|S_0|} \int_P (a_{11i\kappa} M_{i,\kappa}^{11\nu}(y_2, y_3) - (-1)^\nu a_{11i\kappa} u_{i,\kappa}^{11\nu}(y_2, y_3) + (-1)^\nu a_{1111} y_3^\nu) (-1)^\mu y_3^\mu dy_2 dy_3. \quad (32)$$

С учетом (9) имеем

$$-a_{11i\kappa} u_{i,\kappa}^{11\nu}(y_2, y_3) + a_{1111} y_3^\nu = \frac{(a_{1122} + a_{1133}) a_{2211}}{a_{2222} + a_{2233}} y_3^\nu + a_{1111} y_3^\nu. \quad (33)$$

Для изотропного материала выражение (33) равно  $E y_3^\nu$  и (32) принимает вид

$$D_{1111}^{\nu+\mu} = \frac{1}{|S_0|} \int_P (a_{11i\kappa} M_{i,\kappa}^{11\nu}(y_2, y_3) + (-1)^\nu E y_3^\nu) (-1)^\mu y_3^\mu dy_2 dy_3.$$

Для вычисления жесткостей  $D_{ABAB}^{2\nu}$  при  $\nu = 0, 1$ , т. е. жесткостей на растяжение и изгиб, можно использовать формулу [9]

$$D_{ABAB}^{2\nu} = \frac{2}{|S_0|} \int_P E^{ABAB\nu}(y_2, y_3) dy_2 dy_3, \quad (34)$$

где  $E^{ABAB\nu}(y_2, y_3) = a_{ijkl} M_{i,j}^{AB\nu} M_{k,l}^{AB\nu}$  — локальная энергия, соответствующая решению ячеечной задачи с индексами  $A, B$ .

**Эффективные жесткости**  $D_{1122}^{\nu+\mu}$ ,  $D_{2211}^{\nu+\mu}$ . Жесткости  $D_{1122}^{\nu+\mu}$  и  $D_{2211}^{\nu+\mu}$  равны (см., например, [9]). Рассмотрим выражение

$$D_{2211}^{\nu+\mu} = \frac{1}{|S_0|} \int_P (a_{22i\kappa} N_{i,\kappa}^{11\nu}(y_2, y_3) + (-1)^\nu a_{2211} y_3^\nu) (-1)^\mu y_3^\mu dy_2 dy_3.$$

Поскольку  $\mathbf{N}^{11\nu}(y_2, y_3) = \mathbf{M}^{11\nu}(y_2, y_3) - (-1)^\nu \mathbf{u}^{11\nu}(y_2, y_3)$ , с учетом (8), (11) получаем

$$D_{2211}^{\nu+\mu} = \frac{1}{|S_0|} \int_P a_{22i\kappa} M_{i,\kappa}^{11\nu}(y_2, y_3) (-1)^\mu y_3^\mu dy_2 dy_3.$$

Аналогично с учетом (19), (18) находим

$$D_{1122}^{\nu+\mu} = \frac{1}{|S_0|} \int_P a_{11i\kappa} M_{i,\kappa}^{22\nu}(y_2, y_3) (-1)^{\mu+\nu} y_3^{\mu+\nu} dy_2 dy_3.$$

**Эффективные жесткости**  $D_{1212}^{\nu+\mu}$ ,  $D_{2121}^{\nu+\mu}$ . Жесткости  $D_{1212}^{\nu+\mu}$  и  $D_{2121}^{\nu+\mu}$  равны [9]. При  $\nu = 0$  с учетом симметрии задачу (26) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Delta M^{120} &= 0 \quad \text{в } P_0, \\ \frac{\partial M^{120}}{\partial \mathbf{n}} &= 0 \quad \text{на } \Gamma_0, \\ M^{120}(\pm L, y_3) &= \pm L. \end{aligned}$$

При  $\nu = 0$  формула (2) для эффективных жесткостей принимает вид

$$\begin{aligned} D_{1212}^\mu &= \frac{(-1)^\mu}{|S_0|} \int_P (a_{121\kappa} N_{1,\kappa}^{120}(y_2, y_3) + a_{1212}) y_3^\mu dy_2 dy_3 = \\ &= \frac{(-1)^\mu}{|S_0|} \int_P (a_{1212} N_{1,2}^{120}(y_2, y_3) + a_{1212}) y_3^\mu dy_2 dy_3 = \\ &= \frac{(-1)^\mu}{|S_0|} \int_P a_{1212} M_{,2}^{120}(y_2, y_3) y_3^\mu dy_2 dy_3. \end{aligned} \quad (35)$$

Последнее равенство в (35) справедливо для пластины из изотропного материала, для которого  $a_{1213} = 0$ .

При  $\nu = 1$  формула (2) принимает вид

$$\begin{aligned} D_{1212}^{1+\mu} &= \frac{(-1)^\mu}{|S|} \int_P a_{1212} (N_{1,2}^{121}(y_2, y_3) - y_3) y_3^\mu dy_2 dy_3 = \\ &= \frac{(-1)^\mu}{|S|} \int_P a_{1212} N_{1,2}^{121}(y_2, y_3) y_3^\mu dy_2 dy_3 - \frac{(-1)^\mu}{|S|} \int_P a_{1212} y_3^{1+\mu} dy_2 dy_3, \end{aligned} \quad (36)$$

где функция  $N_1^{121}(y_2, y_3)$  определяется из решения задачи (27). В случае тонкой оболочки процедура осреднения, основанная на решении задачи (27) и использовании формулы (36), является неэффективной.

**Пример численного расчета эффективных жесткостей тонкой гофрированной оболочки.** Результаты расчета эффективных жесткостей гофрированных оболочек имеются только для тонких оболочек. Одной из последних работ, посвященных расчету эффективных жесткостей тонких гофрированных пластин, является работа [1], в которой расчеты проводились по формулам из [18, 19] и по формулам из [1, 2].

Выполним расчет эффективных жесткостей для тонкой гофрированной пластины, рассмотренной в [1], используя предлагаемый в данной работе метод. Как и в [1], рассмотрим пластину с гофром синусоидальной формы, имеющим следующие размеры: толщина

Таблица 1

Значения эффективной жесткости, вычисленные по различным формулам

Источник	$D_{2222}^0$ , Н/м	$D_{2222}^2$ , Н·м	$D_{1111}^0$ , Н/м	$D_{1111}^2$ , Н·м	$D_{1212}^0$ , Н/м	$D_{1212}^2$ , Н·м
Данная работа (формула (30))	46 458	251	187 155 658	1 026 941	50 172 461	161
Работа [1]	47 613	261	187 080 000	1 025 540	50 113 000	162

Таблица 2

Значения эффективной жесткости, вычисленные по формулам (30) и (34)

Номер формулы	$D_{2222}^0$ , Н/м	$D_{2222}^2$ , Н·м
(30)	46 458	250,9
(34)	46 304	250,0

пластины  $h = 0,005$  м, период гофра равен  $0,64$  м, высота гофра  $0,11$  м. Материал пластины имел следующие характеристики: модуль Юнга  $E = 30$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,2$ . При указанных размерах гофра ячейка периодичности является тонкостенной оболочкой (показатель тонкостенности равен  $0,005/0,640 = 0,0078$ ; тонкостенными считаются оболочки с показателем тонкостенности менее  $1/20$  [15]).

В табл. 1 приведены значения эффективной жесткости, вычисленные по формуле (30), и эффективные жесткости, рассчитанные в [1]. (Во второй строке указаны значения жесткости плоской пластины толщиной  $0,005$  м из того же материала.) Эти значения практически совпадают. Заметим, что формулы в [1] выведены на основе модели оболочки при наличии ряда допущений, а формулы, полученные в данной работе с использованием предлагаемого подхода, основаны на трехмерной задаче. Преимуществом подхода, используемого в [1], является возможность получения явных формул для расчета жесткостей. Явные формулы для расчета жесткостей гофрированной пластины, отличающиеся от приведенных в [1], получены в рамках аналогичных [1] подходов в работах [2, 7, 18, 19]. Осредненные жесткости, рассчитанные по теории осреднения на основе трехмерной задачи теории упругости, наиболее близки к значениям жесткости, рассчитанным по формулам из работы [1].

Для проверки точности численных расчетов вычислены значения  $D_{2222}^0$  и  $D_{2222}^2$  как по формуле (30), так и по формуле (34). Теоретически значения, вычисленные по формулам (30) и (34), должны совпадать. В табл. 2 приведены значения жесткостей, полученные по формулам (30) и (34). Относительная невязка при вычислении значения  $D_{2222}^0$  составляет  $0,33$  %, при вычислении значения  $D_{2222}^2$  —  $0,375$  %. Из табл. 2 следует, что точность расчетов достаточна для решения инженерных задач.

В расчетах использовалось приблизительно  $25\,000$  треугольных плоских конечных элементов (по толщине пластины расположено примерно  $10$  элементов). Время решения задачи (30) составляло менее  $1$  мин, время вычисления интегралов (30), (34) не превышало нескольких секунд.

**Вычисление эффективных жесткостей  $D_{1212}^2$ ,  $D_{2121}^2$  для тонких оболочек.** При вычислении эффективных жесткостей  $D_{1212}^2$ ,  $D_{2121}^2$  с использованием решения задачи (27) и формулы (36) возникают большие погрешности для рассмотренной выше тонкой оболочки. Это обусловлено тем, что при вычислении появляются величины различного порядка. В рассматриваемом примере интегралы в (36) имеют порядок  $10^6$  Н·м (так,

$\frac{E}{|S|} \int_P y_3^2 dy_2 dy_3 = 420\,629 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ), в то время как эффективные жесткости  $D_{1212}^2, D_{2121}^2$  имеют порядок  $10^2 \text{ Н} \cdot \text{м}$  (оценкой этих жесткостей может служить жесткость на кручение плоской пластины той же толщины ( $\delta = 0,005$ ), равная  $E\delta^3/[24(1 + \nu)] \approx 130 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ). Таким образом, в формуле (36) эффективные жесткости, имеющие порядок  $10^2$ , выражаются через разность величин порядка  $10^6$ . В результате вычислительная процедура, основанная на использовании формул (27), (36), оказывается неустойчивой: малые относительные погрешности, возникающие при вычислении интегралов (36), приводят к появлению большой относительной погрешности при вычислении их разности.

Ниже предлагается способ расчета жесткостей  $D_{1212}^2, D_{2121}^2$ , при использовании которого для тонких оболочек не появляются величины различного порядка. Введем функцию  $\psi$ :

$$\psi_{,3} = N_{1,2}^{121} - y_3, \quad \psi_{,2} = -N_{1,3}^{121}. \tag{37}$$

Равенство  $(N_{1,2}^{121} - y_3)_{,2} = -N_{1,33}^{121}$ , следующее из  $\Delta N_1^{121} = 0$  (см. (27)), обеспечивает существование такой функции. Уравнения (37) аналогичны формулам для определения функции, сопряженной с функцией  $N_1^{121}$  [20].

Дифференцируя (37), получаем

$$\psi_{,33} = N_{1,23}^{121} - 1, \quad \psi_{,22} = -N_{1,32}^{121}. \tag{38}$$

Складывая уравнения (38), находим

$$\Delta\psi = 1 \quad \text{в } P_0. \tag{39}$$

Граничные условия на верхней и нижней границах  $\Gamma_0$  (27) запишем в виде  $(N_{1,2}^{121} - y_3)n_2 + N_{1,3}^{121}n_3 = 0$ . С использованием функции  $\psi$  эти условия можно записать в виде

$$\frac{\partial\psi}{\partial s} = \psi_{,3}n_2 - \psi_{,2}n_3 = 0, \tag{40}$$

где  $\partial/\partial s$  — производная вдоль границы  $\Gamma_0$ . В силу (40) функция  $\psi$  является постоянной на верхней и нижней границах. Без ограничения общности можно считать, что на нижней границе  $\psi = 0$ .

Величины  $\partial N_1^{121}/\partial \mathbf{n}$  периодичны. Так как  $\partial N_1^{121}/\partial \mathbf{n} = \psi_{,3}n_2 + y_3n_2 - \psi_{,3}n_3 = \partial\psi/\partial s + y_3n_2$ , то  $\partial\psi/\partial s$  также периодичны. Поэтому

$$\psi(\pm L, y_3) = \int_{H-h/2}^{y_3} \frac{\partial\psi}{\partial s} ds.$$

Величина

$$\psi(\pm L, H + h/2) = \int_{H-h/2}^{H+h/2} \frac{\partial\psi}{\partial s} ds = \int_{H-h/2}^{H+h/2} \frac{\partial N_1^{121}}{\partial \mathbf{n}} ds$$

равна несимметричной жесткости  $D_{1212}^1$ , равной нулю вследствие симметричности решения ячеечной задачи (26) ( $D_{1212}^1$  вычисляется как через решение задачи (26), так и через решение задачи (27) (см. формулу (2)); вычисленные обоими способами значения равны [9]). Следовательно,  $\psi = 0$  и на верхней границе.

В результате получаем граничные условия для уравнения (39)

$$\begin{aligned} \psi(y_2, y_3) &= 0 \quad \text{на } \Gamma_0, \\ \psi(y_2, y_3) &\text{ периодическая по } y_2 \in [-L, L]. \end{aligned} \quad (41)$$

Из (36), (37) получаем формулу для вычисления жесткости

$$D_{1212}^2 = -\frac{1}{|S|} \int_P a_{1212} \psi_{,3}(y_2, y_3) y_3 dy_2 dy_3. \quad (42)$$

В задаче (39), (41) и формуле (42) отсутствуют величины разного порядка.

Жесткость  $D_{1212}^2$  в табл. 1 вычислена с использованием описанного в данном пункте метода.

**Заключение.** В работе изложена процедура расчета эффективных жесткостей гофрированной пластины путем сведения трехмерной ячеечной задачи к двумерной задаче. Понижение размерности задачи позволяет увеличить точность вычисления эффективных жесткостей.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Ye Z., Berdichevsky V. L., Yu W.** An equivalent classical plate model of corrugated structures // Intern. J. Solids Structures. 2014. V. 51, N 11/12. P. 2073–2083.
2. **Xia Y., Friswell M. I., Saavedra Flores E. I.** Equivalent models of corrugated panels // Intern. J. Solids Structures. 2012. V. 49, N 13. P. 1453–1462.
3. **Buannic N., Cartraud P., Quesnel T.** Homogenization of corrugated core sandwich panels // Composite Structures. 2003. V. 59. P. 299–312.
4. **Talbi N., Batti A., Ayad R., Guo Y. Q.** An analytical homogenization model for finite element modelling of corrugated cardboard // Composite Structures. 2009. V. 88. P. 280–289.
5. **Bartolozzi G., Pierini M., Orrenius U., Baldanzini N.** An equivalent material formulation for sinusoidal corrugated cores of structural sandwich panels // Composite Structures. 2013. V. 100. P. 173–185.
6. **Шалашилин В. И.** К расчету оболочек, выполненных из гофрированного материала // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1964. № 3. С. 132–137.
7. **Andrianov I. V., Diskovsky A. A., Kholod E. G.** Homogenization method in the theory of corrugated plates // Tech. Mech. 1998. Bd 18. S. 123–133.
8. **Колпаков А. Г.** К определению усредненных характеристик упругих каркасов // Прикл. математика и механика. 1985. Т. 49, вып. 6. С. 969–977.
9. **Аннин Б. Д.** Расчет и проектирование композиционных материалов и элементов конструкций / Б. Д. Аннин, А. Л. Каламкаров, А. Г. Колпаков, В. З. Партон. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 1993.
10. **Caillerie D.** Thin elastic and periodic plates // Math. Methods Appl. Sci. 1984. V. 6. P. 159–191.
11. **Kohn R. V., Vogelius M.** A new model for thin plates with rapidly varying thickness // Intern. J. Solids Structures. 1984. V. 20, N 4. P. 333–350.
12. **Levinski T.** Effective stiffness of transversely non-homogeneous plates with univirectional periodic structure // Intern. J. Solids Structures. 1995. V. 32, N 19. P. 3261–3287.
13. **Frikha A., Cartraud P., Tryssede F.** Mechanical modeling of helical structures accounting for translation invariance. Pt 1. Static behavior // Intern. J. Solids Structures. 2013. V. 50, N 9. P. 1373–1382.

14. **Bendsøe M. P.** Optimization of structural topology, shape and material. Heidelberg: Springer, 1995.
15. **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988.
16. **Колпаков А. Г.** Жесткости упругих цилиндрических балок // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, вып. 2. С. 102–109.
17. **Kolpakov A. G.** Stressed composite structures: Homogenized models for thin-walled nonhomogeneous structures with initial stresses. Berlin, etc.: Springer-Verlag, 2010.
18. **Huber M. T.** Die theorie des kreuzweise bewehrten eisenbetonplatten // Bauingenier. 1923. Bd 4. S. 354–360.
19. **Seydel E.** Shear buckling of corrugated plates // Jbuch Deutschen Versuchsanstalt Luftfahrt. 1931. Bd 9. S. 233–245.
20. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды: В 2 т. М.: Наука, 1973. Т. 2.

*Поступила в редакцию 20/III 2015 г.,  
в окончательном варианте — 16/VI 2015 г.*

---