УДК 532.72

ТЕПЛОВАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ВОЗМУЩЕННОГО ПОТОКА ЖИДКОСТИ

Т. А. Боднарь

Технологический институт Алтайского государственного технического университета, 659305 Бийск

Изучается устойчивость периодических решений неавтономной нелинейной задачи, описывающей тепловое состояние осевого потока жидкости с непрерывно распределенными источниками тепла. На поток действуют внешние возмущения малой амплитуды, изменяющиеся во времени по известным периодическим законам. Решается спектральная задача методом параметрикса и определяются критические условия теплового взрыва в линейном приближении. Устойчивость периодического решения в критической точке оценивается с использованием известной теоремы о факторизации, учитывающей влияние нелинейных членов уравнения теплового баланса. Результаты расчетов показывают, что периодическое решение устойчиво, если в критической точке суммарное действие внешних периодических возмущений направлено на снижение температуры потока жидкости.

1. Постановка задачи. В теории теплового взрыва [1, 2] физико-химическое состояние сплошной среды с непрерывно распределенными источниками тепла описывается системой уравнений диффузии, теплопроводности и кинетики. Наиболее полно исследован случай, когда температурное поле среды и поле концентрации одного из реагирующих компонентов, ограничивающего скорость экзотермической реакции, подобны. В этом случае уравнение диффузии тождественно уравнению теплопроводности, и задача теплового состояния среды сводится к одному уравнению в частных производных, удовлетворяющему некоторым граничным условиям. Задача для одномерного потока жидкости с непрерывно распределенными источниками тепла в безразмерных координатах имеет вид

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = a\,\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} - u\,\frac{\partial\theta}{\partial x} + \varphi(\theta) \qquad (t_0 \leqslant t \leqslant \infty,\ 0 \leqslant x \leqslant l,\ u \geqslant 0); \tag{1.1}$$

$$\theta(0,t) = 0, \qquad \frac{\partial\theta(l,t)}{\partial x} = 0, \tag{1.2}$$

где x — координата; t — время; θ — температура; a — температуропроводность; u — скорость потока, направленная в сторону положительных значений координаты x; t_0 — начальный момент времени; l — координата правой границы области; $\varphi(\theta)$ — функция источника, характеризующая интенсивность тепловыделения в потоке (обычно по закону Аррениуса $\varphi(\theta) = z\exp(\theta(1+\beta\theta)^{-1})$, $\beta = \mathrm{const} \geqslant 0$, z — предэкспоненциальный множитель). В (1), (2) переход к размерным параметрам и координатам осуществляется с помощью общепринятых масштабов координаты и времени, приведенных в [1, 2].

В [3] проведен анализ устойчивости решения нелинейной задачи (1.1), (1.2) при постоянных во времени температуропроводности a, скорости потока u и коэффициентах b_k в разложении функции источника в ряд

$$\varphi(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k\theta^k, \qquad b_k = \frac{1}{k!}\,\frac{\partial^k\varphi(0)}{\partial\theta^k}. \tag{1.3}$$

Рассмотрим задачу (1.1), (1.2) при действии на поток жидкости зависящих от времени возмущений, рассматриваемых как внешние параметры управления или контроля. Пусть

$$a = a_0 + a_1(t), \quad u = u_0 + u_1(t), \quad b_0 = b_0(t), \quad b_k = b_{k0} + b_{k1}(t), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{1.4}$$

где a_0, u_0, b_{k0} — постоянные; $a_1(t)$, $u_1(t)$, $b_0(t)$, $b_{k1}(t)$ — непрерывные периодические функции времени, удовлетворяющие начальным условиям $a_1(t_0) = 0$, $u_1(t_0) = 0$, $b_0(t_0) = 0$, $b_{k1}(t_0) = 0$.

Ставится задача определения устойчивости решения нестационарной задачи (1.1), (1.2) с учетом разложения (1.3) и коэффициентов (1.4). Свободный коэффициент ряда (1.3) запишем в виде $b_0 = \Delta b_0(t)$, где Δ — функция, принимающая значения 0 или 1. Вначале исследуем устойчивость бифуркационных решений при $\Delta = 0$, затем изолированных решений при $\Delta = 1$.

2. Устойчивость решения линеаризованной задачи. Запишем линеаризованное уравнение (1.1) при $\Delta = 0$ в операторном виде

$$L\theta = 0, \qquad L = (a_0 + a_1(t))\frac{\partial^2}{\partial x^2} - (u_0 + u_1(t))\frac{\partial}{\partial x} + b_{10} + b_{11}(t) - \frac{\partial}{\partial t}. \tag{2.1}$$

Чтобы построить фундаментальное решение уравнения (2.1), воспользуемся методом параметрикса [4]. В качестве параметрикса $G(x, t; \xi, \tau)$ возьмем фундаментальное решение уравнения

$$L_0\theta = 0, \qquad L_0 = a_0\,\frac{\partial^2}{\partial x^2} - u_0\,\frac{\partial}{\partial x} + b_{10} - \frac{\partial}{\partial t},$$

удовлетворяющее граничным условиям (1.2):

$$G(x, t; \xi, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \exp\Big(\sigma_i(t - \tau) + \frac{u_0(x - \xi)}{2}\Big) \sin\lambda_i x \sin\lambda_i\xi,$$

где τ — момент времени из интервала (t_0, t); ξ — координата из интервала $(0, l)$; λ_n — положительные корни трансцендентного уравнения $\operatorname{tg}\lambda l = -2\lambda/u_0$, расположенные в порядке возрастания: $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$; $\sigma_n = b_{10} - u_0^2/4 - \lambda_n^2$ — собственное значение оператора L_0. По определению $G(x, t; \xi, \tau)$ как функция x, t при фиксированных ξ, τ удовлетворяет уравнению $L_0\theta = 0$.

Пусть в начальный момент $t_0 = 0$ температура потока распределена по закону

$$\theta(x, 0) = \theta_0(x) = \exp\Big(\frac{u_0 x}{2}\Big) \sum_{n=1}^{\infty} \sin\lambda_n x. \tag{2.2}$$

Тогда функция

$$\Theta^0(x, t) = \int\limits_0^l G(x, t; \xi, 0)\theta_0(\xi)\, d\xi$$

является решением задачи Коши (уравнение $L_0\theta = 0$ с условиями (1.2), (2.2)). После интегрирования имеем

$$\Theta^0(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp\Big(\sigma_n t + \frac{u_0 x}{2}\Big) \sin\lambda_n x. \tag{2.3}$$

Поскольку спектр оператора L_0 удовлетворяет неравенствам $\sigma_1 > \sigma_n$ при $n > 1$, из (2.3) следует, что при $\sigma_1 < 0$ $\Theta^0(x, t) \to 0$ и стационарное решение уравнения $L_0\theta = 0$ устойчиво, а при $\sigma_1 > 0$ $\Theta^0(x, t) \to \infty$ и решение неустойчиво. Устойчивость стационарного решения в критической точке $\sigma_1 = 0$ при алгебраически простом σ_1 изучена в [3].

Правую часть (2.3) можно рассматривать как сумму проекций решения на пространство собственных функций $y_n^0 = \exp{(u_0 x/2)} \sin \lambda_n x$, $n = 1, 2, \dots$ оператора L_0. Устойчивость решения уравнения $L\theta = 0$ в точке $\sigma_1 = 0$ определяется проекцией на собственную функцию y_1^0, так как остальные проекции экспоненциально убывают со временем. Поэтому при построении решения уравнения (2.1) в точке $\sigma_1 = 0$ будет сохранена только его проекция на y_1^0.

Фундаментальное решение $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$ уравнения (2.1) имеет вид [4]

$$\Gamma(x, t; \xi, \tau) = G(x, t; \xi, \tau) + \int\limits_{\tau}^{t} \int\limits_{0}^{l} G(x, t; \eta, \zeta) \Phi(\eta, \zeta; \xi, \tau) \, d\eta \, d\zeta,$$

где функция $\Phi(x, t; \xi, \tau)$ является решением интегрального уравнения Вольтерра

$$\Phi(x, t; \xi, \tau) = LG(x, t; \xi, \tau) + \int\limits_{\tau}^{t} \int\limits_{0}^{l} LG(x, t; \eta, \zeta) \Phi(\eta, \zeta; \xi, \tau) \, d\eta \, d\zeta \tag{2.4}$$

с ядром

$$LG(x, t; \eta, \zeta) = \Big(a_1(t) \, \frac{\partial^2}{\partial x^2} - u_1(t) \, \frac{\partial}{\partial x} + b_{11}(t)\Big) G(x, t; \eta, \zeta).$$

Решение уравнения (2.4) можно представить в виде суммы

$$\Phi(x, t; \xi, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} (LG)_k(x, t; \xi, \tau), \tag{2.5}$$

где $(LG)_{k+1}(x, t; \xi, \tau) = \int\limits_{\tau}^{t} \int\limits_{0}^{l} [LG(x, t; \eta, \zeta)] (LG)_k(\eta, \zeta; \xi, \tau) \, d\eta \, d\zeta$; $(LG)_1(x, t; \xi, \tau) = LG(x, t; \xi, \tau)$.

Сходимость ряда (2.5) для непрерывных по Гёльдеру функций $a_1(t)$, $u_1(t), b_{11}(t)$ доказана в [4]. Если отождествить коэффициент непрерывности Гёльдера A с максимальной амплитудой периодических функций $a_1(t)$, $u_1(t)$, $b_{11}(t)$, то $(LG)_k(x, t; \xi, \tau) = O(A^k)$. Отсюда следует, что при малых амплитудах возмущений параметров потока жидкости ряд (2.5) быстро сходится.

Решением возмущенной задачи Коши (уравнения (2.1) с условиями (1.2), (2.2)) является функция

$$\Theta(x, t) = \int\limits_{0}^{l} \Gamma(x, t; \xi, 0) \theta_0(\xi) \, d\xi,$$

представляющая собой сумму

$$\Theta(x, t) = \Theta^0(x, t) + \Theta^1(x, t), \tag{2.6}$$

где $\Theta^1(x, t)$ — часть решения, обусловленная возмущениями $a_1(t)$, $u_1(t)$, $b_{k1}(t)$.

При малых амплитудах периодических по времени возмущений можно пренебречь нелинейными относительно амплитуд слагаемыми ряда (2.5) и представить функцию $\Theta^1(x, t)$ из (2.6) в виде

$$\Theta^1(x, t) = \exp\Big(\sigma_1 t + \frac{u_0 x}{2}\Big) \sin(\lambda_1 x) \psi(l, t) + O(A^2), \tag{2.7}$$

где

$$\psi(l,t) = \frac{lu_0^2 + 2u_0 - 4\lambda_1^2 l}{8} \int\limits_0^t a_1(\zeta)\,d\zeta - \frac{lu_0 + 2}{4} \int\limits_0^t u_1(\zeta)\,d\zeta + \frac{\lambda_1 l - \sin\lambda_1 l \cos\lambda_1 l}{2\lambda_1} \int\limits_0^t b_{11}(\zeta)\,d\zeta.$$

Как указано выше, в (2.7) удержана лишь проекция решения на собственную функцию

$$y_1(x,t) = \exp(u_0 x/2)\sin(\lambda_1 x)\psi(l,t), \tag{2.8}$$

соответствующую максимальному собственному значению σ_1. Если первообразные функций $a_1(t)$, $u_1(t)$, $b_{11}(t)$ в (2.7) являются периодическими, то $\psi(l,t) = \psi(l,t+T)$ и решение (2.6) в точке $\sigma_1 = 0$ также является периодическим: $\Theta(x,t) = \Theta(x,t+T)$. Вообще говоря, неважно, каким образом получена функция $\psi(l,t)$. Необходимо, чтобы она принимала одинаковые значения через равные промежутки времени T, отсчитываемые от начального момента.

Устойчивость решения (2.6) зависит от знака собственного значения параметра σ_1, который отождествляется с параметром $\mu \in (-\infty,\infty)$. Решение (2.6) строго теряет устойчивость, когда μ, переходя из отрицательной области в положительную, проходит через нуль. Критической точке $\mu = 0$ соответствуют критические параметры потока жидкости, изменение которых в сторону увеличения μ приводит к тепловому взрыву.

3. Устойчивость периодического решения. Для определения устойчивости периодического решения задачи в критической точке $\mu = 0$ необходимо оценить влияние нелинейных слагаемых в правой части уравнения (1.1) на параметр μ. Положим $\Delta = 0$, $\varphi(\theta) = b_1\theta + b_2\theta^2 + O(\theta^3)$ и запишем уравнение (1.1) в операторном виде

$$F(t,\theta,\mu) \equiv L(\mu)\theta + (b_{20} + b_{21}(t))\theta^2 + O(\theta^3) = 0, \tag{3.1}$$

где линейный оператор

$$L(\mu) = (a_0 + a_1(t))\frac{\partial^2}{\partial x^2} - (u_0 + u_1(t))\frac{\partial}{\partial x} + \mu + \frac{u_0^2}{4} + \lambda_1^2 + b_{11}(t) - \frac{\partial}{\partial t}$$

получен подстановкой $b_{10} = \mu + u_0^2/4 + \lambda_1^2$ в выражение (2.1) для оператора L. Периодические решения $\theta(x,t) = \theta(x,t+T)$ ответвляются от решения $\theta(x,t) = 0$, когда μ, возрастая, проходит через нуль. В соответствии с [5] решения нелинейного уравнения (3.1) в окрестности точки $\theta = 0$, $\mu = 0$ могут быть построены в виде рядов по степеням амплитуды ε. Амплитуда представляет собой проекцию на собственное подпространство, ассоциированное с сопряженным собственным вектором $y_1^*(x,t)$, принадлежащим собственному значению $\sigma_1 = 0$ сопряженного оператора

$$L^*(\mu) = (a_0 + a_1(t))\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (u_0 + u_1(t))\frac{\partial}{\partial x} + \mu + \frac{u_0^2}{4} + \lambda_1^2 + b_{11}(t) + \frac{\partial}{\partial t}.$$

Следуя процедуре, использованной при определении собственных функций оператора $L(\mu)$, можно найти собственные функции y_k^* оператора $L^*(\mu)$. При изучении устойчивости периодических решений представляет интерес сопряженная собственная функция, соответствующая максимальному собственному значению σ_1 в точке $\mu = 0$:

$$y_1^* = B\exp(-u_0 x/2)\sin(\lambda_1 x)\psi^*(l,t), \tag{3.2}$$

где

$$\psi^*(l,t) = \frac{lu_0^2 - 2u_0 - 4\lambda_1^2 l}{8} \int\limits_0^t a_1(\zeta)\,d\zeta - \frac{lu_0 - 2}{4} \int\limits_0^t u_1(\zeta)\,d\zeta + \frac{\lambda_1 l - \sin\lambda_1 l \cos\lambda_1 l}{2\lambda_1} \int\limits_0^t b_{11}(\zeta)\,d\zeta;$$

B — нормализующий множитель. Условие нормировки $\langle y_1, y_1^* \rangle = 1$ выполняется, если

$$B = \frac{2\lambda_1 T}{\lambda_1 l - \sin\lambda_1 l \cos\lambda_1 l} \left[\int\limits_0^T \psi(l,t)\psi^*(l,t)\, dt \right]^{-1}.$$

В пространстве вещественных собственных функций оператора $L(\mu)$ для каждой пары функций y_n, y_m^* определено скалярное произведение

$$\langle y_n, y_m^* \rangle = \frac{1}{T} \int\limits_0^T \int\limits_0^l y_n y_m^* \, dx\, dt.$$

Для любых n, m справедливы условия ортогональности $\langle y_n, y_m^* \rangle = \delta_{nm}$, где δ_{nm} — символ Кронекера.

Воспользуемся скалярным произведением и определим амплитуду ε как проекцию:

$$\varepsilon = \langle \theta, y_1^* \rangle = \frac{1}{T} \int\limits_0^T \int\limits_0^l y_1 y_1^* \, dx\, dt.$$

Решение уравнения (3.1) будем искать в виде рядов по степеням амплитуды

$$\theta(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^k \theta_k}{k!}, \qquad \mu(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^k \mu_k}{k!}. \tag{3.3}$$

Неизвестные функции θ_k и коэффициенты μ_k удовлетворяют уравнениям, полученным в результате подстановки рядов (3.3) в уравнение (3.1) и приравнивания к нулю совокупностей членов при независимых степенях амплитуды ε. Устойчивость решения уравнения (3.1), удовлетворяющего граничным условиям (1.2) и начальному условию $\theta(x,0) = 0$, определяется в критической точке $\mu = 0$ первым ненулевым коэффициентом μ_k из ряда $\mu_1, \mu_2, \ldots$. Чтобы определить первый коэффициент μ_1, необходимо решить уравнения при первой и второй степенях амплитуды

$$L(0)\theta_1 = 0; \tag{3.4}$$

$$L(0)\theta_2 + 2\mu_1\theta_1 + 2(b_{20} + b_{21}(t))\theta_1^2 = 0. \tag{3.5}$$

Уравнение (3.4) имеет единственное решение $\theta_1 = y_1(x,t)$, совпадающее с (2.7) при $\mu = \sigma_1 = 0$. Уравнение (3.5) разрешимо тогда и только тогда, когда его неоднородные слагаемые ортогональны собственному подпространству оператора $L(0)$, ассоциированному с сопряженным собственным вектором y_1^* (альтернатива Фредгольма). Следовательно,

$$\mu_1 \langle \theta_1, y_1^* \rangle + \langle (b_{20} + b_{21}(t))\theta_1^2, y_1^* \rangle = 0,$$

и коэффициент μ_1 определяется с учетом решения уравнения (3.4) и нормировки $\langle y_1, y_1^* \rangle = 1$ в виде

$$\mu_1 = -\langle (b_{20} + b_{21}(t)) y_1^2, y_1^* \rangle. \tag{3.6}$$

В общем случае сомножители скалярного произведения уравнения (3.6), определенные в прямоугольнике $(0,l) \times (0,T)$, не равны нулю и не ортогональны между собой, следовательно, $\mu_1 \neq 0$. Последнее неравенство справедливо для периодических по времени решений неавтономных задач, только если $\partial^2 F(t,0,0)/\partial\theta^2 \neq 0$ и σ_1 является изолированным алгебраически простым собственным значением [5].

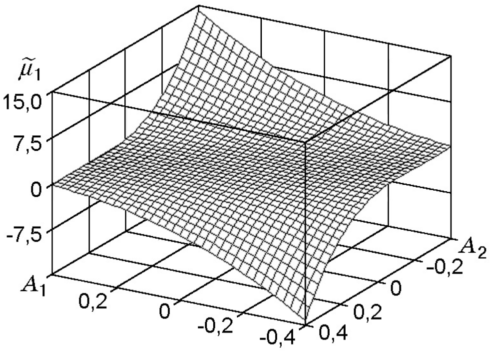

Рис. 1

В соответствии с теоремой о факторизации [5, с. 178] решение уравнения (3.1) относительно малого возмущения $\tilde{\theta}(\varepsilon)$ в малой окрестности точки $(\mu,\theta) = (0,\Theta(x,t))$ имеет вид

$$\tilde{\theta}(\varepsilon) = \exp(-\mu_1\varepsilon t)y_1\varepsilon. \tag{3.7}$$

Из (3.7) следует, что суперкритическое решение задачи $\mu_1 > 0$ устойчиво, а субкритическое решение $\mu_1 < 0$ неустойчиво. Единственность решения (3.7) достигается нормировкой $\varepsilon = 1$.

4. Результаты расчета. В классической задаче теплового взрыва [1, 2] масштабы времени и координаты выбраны таким образом, что для протекающей в жидкости экзотермической реакции нулевого порядка $a_{10} = 1$, $b_{10} = 1$, $b_{20} = 0{,}5 - \beta$. Пусть невозмущенная скорость потока $u_0 = 1$, коэффициент $\beta = 0{,}05$. При этих значениях параметров невозмущенного потока получаем критические значения $\lambda_1 = 0{,}867$, $l = 2{,}418$, $\sigma_1 = 0$ и собственную функцию $y_1^0 = \exp(x/2)\sin 0{,}867x$.

Следует отметить, что система двух уравнений относительно периодических функций $\psi(l,t)$, $\psi^*(l,t)$ содержит три независимые функции $a_1(t)$, $u_1(t)$, $b_1(t)$ и, следовательно, имеет бесконечное множество решений. Поэтому, не нарушая общности, положим

$$a_1(t) = 0, \qquad u_1(t) = A_1\sin t, \qquad b_{n1}(t) = b_{n0}A_2\sin t, \qquad n = 1,2,\ldots. \tag{4.1}$$

Амплитуды возмущений A_1, A_2 пока не конкретизируются. После подстановки соотношений (4.1) в формулы (2.8), (3.2) находим собственные функции операторов $L(\mu)$, $L^*(\mu)$

$$\begin{aligned} y_1 &= (1{,}105A_1(\cos t - 1) + 1{,}459A_2(1-\cos t))\exp(x/2)\sin 0{,}867x, \\ y_1^* &= B(0{,}105A_1(\cos t - 1) + 1{,}459A_2(1-\cos t))\exp(-x/2)\sin 0{,}867x, \end{aligned} \tag{4.2}$$

где $B = 4{,}303/(1{,}088A_1^2 + 20{,}071A_2^2 - 16{,}628A_1A_2)$ — нормализующий множитель.

Подстановка (4.1), (4.2) в (3.6) дает зависимость μ_1 от амплитуд возмущений A_1, A_2. На рис. 1 приведена зависимость $\tilde{\mu} = \mu(A_1,A_2)B^{-1}$ (замена μ_1 на $\tilde{\mu}_1$ при расчетах исключает деление на нуль в точке $A_1 = A_2 = 0$). Нормализующий коэффициент B всегда положителен, поэтому решение уравнения (3.1) устойчиво при $\tilde{\mu}_1 > 0$ и неустойчиво при $\tilde{\mu}_1 < 0$.

Результаты расчета показывают, что если в критической точке $\mu = 0$ справедливы неравенства $du/dt > 0$, $d\varphi/dt < 0$, то $\mu_1 > 0$ и решение устойчиво. Физически это означает, что в критическом тепловом состоянии жидкости температура понижается за счет увеличения конвективного переноса тепла через правую границу и уменьшения интенсивности экзотермических процессов в жидкости. При $du/dt < 0$, $d\varphi/dt > 0$ решение неустойчиво, так как в критической точке конвективный перенос через правую границу уменьшается,

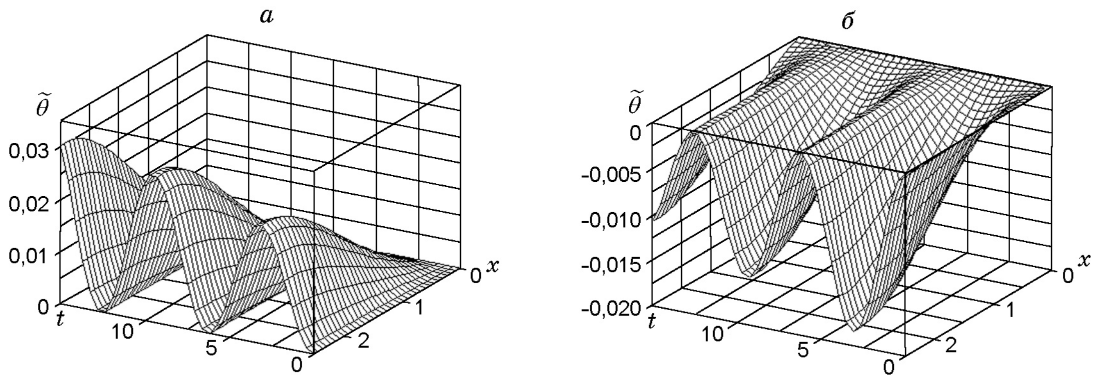

Рис. 2

а интенсивность тепловыделения в жидкости увеличивается, что приводит к экспоненциальному росту температуры. В остальных случаях устойчивость решения уравнения (3.1) определяется соотношением между A_1 и A_2. Так, если $A_1 = A_2 = 0{,}01$, то $\mu_1 = -0{,}0349$ и решение неустойчиво (рис. 2,a), если $A_1 = A_2 = -0{,}1$, то $\mu_1 = 0{,}0349$ и решение устойчиво (рис. 2,$б$). Следует пояснить, что началом отсчета эволюции малых возмущений температуры $\tilde{\theta}$ на рис. 2 является решение соответствующей стационарной задачи $\Theta(x,t)$ в критической точке $\mu = \sigma_1 = 0$.

5. Влияние свободного коэффициента b_0 на устойчивость решения. Вернемся к уравнению (1.1) и запишем его с учетом разложения (1.3) в виде

$$F(t,\theta,\mu,\Delta) \equiv L(\mu)\theta + b_0\Delta(\mu,\varepsilon) + \sum_{n=2}^{\infty}(b_{n0} + b_{n1}(t))\theta^n = 0. \tag{5.1}$$

Как показано выше, периодические решения уравнения (5.1) при $\Delta = 0$ разветвляются в двойной точке на устойчивые и неустойчивые ветви, а при $\Delta = 1$ распадаются на изолированные решения, разрушающие бифуркацию в двойной точке. В работе [5] показано, что изолированные периодические решения, обусловленные периодическим дефектом b_0, могут быть найдены тем же способом, что и стационарные, если

$$\Big\langle \frac{\partial F(t,0,0,0)}{\partial \Delta}, y_1^* \Big\rangle \neq 0. \tag{5.2}$$

Условие (5.2) и теорема о неявной функции обеспечивают существование решений уравнений $F(t,\theta,\mu,\Delta) = 0$, $\varepsilon = \langle \theta(\mu,\varepsilon), y_1^* \rangle = 1$ относительно $\theta(\mu,\varepsilon)$, $\Delta(\mu,\varepsilon)$.

Двукратное дифференцирование функции $F(t,\theta,\mu,\Delta)$ по μ,ε в точке $(\mu,\varepsilon) = (0,0)$ с последующим использованием альтернативы Фредгольма позволяет получить, так же как в стационарном случае [3], два первых ненулевых члена в разложении $\Delta(\mu,\varepsilon)$ по степеням μ,ε

$$\begin{gathered}
\Delta(\mu,\varepsilon) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2\Delta(0,0)}{\partial\varepsilon^2}\,\varepsilon^2 + 2\,\frac{\partial^2\Delta(0,0)}{\partial\varepsilon\,\partial\mu}\,\varepsilon\mu\Big),\\
\frac{\partial^2\Delta(0,0)}{\partial\varepsilon^2} = -\Big\langle \frac{\partial^2 F(t,0,0,0)}{\partial\theta^2}\,y_1^2, y_1^* \Big\rangle \Big\langle \frac{\partial F(t,0,0,0)}{\partial\Delta}, y_1^* \Big\rangle^{-1},\\
\frac{\partial^2\Delta(0,0)}{\partial\varepsilon\,\partial\mu} = -\Big\langle \frac{\partial^2 F(t,0,0,0)}{\partial\theta\,\partial\mu}\,y_1, y_1^* \Big\rangle \Big\langle \frac{\partial F(t,0,0,0)}{\partial\Delta}, y_1^* \Big\rangle^{-1}.
\end{gathered} \tag{5.3}$$

Учитывая, что

$$\Delta(\mu,\varepsilon)=1, \quad \frac{\partial F(t,0,0,0)}{\partial\Delta}=b_0, \quad \frac{\partial^2 F(t,0,0)}{\partial\theta^2}=2(b_{20}+b_{21}(t)), \quad \frac{\partial^2 F(t,0,0)}{\partial\theta\,\partial\mu}=1,$$

из (5.3) находим $\mu=\mu_1\varepsilon-\mu_{10}/\varepsilon$, где $\mu_{10}=\dfrac{1}{T}\int\limits_0^T\int\limits_0^l b_0 y_1^*\,dx\,dt$.

Устойчивость изолированных решений уравнения (5.1), содержащего периодический дефект $b_0\neq 0$, определяется следующим образом. Если производная $\partial\mu/\partial\varepsilon$ в точке $(\varepsilon,\Delta)=(1,0)$ сохраняет знак при переходе в точку $(\varepsilon,\Delta)=(1,1)$, то устойчивое при $\Delta=0$ решение остается устойчивым и при $\Delta=1$. При смене знака производных устойчивые ветви переходят в неустойчивые, и наоборот.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Франк-Каменецкий Д. А.** Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Наука, 1987.
2. **Зельдович Я. Б., Баренблатт Г. И., Либрович В. Б. и др.** Математическая теория горения и взрыва. М.: Наука, 1980.
3. **Боднарь Т. А.** Тепловая устойчивость проточного химического реактора с неподвижным слоем катализатора // Физика горения и взрыва. 1990. Т. 26, № 4. С. 68–74.
4. **Фридман А.** Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968.
5. **Йосс Ж., Джозеф Д.** Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. М.: Мир, 1983.

Поступила в редакцию 15/VIII 2001 г.,
в окончательном варианте — 8/I 2002 г.