О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТЕМПЕРАТУРЫ В ЖИДКОМ ШАРОВОМ СЛОЕ ВОКРУГ ГРАВИТИРУЮЩЕЙ СФЕРЫ

Р. С. Кузнецкий (Харьков)

Рассматривается стационарная задача о распределении температуры в жидкости известной массы, покрывающей твердую гравитирующую сферу при заданных температурах обеих сред, с которыми жидкость соприкасается. Задача решена в предположении постоянного коэффициента термического расширения жидкости. Рассмотрен ряд частных случаев. Решен вопрос об устойчивости жидкости при полученном распределении температуры. Найдено полное теплосодержание жидкости.

Пусть жидкость массы m покрывает твердую гравитирующую сферу $r = a$, причем температуры T_e сферы и среды над свободной поверхностью жидкости $r = b$ (им соответствуют индексы 1 и 2) известны. Предположение о неподвижной жидкости отвечает стационарной задаче.

Запишем для жидкости уравнение теплопроводности с граничными условиями для температуры [1]

$$\frac{d}{dr}\left(\lambda r^2 \frac{dT}{dr}\right) = 0, \qquad \lambda r^2 \frac{dT}{dr}\bigg|_{r=a,b} = \alpha_1 a^2 \Delta T_1 = \alpha_2 b^2 \Delta T_2 \qquad \left(\frac{\Delta T_1 = T_1 - T_{e1}}{\Delta T_2 = T_{e2} - T_2}\right) \tag{1}$$

и интегральное условие для массы

$$4\pi \int_a^b \frac{r^2}{v}\, dr = m \qquad (v \text{ — удельный объем}) \tag{2}$$

Решение дифференциального уравнения при постоянном коэффициенте теплопроводности λ есть

$$T = T_1 + \theta\,(1 - 1/\rho), \qquad 1 \leqslant \rho \leqslant \xi \tag{3}$$

где ρ и ξ — отношения r и b к a. Постоянные интегрирования T_1 и θ, а также ξ (или b) подлежат определению. Считая α_i константами, выразим, используя граничные условия, первые две из искомых величин через третью

$$T_1 = \frac{\beta(\gamma T_{e1} + T_{e2})\,\xi^2 - \beta\gamma T_{e1}\,\xi + T_{e1}}{\beta(\gamma+1)\,\xi^2 - \beta\gamma\xi + 1}, \qquad \theta = \frac{\beta\gamma\Delta T_e\,\xi^2}{\beta(\gamma+1)\,\xi^2 - \beta\gamma\xi + 1} \tag{4}$$

$$\beta = \alpha_2/\alpha_1, \qquad \gamma = \alpha_1 a/\lambda, \qquad \Delta T_e = T_{e2} - T_{e1}$$

Ограничимся рассмотрением несжимаемой жидкости с постоянным коэффициентом термического расширения δ

$$v = v_0 e^{\delta T}, \qquad v_0 = \text{const} \tag{5}$$

для которой (2) имеет вид уравнения

$$\vartheta^3 e^{-\vartheta}\left[\operatorname{Ei}(\vartheta) - \operatorname{Ei}(\vartheta/\xi)\right] + (3\vartheta^2 + 3\vartheta\xi + 2\xi^2)\,\xi \exp\left[-(1 - 1/\xi)\,\vartheta\right] - \\ - (3\vartheta^2 + 3\vartheta + 2) = n e^{\delta T_1} \tag{6}$$

$$\left(\vartheta = \delta\theta, \qquad n = \frac{3}{2\pi}\frac{m v_0}{a^3} < \frac{1}{2}\right)$$

трансцендентного относительно ξ. После его решения T_1 и θ определятся из (4). Ниже считаются исключенными тривиальные частные случаи, когда

$$\alpha_1 = 0 \quad (T = T_{e2}), \qquad \alpha_2 = 0 \quad (T = T_{e1}), \qquad \Delta T_e = 0 \quad (T = T_e)$$

для них

$$\xi = \sqrt[3]{{}^1\!/_2 n\, e^{\delta T} + 1}$$

Отметим, что

$$\frac{1}{\Delta T_e}\{\Delta T, \Delta T_1, \Delta T_2, \theta\} < 1 \qquad (\Delta T = T_2 - T_1) \tag{7}$$

При $\delta = 0$ уравнение (6) дает

$$\xi = \sqrt[3]{{}^1\!/_2\, n + 1} \tag{8}$$

[1] Здесь имеется в виду определение коэффициента α теплоотдачи в смысле контактной теплопроводности (см., например, [1]), в отличие от обычно используемого при технических расчетах коэффициента конвективной теплоотдачи [2].

При малом $\varepsilon = \delta \Delta T_e$, а именно $|\varepsilon| \ll \min(1;\ 1/\gamma)$, из (6) получаем

$$[\beta(\gamma+1)\xi^2 - \beta\gamma\xi + 1]\,[2(\xi^3-1) - ne^{\delta T_{e1}}] = \beta\xi^2\,[\gamma(2\xi^3 - 5\xi^2 + 3) + ne^{\delta T_{e1}}]\,\varepsilon \qquad (9)$$

Искомый корень близок к

$$\xi = \sqrt[3]{{}^1/_2\, ne^{\delta T_{e1}} + 1} \qquad (10)$$

Например, при $ne^{\delta T_{e1}} \gg 2\max(6,\ \beta^{-3/2},\ \gamma^{-3/2})$ имеем

$$\xi \approx \left(1 + \frac{\gamma}{\gamma+1}\frac{\varepsilon}{3}\right)\left(\frac{n}{2}\right)^{1/3} \exp\left(\frac{\delta T_{e1}}{3}\right) \qquad (11)$$

В случае достаточной малости n уравнение (6) дает

$$\xi = 1 + n\left[\beta\frac{\beta\gamma - 2}{(1+\beta)^2}\varepsilon n + 2(3 + 2\vartheta_0 - 3\vartheta_0^3)\exp\left(-\delta\frac{T_{e1} + 3T_{e2}}{1+\beta}\right)\right]^{-1} \qquad (12)$$

Необходимым условием существования решения (12) будет

$$0 < \xi - 1 \ll \min\left[1,\ \frac{\beta+1}{\beta}\frac{1}{\gamma+2},\ \frac{1}{|\vartheta_0|},\ \frac{(\beta+1)^2}{\beta|2-\beta\gamma||\varepsilon|},\ \frac{1}{\beta}\frac{T_{e1}+\beta T_{e2}}{\gamma T_{e1} + 2T_{e2}}\right]$$

$$\left(\vartheta_0 = \frac{\beta\gamma\varepsilon}{\beta+1}\right) \qquad (13)$$

Напротив, при $ne^{\delta T_{e2}} \gg 2\max(1;\ \beta^{-3/2};\ |\vartheta_1|^3)$ из (6) получаем

$$2\xi^3 + \vartheta_1^3[\ln\xi + \mathrm{Ei}(\vartheta_1) - \ln|\vartheta_1| - C] - (3\vartheta_1^2 + 3\vartheta_1 + 1)e^{\vartheta_1} =$$

$$= ne^{\delta T_{e2}}\left[1 + \frac{\vartheta_1}{(\gamma+1)\xi}\right] \qquad \left(\vartheta_1 = \frac{\gamma\varepsilon}{\gamma+1}\right) \qquad (14)$$

Здесь C — постоянная Эйлера. Корень близок к

$$\xi = \sqrt[3]{{}^1/_2\, n}\,\exp{}^1/_3\,\delta T_{e2} \qquad (15)$$

Выясним теперь вопрос о гидродинамической устойчивости жидкости при полученном распределении (3) температуры. Условие отсутствия конвекции есть [3]

$$\rho^2\frac{d}{d\rho}\ln T > -\frac{\delta}{c}k, \text{ или (в данном случае) } \frac{\theta}{T} > -\frac{\delta}{c}k \qquad (16)$$

где c — удельная теплоемкость жидкости и k — произведение гравитационной постоянной на массу твердой сферы, деленное на ее радиус. При $\Delta T_e > 0$ неравенство (16) выполняется, и имеет место устойчивость. При $\Delta T_e < 0$ получаем

$$\frac{T_2}{|\theta|} > \frac{c}{\delta k}, \quad \text{или} \quad \left(\frac{\gamma+1}{\gamma}T_{e2} - \frac{c}{\delta k}|\Delta T_e|\right)\xi^2 - T_{e2}\xi + \frac{T_{e1}}{\beta\gamma} > 0 \qquad (17)$$

Если корень (6) не удовлетворяет условию (17), в жидкости возможна конвекция. При ее появлении распределение температуры станет, вообще говоря, отличным от (3).

Полное теплосодержание жидкости составляет

$$J = 4\pi c\int_1^\xi \frac{T}{v}\rho^2 d\rho = \frac{2\pi a^3}{\delta v_0}e^{-\delta T_1}\left\{(\delta T_1 + \vartheta - 3)\vartheta^3 e^{-\vartheta}\left[\mathrm{Ei}(\vartheta) - \mathrm{Ei}\left(\frac{\vartheta}{\xi}\right)\right] + \right.$$

$$+ [(\delta T_1 + \vartheta)(3\vartheta^2 + 3\vartheta\xi + 2\xi^2) - 3\vartheta(\vartheta + \xi)]\,\xi\,\times$$

$$\left.\times\exp\left(-\frac{\xi - 1}{\xi}\vartheta\right) - [(\delta T_1 + \vartheta)(3\vartheta^2 + 3\vartheta + 2) - 3\vartheta(\vartheta + 1)]\right\} \qquad (18)$$

$$J = cm\left[T_1 + \theta - \frac{3\theta}{n}(\xi^2 - 1)\right] \quad \text{при } \delta = 0 \qquad (19)$$

где ξ определяется из (8).

Поступила 22 V 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными. Изд-во «Наука», 1964.
2. Кутателадзе С. С. Основы теории теплообмена. Машгиз, 1962.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат 1953.