

**О ДВИЖЕНИИ И ЗАПОЛНЕНИИ ПОЛОСТЕЙ
В БЕЗГРАНИЧНОЙ ЖИДКОСТИ И ОКОЛО ПЛОСКОСТИ**

В. В. Воинов, О. В. Воинов

(Москва)

Исследованию движения пузыря в жидкости посвящено много работ [1-8]. Методы проекционного типа применяются к задаче о полости в идеальной несжимаемой жидкости при отсутствии вихрей. Рассматривается захлопывание пузыря, имеющего начальную скорость, в безграничной жидкости, а также неподвижного пузыря около твердой стенки. Методом малого параметра проведено аналитическое исследование зарождения струи. Развита метод численного расчета, не связанный с малыми параметрами и основанный на вычислении проекции путем численного расчета соответствующих интегралов. Метод сочетает экономичность и простоту применения с высокой точностью в той области, где эффективно представление потенциала скоростей рядом по сферическим функциям.

1. Заполнение полости, движущейся в безграничной жидкости. В момент $t=0$ сферическая полость радиуса $l=1$ движется со скоростью $u \ll |l|$, движение жидкости описывается диполем и стоком в центре сферы. Давление равно нулю внутри полости и единице на бесконечности. Контур полости представим рядом по полиномам Лежандра, а потенциал скоростей Φ — рядом по сферическим функциям:

$$(1.1) \quad R = l \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n P_n(\cos \theta) \right);$$

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n l^n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta).$$

Здесь r — расстояние до центра, движущегося со скоростью $u(t)$; θ — угол, отсчитываемый от направления движения. На контуре полости $r=R$,

$$(1.2) \quad \frac{\partial R}{\partial t} + u \left(\cos \theta + \frac{\partial R}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{R} \right) = \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial R}{\partial \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}.$$

Интеграл Коши — Лагранжа на границе в движущейся системе

$$(1.3) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{u}{R} \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - u \cos \theta \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 = 1.$$

Существует произвол в выборе u при $t > 0$. Допуская, что $|u| \ll |l|$, ищем решение последовательными приближениями. Если $d_1 = 0$ в первом приближении, то относительно $\varepsilon = u/l$ коэффициенты в (1.1) имеют следующие порядки:

$$(1.4) \quad d_1 \sim \varepsilon^3, \quad d_2 \sim \varepsilon^2, \quad d_3 \sim \varepsilon^3; \\ c_1 \sim \varepsilon, \quad c_2 \sim \varepsilon^2, \quad c_3 \sim \varepsilon^3.$$

При $n \geq 4$ коэффициенты $d_n = O(\varepsilon^3)$. Пренебрегая малыми вида ε^4 , из (1.1) — (1.2) находим

$$(1.5) \quad c_0 = -l^2 l; \quad 2c_1 = ul^2(3/5d_2 - 1) - (l^3 d_1); \quad 3c_2 = -(l^3 d_2); \\ c_3 = -1/4(l^3 d_3) - 9/10l^2 u d_2; \quad c_n = -(l^3 d_n)/(n+1).$$

Здесь $n \geq 4$. Уравнение для скорости u записываем в виде

$$(1.6) \quad 3ul' + lu' = Q, \quad Q = O(\varepsilon^2).$$

Подстановка (1.5) и (1.6) в (1.3) после проектирования полученного выражения на полиномы Лежандра с точностью до малых $O(\varepsilon^4)$ позволяет найти уравнения для скорости захлопывания и амплитуд деформации:

$$(1.7) \quad 3/2l^2 + ul' = 1/4u^2 - 1; \\ A_1 = 3/5(3ld_2 - 4ld_2)u - Q(1 - 7/5d_2); \quad A_2 = -9/4u^2; \\ A_3 = -6(12/5ld_2 + ld_2)u - 6/5Qd_2; \\ A_n = l^2 d_n + 5ll'd_n + [3l^2 d_n + (2-n)ll'd_n].$$

Уравнения $A_n = 0$ при $n \geq 4$ соответствуют уравнениям линейной теории устойчивости захлопывающегося пузырька [3, 4].

Как видно из (1.7), деформации движущейся и захлопывающейся полости возбуждаются каскадным образом. За счет поступательной скорости появляется сплющивание вдоль оси движения $d_2 < 0$, и только благодаря одновременному наличию сплющивания и поступательной скорости, $d_3 \neq 0$.

Первое уравнение (1.7) и уравнение (1.6) при $Q=0$ соответствуют модельной задаче для движущейся сферы переменного объема [8], при захлопывании которой обязательно наступит момент, когда $|u| \sim |l|$. С приближением к этому моменту уравнения (1.7) потеряют силу, так как их решения d_2 и d_3 не будут малыми.

Асимптотический анализ уравнений (1.7) в области $l \ll 1$, где решение $l(t)$ имеет степенной вид, показывает, что $d_3 > 0$. Это соответствует образованию струи в «кормовой» области $\theta \sim \pi$.

2. Полость около плоскости. Пусть полость, неподвижная при $t=0$, значительно удалена от плоскости, так что $l \ll a$, где a — расстояние от начала координат до его изображения относительно плоскости. Потенциал скоростей отыскиваем альтернирующим методом. Для решения с точностью ξ^5 достаточно двух приближений

$$(2.1) \quad \Phi = \Phi_0^1 + \Phi_0^2 + \Phi_1^1 + \Phi_1^2 + \dots \\ \Phi_0^i = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n l^n}{r_i^{n+1}} P_n(\cos \theta_i), \\ \Phi_1^i = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n' l^n}{r_i^{n+1}} P_n(\cos \theta_i).$$

Здесь i — индекс полости или ее изображения. Полярные оси систем координат направлены навстречу друг другу. На поверхности полости $i, k=1,2$

$$(2.2) \quad \left(\frac{\partial}{\partial r_i} - \frac{1}{r_i^2} \frac{\partial R_i}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta_i} \right) (\Phi_1^i + \Phi_0^k) = 0; \quad i \neq k.$$

Из формул (2.1), (2.2) и (1.5) можно найти

$$(2.3) \quad c_0' = 0; \quad c_1' = -1/2\xi^2 l^2 [l(1 - 3/5d_2) + u\xi]; \\ c_2' = -2/3l^2 \xi^3; \quad c_3' = -l^2 \xi^2 (3/4\xi^2 + 9/10d_2).$$

Здесь и далее опускаются члены порядка $\varepsilon^n \xi^m (m > 0)$, если $n+m > 4$, или порядка ε^n , если $n > 3$. Коэффициенты $c_n' = 0$ при $n \geq 4$. Чтобы $d_1 = 0(\xi^2)$, необходимо выбрать Q в (1.6) следующим образом:

$$(2.4) \quad 3ul' + lu' = -3\xi^2(3l^2 + l'l) = Q.$$

Подставляя выражения (2.1) с коэффициентами (2.3) в (1.3) и учитывая (2.4) и формулы (1.7), справедливые при $\xi=0$, получим

$$(2.5) \quad ll'(1 + \xi - \xi^4) + 2l^2(3/4 + \xi + \xi^4) + 1 = 1/4u^2 l^2 - 1/2ul'\xi^2; \\ 5/3A_1 = (3ld_2 - 4l'd_2)u + \xi^2[3ll'd_2 - 6(2l^2 + ll')d_2 - 19ul'\xi]; \\ A_2 = -9/4u^2 - \xi^2(20\xi l^2 + 5\xi ll' - 9/2ul'); \\ 1/6A_3 = -6/5ul'(2d_2 + \xi^3) - ld_2(u + l'\xi^2) - 18/5d_2\xi^2 l'.$$

Коэффициенты $d_n = 0$ при $n \geq 4$, так как удовлетворяют однородным линейным уравнениям с нулевыми начальными условиями.

Первое уравнение (2.5) и уравнение (2.4) соответствуют уравнениям модели сферы переменного объема [8]. Деформация влияет на захлопывание и перемещение в более высоком приближении, чем (2.5). За счет взаимодействия с плоскостью первоначально неподвижная полость приобретает скорость, направленную к плоскости и возрастающую в процессе захлопывания до значений, превосходящих скорость изменения радиуса [8]. Всегда имеется предельный радиус захлопывания. Решение последних трех уравнений (2.5) можно записать в приближенном виде для малых времен, а также при малых радиусах $l \ll 1$. Из третьего уравнения (2.5) следует, что в начале захлопывания $d_2 > 0$, т. е. полость вытягивается в направлении к плоскости. Последнее уравнение (2.5) дает $d_3 < 0$ в начале захлопывания, т. е. полость приобретает яйцевидную форму. С уменьшением радиуса полости наступает момент, когда $d_3 > 0$ и в области границы, наиболее удаленной от плоскости, кривизна уменьшается, т. е. формируется струя. С некоторого момента амплитуды d_2 и d_3 становятся столь большими, что уравнения (2.5) теряют силу.

3. Полость в безграничной жидкости. Проекционный метод. Обратимся к построению численного метода описания движения полости, не связанному с введением малого параметра. Одним из недостатков известных методов расчета, использующих сферические функции, как, например [6], является чрезвычайно большая громоздкость формул, которая катастрофически возрастает с увеличением числа членов основных разложений. Можно получить намного более простой и эффективный метод,

если не пытаться раскрывать громоздкие произведения сумм, а непосредственно вычислять проекции.

Потенциал скоростей Φ в абсолютной системе, совпадающей в данный момент с движущейся со скоростью u , представляется в виде

$$(3.1) \quad \Phi = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t) \frac{P_n(z)}{r^{n+1}}, \quad z = \cos \theta.$$

Координаты точки поверхности полости задаются уравнением

$$(3.2) \quad R = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(t) P_n(z).$$

Если ввести потенциал скоростей φ в системе, движущейся со скоростью u

$$(3.3) \quad \varphi = \Phi - urz,$$

то кинематические и динамические условия при $r=R$ примут вид

$$(3.4) \quad \frac{\partial R}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{1-z^2}{R^2} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial R}{\partial z};$$

$$(3.5) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 + \frac{1-z^2}{2R^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 = 1 + \frac{u^2}{2}.$$

Подстановка (3.1) и (3.2) в (3.4), (3.5) и проектирование на полиномы Лежандра дают следующую систему уравнений:

$$(3.6) \quad \frac{dR_n}{dt} = \left(n + \frac{1}{2} \right) \int_{-1}^1 \Omega P_n dz; \quad \sum_{k=1}^{\infty} G_{nk} \frac{dF_k}{dt} = \int_{-1}^1 \Gamma P_n dz;$$

$$G_{nk} = \int_{-1}^1 \frac{P_k P_n}{R^k} dz; \quad k, n = 0, 1, \dots$$

$$\Omega = uz + \sum_{n=0}^{\infty} F_n \frac{n+1}{R^{n+2}} P_n + \frac{1-z^2}{R} \left(u - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n}{R^{n+2}} P_n' \right) \sum_{n=0}^{\infty} R_n P_n';$$

$$2\Gamma = 2 + u^2 - \left(uz + \sum_{n=0}^{\infty} F_n \frac{n+1}{R^{n+2}} P_n \right)^2 + (1-z^2) \left(u - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n}{R^{n+2}} P_n' \right)^2.$$

Каждый интеграл в уравнениях (3.6) есть однозначная функция переменных $R_0, R_1, \dots, F_0, F_1, \dots$, поэтому система уравнений (3.2), (3.6) представляет собой бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, линейную относительно производных. Функция $u(t)$, входящая в (3.6) через (3.3), может выбираться произвольно. Необходимо только, чтобы начало координат постоянно находилось внутри полости, достаточно далеко от ее поверхности. Можно принять, в частности, $u = u_0 t^{-3}$ или определить u из условия $R_1 = 0$.

В начальный момент полость имела форму сферы и двигалась со скоростью u_0 :

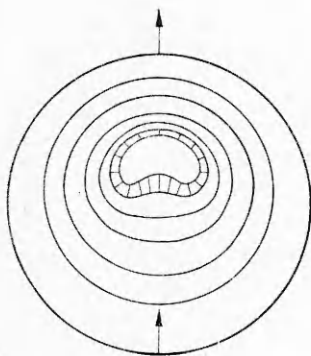
$$(3.7) \quad u = u_0; R_0 = 1, R_1 = 0, \dots; F_0 = 0, F_1 = -1/2, F_2 = 0, \dots; t = 0.$$

Система (3.6) с начальными условиями (3.7) решалась при помощи аппроксимации ее конечной системой порядка m . Предполагалось, что $R_n = 0, F_n = 0$ при $n > m$. Система обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $2m$, полученная из (3.6), на каждом шаге по t приводилась к системе уравнений, разрешенной относительно производных, которая интегрировалась методом Рунге — Кутты. Вычисление интегралов в системе (3.6), включающей полиномы Лежандра и их производные, производилось методом Симпсона, шаг выбирался равным $\sim 1/8$ расстояния между ближайшими нулями старшего полинома $P_m(\cos \theta)$. Для контроля на каждом шаге по времени производился расчет полной энергии системы, которая равна сумме потенциальной энергии полости, пропорциональной ее объему, и кинетической энергии жидкости, равной

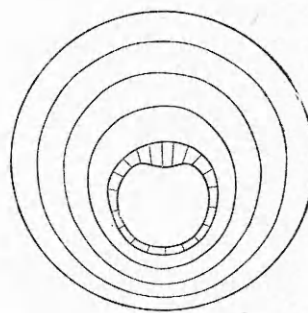
$$T = \pi \int_{-1}^1 \Phi \left[R \left(\frac{\partial R}{\partial t} + uz \right) + u(1-z^2) \frac{\partial R}{\partial z} \right] R dz.$$

Здесь Φ — значения потенциала на поверхности.

Расчеты производились на ЭВМ «МИНСК-22». Результаты вычислений с 16 полиномами Лежандра при $u_0 = 0,1$ представлены на фиг. 1. Форма полости изображена в моменты времени $t = 0; 0,64; 0,76; 0,84; 0,875; 0,895$. Для момента $t = 0,895$ на фиг. 1 изображено также распределение



Фиг. 1



Фиг. 2

нормальной скорости $\partial\Phi/\partial n$ вдоль границы полости. При $t = 0,895$ на поверхности скорость в точке $\theta = \pi$ более чем в три раза превосходит скорость в точке $\theta = 0$. Передняя часть полости ($\theta \sim 0$) в процессе захлопывания мало отличается от сферической. В задней части полости кривизна поверхности проходит при $t \approx 0,87$ через нуль, и образуется широкая струя. При этом деформации являются большими, так как форма полости в области $\theta \sim \pi$ существенно отличается от формы в области $\theta \sim 0$. При сильных «вмятинах» на поверхности полости потенциал скоростей жидкости нельзя уже представлять в виде (3.1). По этой причине погрешность расчетов растет, когда кривизна поверхности в области $\theta \sim \pi$ отрицательна. В приведенном примере погрешность в интеграле энергии достигает 4% при $t = 0,895$, хотя при $t \sim 0,8$ погрешность менее $3 \cdot 10^{-5}$.

Следует отметить, что погрешность в энергии 4% представляет неплохую точность, так как здесь ошибка в координатах границы полости значительно меньше ошибки в скорости границы.

Были проведены также расчеты для случая неподвижного начала координат $u=0$, результаты которых согласуются со случаем $u \neq 0$. Выбор скорости u не влияет на характер решения. Однако в некоторой области уменьшилась погрешность в интеграле энергии. Подбирая достаточно малый шаг интегрирования по времени, удалось сделать ошибку в энергии меньшей 10^{-6} в области $t < 0,865$.

4. Проекционный метод в задаче захлопывания полости около плоскости. Движение полости в жидкости возле плоскости эквивалентно движению в безграничной жидкости двух полостей, расположенных симметрично относительно плоскости. В граничных условиях на поверхности данной полости необходимо учесть вклад потенциала с особенностями в соседней полости, (в дальнейшем соответствующим величинам соседней полости присвоен индекс 1, а для данной полости остаются обозначения п.3). Дополнительное слагаемое в потенциале скоростей, обусловленное присутствием соседней полости, равно

$$(4.1) \quad \Phi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n(t)}{r_1^{n+1}} P_n(z_1).$$

Учитывая это слагаемое в граничных условиях (3.4) и (3.5), можно получить уравнения, аналогичные (3.6), отличающиеся только значениями Ω , Γ , G_{nh}

$$(4.2) \quad \begin{aligned} G_{nh} &= \int_{-1}^1 \left[\frac{P_h(z)}{R^h} + \frac{P_h(z_1)}{r_1^h} \right] P_n(z) dz; \\ \Omega &= -W_1 - \frac{1-z^2}{R} W_2 \frac{\partial R}{\partial z}; \\ \Gamma &= 1 + \frac{1}{2} [u^2 - W_1^2 - (1-z^2) W_2^2] + \frac{2u}{r_1} (1-z_1^2) \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_1} + \\ &+ 2uz_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial r_1}; \\ W_1 &= uz + \sum_{n=0}^{\infty} F_n \frac{n+1}{R^{n+2}} P_n(z) - \frac{R-az}{r_1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r_1} + \frac{1-z^2}{r_1^3} Ra \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_1}; \\ W_2 &= -u + \sum_{n=0}^{\infty} F_n \frac{P_n'(z)}{R^{n+2}} - \frac{a}{r_1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r_1} - \frac{R}{r_1^3} (R-az) \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_1}; \\ r_1^2 &= (a^2 - 2aRz + R^2)^{1/2}; \quad z_1 = (a - Rz)/r_1; \quad da/dt = -2u. \end{aligned}$$

Скорость u начала координат можно определить из условия $R_1(t)=0$, что дает $\int_{-1}^1 \Omega P_1(z) dz = 0$.

Уравнения (3.6) с правыми частями и коэффициентами (4.2) представляют бесконечную систему дифференциальных уравнений относительно $R_0, R_1, \dots, F_0, F_1, \dots$ линейную относительно производных. Способ ее решения описан в п. 3. Результаты расчета формы полости показаны на фиг. 2 для начального расстояния $a_0=3$ и моментов времени

$t=0; 0,62; 0,82; 0,935; 0,99$. Для момента $t=0,99$ на фиг. 2 изображено распределение нормальной скорости вдоль границы.

Видно, что полость в результате захлопывания ускоряется к плоскости. Этот эффект ранее обсуждался на основе модели сферы переменного объема [8]. Скорость в точке поверхности $\theta=\pi$ значительно превосходит скорость в точке $\theta=0$, т. е. образуется струя, направленная к плоскости. Образование струи видно по смятию части поверхности полости, наиболее удаленной от плоскости (см. фиг. 2).

Поступила 22 VII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л. В. О всплывании пузыря.— В кн.: Некоторые проблемы математики и механики. Л., «Наука», 1970.
2. Пухначев Ю. В. Введение в динамику пузыря, находящегося внутри жидкости.— В кн.: Введение в динамику тела с жидкостью в условиях невесомости. М., Изд. ВЦ АН СССР, 1968.
3. Birkhoff G. Stability of spherical bubbles.— Quart. J. Appl. Math., 1956, vol. 13, № 4.
4. Plesset M. S., Mitchell T. P. On the stability of the spherical shape of a vapour cavity in a liquid. Quart. J. Appl. Math., 1956, vol. 13, № 4.
5. Naude C. F., Ellis A. T. On the mechanism of cavitation damage by nonhemispherical cavities collapsing in contact with a solid boundary. Trans. ASME, Ser. D, 1961, vol. 83, p. 648.
6. Shima A. The behavior of a spherical bubble in the vicinity of a solid wall. Trans. ASME, Ser. D., 1968, vol. 90, № 1.
7. Plesset M. S., Chapman R. B. Collapse of an initially spherical vapour cavity in the neighbourhood of a solid boundary. J. Fluid Mech., 1971, vol. 47, pt. 2.
8. Воинов О. В., Петров А. Г. Движение сферы переменного объема в идеальной жидкости около плоской поверхности. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 5.