ПМТФ, № 6, 1972

УДК 551.451.8:517.946

ЗАДАЧА О ПРОГНОЗЕ СОЛЕВОГО РЕЖИМА ОРОШАЕМЫХ ЗЕМЕЛЬ ПРИ НАЛИЧИИ ДРЕНАЖА

Н. И. Гамаюнов, Д. Ф. Шульгин

(Калинин)

Приводится решение уравнений конвективной диффузии для двух плоских слоев методом конечных интегральных преобразований. Получены точные решения задачи в условиях наличия нисходящего или восходящего фильтрационного потока.

Промывка засоленных почв состоит в подаче на поверхность массива воды, которая, фильтруясь, растворяет соли и вытесняет их из покровного слоя в нижние горизонты при глубоком залегании грунтовых вод, или же в дрены и водоприемники при близком залегании и слабом оттоке подземных вод в естественных условиях.

В настоящее время мелиораторы пришли к убеждению о необходимости опреснения не только корнеобитаемого слоя почвы, но и грунтовых вод на достаточно большую глубину, так как рассоление только верхнего слоя почвы при сохранении высокой минерализации близкозалегающих грунтовых вод неустойчиво, и вследствие этого нередко промытые почвы интенсивно засоляются.

Как показано в ряде работ ([1] и др.), зона вертикального солеобмена может достигать 20—30 *м*, а местами 50—100 *м* от поверхности земли.

В данной работе рассматривается динамика солевых растворов в двухслойной мелкоземной покровной толще. Верхний слой лежит выше уровня грунтовых вод (зона неполного насыщения), нижний слой расположен между грунтовыми водами и кровлей песчаного пласта, подстилающего покровные мелкоземы.

Предполагается, что как для верхнего, так и для нижнего полностью насыщенного водой слоя мелкоземов справедливо уравнение конвективной диффузии. Принимается, что фильтрационные и солевые параметры для обоих пластов известны из результатов опытно-полевых исследований. Предполагается также, что дренаж обеспечивает постоянное положение уровня грунтовых вод, а фильтрация и перенос солей считаются происходящими только по вертикали, что подтверждается на практике для ряда подверженных засолению районов республик Средней Азии и Кавказа, имеющих явно выраженное двухслойное строение [2].

Математически задача сводится к решению следующей системы дифференциальных уравнений [2, 3]:

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = D_i \frac{\partial^2 C_i}{\partial x^2} - \frac{\varepsilon}{n_i} \frac{\partial C_i}{\partial x} + \gamma_i (C_* - C_i) \qquad (i = 1, 2) \tag{1}$$

при начальном и граничном условиях

$$C_i(x, 0) = \varphi_i(x) \tag{2}$$

$$\beta_1 C_1(0, t) - \alpha_1 \frac{\partial C_1(0, t)}{\partial x} = \beta_1 C_0 \tag{3}$$

$$C_1(m_1, t) = C_2(m_1, t), \qquad \frac{\partial C_1(m_1, t)}{\partial x} = D_0 \frac{\partial C_2(m_1, t)}{\partial x} \tag{4}$$

$$\beta_2 C_2(m_2, t) + \alpha_2 \frac{\partial C_2(m_2, t)}{\partial x} = \beta_2 C_{00} \tag{5}$$

Здесь и в дальнейшем индексы $i = 1$ и 2 отнесены соответственно к верхнему и нижнему слоям покровной толщи, подстилаемой каптируемым песчаным пластом; $C_i(x, t)$ $\varphi_i(x)$ — концентрации почвенного раствора солей в любой и начальный моменты времени, *г/л*; C_*, C_0 — концентрации предельного насыщения солями данного состава и подаваемой для промывки воды, *г/л*; D_i — коэффициенты фильтрационной диффузии (дисперсии), *м*^{2}/сут.; α_i, β_i — постоянные коэффициенты, значения которых приводятся ниже при рассмотрении частных случаев задачи, представляющих интерес для мелиоративной практики; γ_i — коэффициенты растворения солей, сут.$^{-1}$; m_1, m_2 — соответственно глубина залегания грунтовых вод и общая мощность обоих слоев покровной толщи, *м*; ε — скорость фильтрации, *м*/сут.; n_i — пористости слоев; $C_{00}(t)$ — минерализация подземных вод в хорошо проницаемом подстилающем пласте, известная функция времени, *г/л*; x — координата, *м*; ось x направлена вертикально вниз, начало координат выбрано на поверхности земли; t— время (сутки); $D_0 = n_2D_2/n_1D_1$.

По аналогии с обычным методом интегральных преобразований Кошлякова — Гринберга [4, 5] уравнения (1), (2) умножим соответственно на ядра $K_i(x, \rho)$ и дважды проинтегрируем по частям в соответствующих пределах. В результате вместо исходной системы получим обыкновенную систему уравнений

$$\partial U_i / \partial t + \rho^2 U_i = H_i + F_i \qquad (i = 1, 2) \tag{6}$$

где

$$U_i(t, \rho) = \int\limits_{m_{i-1}}^{m_i} C(x, t) K_i(x, \rho)\, dx, \quad F_1(\rho) = \gamma_1 C_* \int\limits_0^{m_1} K_1(x, \rho)\, dx, \qquad F_2(\rho) = 0$$

$$H_i(t, \rho) = \left[\left(D_i \frac{\partial C_i}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{n_i}\right) K_i - C_i D_i \frac{dK_i}{dx}\right]\Bigg|_{m_{i-1}}^{m_i} \qquad (m_0 = 0)$$

Предполагаем, что в нижнем слое (ниже уровня грунтовых вод) соли в твердой фазе отсутствуют ($\gamma_2 = 0$).

Для нахождения ядер преобразования получаем систему уравнений

$$D_i \frac{d^2K_i}{dx^2} + \frac{\varepsilon}{n_i} \frac{dK_i}{dx} + (\rho^2 - \delta_i) K_i = 0 \qquad (i = 1, 2) \tag{7}$$

$$(\delta_1 = \gamma_1, \qquad \delta_2 = \gamma_2 = 0)$$

Функции $K_i(x, \rho)$ полагаем равными $M^{-1}(\rho) N_i(x, \rho) \sigma_i(x)$, где $M^{-1}(\rho)$ — нормирующий делитель, а $N_i(x, \rho)$ и $\sigma_i(x)$ — неизвестные функции, определяемые соответственно из уравнений

$$D_i \frac{d\sigma_i}{dx} + \frac{\varepsilon}{n_i} \sigma_i = 0 \tag{8}$$

$$D_i \frac{d}{dx}\left(\sigma_i \frac{dN_i}{dx}\right) + (\rho^2 - \delta_i) N_i = 0$$

Уравнения (8) получаются после подстановки значений $K_i(x, \rho)$ в (7). Из последних двух уравнений с учетом равенства $\sigma_1(m_1) = \sigma_2(m_1)$ находятся функции

$$\sigma_1(x) = \exp\left(-\frac{x\varepsilon}{n_1 D_1}\right), \qquad \sigma_2(x) = \exp\left[-\frac{(x - m_1)\varepsilon}{n_2 D_2} - \frac{m_1 \varepsilon}{n_1 D_1}\right] \tag{9}$$

Определение $N_1(x, \rho)$ и $N_2(x, \rho)$ сводится к решению задачи Штурма — Лиувилля при однородных граничных условиях.

Подставляя (9) в (8), получим уравнения

$$D_i \frac{d^2N_i}{dx^2} - \frac{\varepsilon}{n_i}\frac{dN_i}{dx} + (\rho^2 - \delta_i) N_i = 0 \qquad (i = 1, 2) \tag{10}$$

которые решаются при граничных условиях (3) — (5) с нулевыми правыми частями.

Общее решение системы (10) имеет вид

$$N_i(x, \rho) = \exp(\tau_i x)\,[A_i \sin a_i\tau + B_i \cos a_i\tau] \tag{11}$$

Из однородных граничных условий (3) — (5) (при $C_0 = C_{00} = 0$) получаем систему четырех уравнений для определения коэффициентов A_i, B_i. Чтобы эта однородная система уравнений имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель этой системы был равен нулю $\Delta(\rho) = 0$.

Запишем выражение для этого определителя

$$\Delta(\rho) = \operatorname{tg}[a_2(m_2 - m_1)] - \frac{\theta_4 - \theta_3 \operatorname{tg} a_1m_1}{\theta_3 + \theta_1 \operatorname{tg} a_1m_1} = 0 \tag{12}$$

и для коэффициентов A_i, B_i

$$A_1 = -a_{02}(b_{01}b_{12} - b_{02}b_{11}), \qquad B_1 = -A_1a_{01}/a_{02} \tag{13}$$

$$A_2 = -b_{02}(a_{01}a_{12} - a_{02}a_{11}), \qquad B_2 = -A_2b_{01}/b_{02}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$a_{01} = \alpha_1 a_1, \qquad b_{01} = \alpha_1(\tau_2 \sin a_2m_2 + a_2 \cos a_2m_2) + \beta_2 \sin a_2m_2$$

$$a_{02} = \alpha_1\tau_1 - \beta_1, \qquad b_{02} = \alpha_2(\tau_2 \cos a_2m_2 - a_2 \sin a_2m_2) + \beta_2 \cos a_2m_2$$

$$a_{11} = \exp(\tau_1m_1)\sin a_1m_1, \qquad b_{11} = \exp(\tau_2m_1)\sin a_2m_1$$

$$a_{12} = \exp(\tau_1m_1)\cos a_1m_1 \qquad b_{12} = \exp(\tau_2m_1)\cos a_2m_1$$

$$a_i^2 = \frac{1}{D_0}(\rho^2 - \delta_i) - \tau_i^2, \qquad \tau_i = \frac{\varepsilon}{2n_iD_i} \qquad (i = 1, 2)$$

$$\theta_1 = p_1(\beta_1 - \alpha_1\tau_1) + p_2(\beta_2 - \alpha_2\tau_2), \qquad \theta_2 = a_1(\alpha_1p_1 - \beta_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2\tau_2)$$

$$\theta_3 = a_2(\alpha_2p_2 + \beta_1\beta_2D_0 - \alpha_1\beta_2\tau_1D_0), \qquad \theta_4 = a_1a_2(\alpha_1\beta_2D_0 + \alpha_2\beta_1)$$

$$p_1 = \alpha_2D_0(\tau_2^2 + a_2^2) + \beta_2\tau_2D_0, \qquad p_2 = \tau_1\beta_1 - \alpha_1(\tau_1^2 + a_1^2)$$

Таким образом, функции $N_i(x, \rho)$ (11) являются решением задачи Штурма — Лиувилля, собственные значения которой находятся как корни трансцендентного уравнения (12).

Рассмотрим теперь решение системы (6) для изображений. Умножим эти уравнения соответственно на n_i и сложим, будем иметь уравнение

$$\partial W/\partial t + \rho^2 W = H(t, \rho) + n_1F_1(\rho) \tag{14}$$

где введены обозначения

$$W(t, \rho) = n_1U_1(t, \rho) + n_2U_2(t, \rho), \; H(t, \rho) = n_1H_1 + n_2H_2$$

Используя граничные условия для искомых функций C_i и N_i и равенство $\sigma_1(m_1) = \sigma_2(m_1)$, можно в выражении для $H(t, \rho)$ освободиться от граничных условий на контакте слоев. В результате получим

$$H(t, \rho) = \frac{1}{M(\rho)}\left[\frac{1}{\alpha_1} n_1D_1\beta_1C_0N_1(0, \rho) + \frac{1}{\alpha_2} n_2D_2\beta_2\sigma_2(m_2)\,C_{00}N_2(m_2, \rho)\right] \tag{15}$$

Начальные условия (3) примут вид

$$W(0, \rho) = n_1 U_1(0, \rho) + n_2 U_2(0, \rho) \tag{16}$$

где $U_i(0, \rho)$ — значения изображений функций $\varphi_i(x)$.

Решение уравнения (14) при условии (16) легко найдется, в частности, при постоянных C_0 и C_{00} оно имеет вид

$$W(t, \rho) = \frac{1}{\rho^2}[H(\rho) + n_1 F_1(\rho)] + \left[W(0, \rho) - \frac{H(\rho) + n_1 F_1(\rho)}{\rho^2}\right] \exp(-\rho^2 t) \tag{17}$$

Формулы обращения для функций $C_i(x, t)$ ищем в виде рядов по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля [4, 5]

$$C_i(x, t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} S_\nu(t, \rho_\nu) N_i(x, \rho_\nu) \qquad (i = 1, 2) \tag{18}$$

где ρ_ν — собственные значения задачи.

Умножим выражения (18) соответственно на $n_i K_i(x, \rho_j)$, проинтегрируем в соответствующих пределах и сложим. В результате получим

$$W(t, \rho_j) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{S_\nu(t, \rho_\nu)}{M(\rho_j)} \left[n_1 \int_0^{m_1} \sigma_1(x) N_1(x, \rho_\nu) N_1(x, \rho_j)\, dx + \right.$$

$$\left. + n_2 \int_{m_1}^{m_2} \sigma_2(x) N_2(x, \rho_\nu) N_2(x, \rho_j)\, dx\right]$$

Легко показать, что выражение в квадратных скобках в силу ортонормированности функций N_1 и N_2 будет равно нулю при $\rho_\nu \neq \rho_j$ $(\nu \neq j)$, а при $\rho_\nu = \rho_j$ $(\nu = j)$ — значению M, если его положить равным

$$M(\rho_\nu) = n_1 \int_0^{m_1} \sigma_1(x) N_1^2(x, \rho_\nu)\, dx + n_2 \int_{m_1}^{m_2} \sigma_2(x) N_2^2(x, \rho_\nu)\, dx \tag{19}$$

Отсюда следует, что $S_\nu(t, \rho_\nu) \equiv W(t, \rho_\nu)$ и формулы обращения имеют вид (18), в которых S_ν должно быть заменено на $W(t, \rho_\nu)$.

Таким образом, ряды (18) вместе с (11) — (13), (17) и (19) дают решение рассматриваемой задачи.

Интерес представляют следующие частные случаи общей задачи.

1. Случай $\alpha_2 = 0$ (или $C_2(m_2, t) = C_{00}$) и $\alpha_1 = n_1 D_1$, $\beta_1 = \varepsilon$. Из (12) имеем

$$\frac{\tau_1 a_2}{\tau_2 a_1} \operatorname{ctg}[a_2(m_2 - m_1)] = \frac{a_1 \operatorname{tg} a_1 m_1 - \tau_1}{\tau_1 \operatorname{tg} a_1 m_1 + a_1} \tag{20}$$

Для функции $H(t, \rho_\nu)$ получим выражение

$$H(t, \rho_\nu) = \frac{1}{M(\rho_\nu)}\left[\varepsilon C_0 N_1(0, \rho_\nu) - n_2 D_2 C_{00} \sigma_2(m_2) \frac{\partial N_2(m_2, \rho_\nu)}{\partial x}\right] \tag{21}$$

2. Случай $\beta_2 = 0$ (или $\partial C_2(m_2, t) / \partial x = 0$), $\alpha_1 = n_1 D_1$.

Тогда характеристическое уравнение и функции $H(t, \rho_\nu)$ примут вид

$$\operatorname{tg}[a_2(m_2 - m_1)] = \frac{2\tau_2 a_1 a_2 + (\tau_1 \tau_2 a_2 - a_1^2 a_2 D_0^{-1}) \operatorname{tg} a_1 m_1}{a_1 a_2^2 - a_1 \tau_2^2 + (a_2^2 \tau_1 + a_1^2 \tau_2 D_0^{-1}) \operatorname{tg} a_1 m_1} \tag{22}$$

$$H(t, \rho_\nu) = \varepsilon C_0 N_1(0, \rho_\nu) M^{-1}(\rho_\nu)$$

3. Случай засоления зоны аэрации покровного слоя при испарении подземных вод. В этом случае в решениях для частных случаев 1 и 2 нужно положить $C_0 = 0$ и знак у скорости ε изменить на противоположный.

При рассмотрении однослойной покровной толщи мелкоземов во всех предыдущих выражениях нужно положить

$$m_1 = m_2 = m,\ \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma(x),\ \tau_1 = \tau_2 = \tau,\ a_1 = a_2 = a,\ D_0 = 1$$

При этом решении упростятся и задача сведется к применению конечного интегрального преобразования Кошлякова — Гринберга [4].

Вычисления по полученным формулам могут быть выполнены с помощью малых электронно-вычислительных машин (ЭВМ).

Для иллюстрации проведен расчет перераспределения солей в почвогрунте при промывке для случая первого ($\alpha_2 = 0$) при следующих данных:

$$D_1 = 0.002\ м^2/сут.,\ D_2 = 0.02\ м^2/сут.,\ n_1 = 0.2,\ n_2 = 0.5$$
$$\varepsilon = 0.002\ м/сут.,\ m_1 = 2\ м,\ m_2 = 10\ м,$$
$$C_1(x, 0) = C_2(x, 0) = 20\ г/л,\quad \gamma = 0$$

Расчет проводился на ЭВМ «Наири» в режиме автоматического программирования. В суммах формул (18) бралось разное число членов ряда $\nu = 1, 3, 5, 7, 10, 15$, и находились искомые функции. Корни ρ_ν определялись из уравнения (20).

В таблице приведены значения концентраций солей $C_1(x, t)$ в верхнем слое в сечениях $x = 0$ и 1 *м* для моментов времени $t = 60$ сут. (в числителе дроби) и $t = 200$ сут. (в знаменателе).

x, *м*	ν				
	1	3	5	7	10
0	$\frac{0.950}{0.508}$	$\frac{2.929}{0.556}$	$\frac{3.611}{0.777}$	$\frac{3.818}{0.908}$	$\frac{3.932}{1.014}$
1	$\frac{24.516}{4.565}$	$\frac{31.614}{5.569}$	$\frac{22.199}{5.714}$	$\frac{21.053}{5.635}$	$\frac{20.213}{5.782}$

Анализ решения рассмотренного примера показывает, что для получения достаточной для практики точности в суммах (18) достаточно сохранить 10 членов. С увеличением чисел Фурье F_0 ($F_0 = D_1 t / m_1^2$) можно в суммах ограничиться удержанием меньшего числа членов. Так, при $F_0 \geqslant 0.1$ можно учитывать первые 3—5 членов сумм.

Предлагаемый метод интегрирования дифференциальных уравнений позволяет расширить решение круга задач массопереноса в пористых средах, в частности рассмотреть динамику солей в многослойных почвогрунтах. В последнем случае полезно пользоваться матричной записью операций.

Поступила 17 VI 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Рабочев И. С. Регулирование солевого режима почв и грунтов в условиях орошаемого земледелия. В сб. «Проблемы преобразования природы Средней Азии», М., «Наука», 1967.
2. Шульгин Д. Ф., Машарипов Р. О прогнозировании на ЭВМ солевого режима засоленных почвогрунтов при наличии дренажа. Гидротехника и мелиорация, 1969, № 5.
3. Веригин Н. Н. Некоторые вопросы химической гидродинамики, представляющие интерес для мелиорации и гидротехники. Изв. АН СССР, ОТН, 1953, № 10.
4. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. М., Физматгиз, 1962.
5. Гамаюнов Н. И. Термодинамика неравновесных процессов и решения систем уравнений переноса. В сб. «Исследования в области поверхностных сил», М., «Наука», 1967.