УДК 539.375

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ТОНКИХ ПЛАСТИЧЕСКИХ ЗОН В ОКРЕСТНОСТИ ТРЕЩИНЫ НОРМАЛЬНОГО ОТРЫВА

В. В. Глаголев, А. А. Маркин

Тульский государственный университет, 300600 Тула
E-mails: vadim@tsu.tula.ru, markin@uic.tula.ru

На основе дискретной модели деформирования в предположении, что среда является идеальной упругопластической, поставлена и решена задача о развитии пластической области в окрестности физического разреза в случаях плоского деформированного и напряженного состояний. При изучении плоского напряженного состояния используются условие текучести Треска и условие полной пластичности. Проведено сравнение зависимостей длины пластической области от величины внешней нагрузки с аналогичной зависимостью, полученной на основе модели Леонова — Панасюка — Дагдейла. Установлено, что в отличие от модели Леонова — Панасюка — Дагдейла при учете упругой сжимаемости и напряжений сжатия-растяжения вдоль направления разреза распределения напряжений и длин пластических зон при плоском деформированном и напряженном состояниях существенно различаются.

Ключевые слова: характерный размер, граничное интегральное уравнение, линейная упругость, идеально упругопластическая модель.

Введение. При изучении трещины нормального отрыва в виде математического разреза в рамках модели Леонова — Панасюка — Дагдейла постулируется механизм пластического течения, при котором на границах пластической зоны действуют растягивающие напряжения, равные пределу текучести [1, 2]. При вычислении длины пластической зоны данный постулат при различных видах плоского состояния приводит практически к одинаковым результатам. Однако экспериментальные данные свидетельствуют о существенном различии длин этих зон. Поэтому в случае плоской деформации вводится поправка (предел текучести формально увеличивается в $\sqrt{3}$ раз) [3], в результате чего размер зоны пластичности становится в три раза меньше, чем при плоском напряженном состоянии.

Рассматривается полудискретная модель упругопластического деформирования плоскости с полубесконечным прямолинейным разрезом шириной δ_0 [4]. Данный масштабный уровень является минимально допустимым уровнем, при котором справедливы гипотезы механики сплошной среды [5, 6]. Будем полагать, что зона пластичности представляет собой прямоугольник высотой δ_0 и длиной l_p, которая подлежит определению. Целью данной работы является определение зависимости длины l_p от вида напряженно-деформированного состояния и величины внешней нагрузки. Полученные результаты сравниваются с решением в рамках модели Леонова — Панасюка — Дагдейла.

1. Постановка и решение задачи упругопластического деформирования слоя при плоской деформации. Рассмотрим нагружение плоскости, ослабленной физическим разрезом шириной δ_0, симметричной внешней нагрузкой (рис. 1). Считаем, что

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 07-01-96402) и в рамках аналитической ведомственной целевой программы “Развитие научного потенциала высшей школы” (код проекта 2.1.1/941).

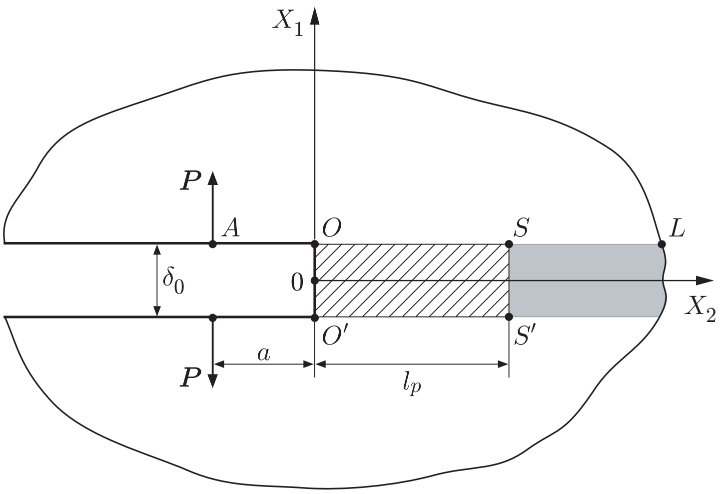

Рис. 1. Схема нагружения

материал, лежащий на продолжении физического разреза в плоскости, образует слой взаимодействия с однородным распределением напряженно-деформированного состояния по толщине [5, 6]. Однородность напряженно-деформированного состояния является следствием того, что компоненты тензора напряжений в слое рассматриваются как средние значения по толщине:

$$\sigma_{ij}(x_2) = \frac{1}{\delta_0} \int\limits_{-\delta_0/2}^{\delta_0/2} \sigma_{ij}(x_1, x_2)\, dx_1 \qquad (i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3).$$

Таким образом, напряженное состояние слоя определяется тензором "усредненных" напряжений. В данном тензоре касательные напряжения полагаются пренебрежимо малыми по сравнению с диагональными компонентами для рассматриваемого вида нагружения. Будем считать, что среднее напряжение $\sigma_{22}(x_2)$ обусловлено касательной нагрузкой на границе слоя $\sigma_{21}(\pm\delta_0/2, x_2)$. Далее напряжения $\sigma_{11}(x_2)$, $\sigma_{22}(x_2)$, $\sigma_{33}(x_2)$ рассматриваются как средние напряжения в слое, которые являются главными. Кроме того, учитывается напряжение $\sigma_{21}(x_2) = \sigma_{21}(\delta_0/2, x_2)$. Предполагается, что связь между напряжениями и деформациями вне слоя взаимодействия описывается в рамках линейной теории упругости.

В силу симметрии задачи рассмотрим только верхнюю полуплоскость $(x_1 \geqslant \delta_0/2)$, а действие слоя на нее заменим нагрузкой

$$\boldsymbol{q}(x) = -(\hat{\sigma}_{11}\boldsymbol{e}_1 + \hat{\sigma}_{21}\boldsymbol{e}_2).$$

Здесь $x \equiv x_2/\delta_0$ — безразмерная координата; $\hat{\sigma}_{ij} = \beta\sigma_{ij}$ $(i = 1, 2,\ j = 1, 2)$ — безразмерные напряжения; $\beta = 2(1-\nu^2)/(\pi E)$ — параметр материала в случае плоской деформации; E — модуль упругости; ν — коэффициент Пуассона.

Соотношения Фламана [7] связывают внешние нагрузки $\hat{\sigma}_{11}$ и $\hat{\sigma}_{12}$ с перемещениями границы полуплоскости:

$$\hat{u}_1(x) = -\hat{P}\ln\Bigl(\frac{x+a}{l+a}\Bigr) + \int\limits_0^l \hat{\sigma}_{11}(\xi)\, \ln\frac{|x-\xi|}{l-\xi}\, d\xi; \tag{1}$$

$$\hat{u}_2(x) = \int\limits_0^l \hat{\sigma}_{12}(\xi)\, \ln\frac{|x-\xi|}{l-\xi}\, d\xi. \tag{2}$$

Здесь $\hat{u}_i = u_i/\delta_0$ $(i = 1, 2)$ — безразмерные перемещения; $\hat{P} = P\beta/\delta_0$ — безразмерная сила, отнесенная к единице толщины; l — расстояние от начала координат до удаленной точки L с нулевым перемещением.

В силу однородности напряженно-деформированного состояния по толщине слоя из условия равновесия следует

$$\frac{\partial \hat{\sigma}_{22}}{\partial x} = -2\hat{\sigma}_{21}. \tag{3}$$

Перемещения границ слоя определяются из условий

$$\hat{u}_1(x) = \varepsilon_{11}(x)/2; \tag{4}$$

$$\hat{u}_2(x) = \int\limits_l^x \varepsilon_{22}(x)\,dx. \tag{5}$$

В состоянии плоской деформации до достижения предела текучести напряжения связаны с деформациями законом Гука

$$\varepsilon_{11} = A\hat{\sigma}_{11} - B\hat{\sigma}_{22}; \tag{6}$$

$$\varepsilon_{22} = A\hat{\sigma}_{22} - B\hat{\sigma}_{11}, \tag{7}$$

где $A = \pi/2$, $B = \nu\pi/[2(1-\nu)]$ — безразмерные постоянные.

Продифференцируем по x выражение (2):

$$\varepsilon_{22} = \frac{d\hat{u}_2}{dx} = \int\limits_0^l \hat{\sigma}_{12}(\xi)\,\frac{1}{x-\xi}\,d\xi. \tag{8}$$

С учетом формулы (4) выражение (1) запишем в следующем виде:

$$\varepsilon_{11} = -2\hat{P}\ln\Big(\frac{x+a}{l+a}\Big) + 2\int\limits_0^l \hat{\sigma}_{11}(\xi)\ln\frac{|x-\xi|}{l-\xi}\,d\xi. \tag{9}$$

С использованием формул (8), (9) найдем изменение объема вдоль слоя за счет движения “стенок” ограничивающего его упругого пространства:

$$\int\limits_0^l \hat{\sigma}_{12}(\xi)\,\frac{1}{x-\xi}\,d\xi + 2\int\limits_0^l \hat{\sigma}_{11}(\xi)\,\ln\frac{|x-\xi|}{l-\xi}\,d\xi - 2\hat{P}\ln\Big(\frac{x+a}{l+a}\Big) + \varepsilon_{33}(x) =$$
$$= \varepsilon_{11}(x) + \varepsilon_{22}(x) + \varepsilon_{33}(x) = \theta(x). \tag{10}$$

Отметим, что уравнение (10) является универсальным и остается в силе как при упругом, так и при упругопластическом поведении слоя, в силу того что изменение объема полагается упругим.

Используя закон Гука (6), (7), а также условие $\varepsilon_{33} = 0$, равенство (10) представим в виде

$$\int\limits_0^l \hat{\sigma}_{12}(\xi)\,\frac{1}{x-\xi}\,d\xi + 2\int\limits_0^l \hat{\sigma}_{11}(\xi)\,\ln\frac{|x-\xi|}{l-\xi}\,d\xi - 2\hat{P}\ln\Big(\frac{x+a}{l+a}\Big) = (A-B)(\hat{\sigma}_{11} + \hat{\sigma}_{22}), \tag{11}$$

где вид плоского состояния определяют постоянные A и B.

К уравнению (11) добавляется условие равенства деформаций ε_{22} вдоль слоя, вычисляемых из выражения (8) и непосредственно из закона Гука (7). В результате система уравнений для упругой области принимает вид

$$\begin{gathered}
\int\limits_0^l \hat{\sigma}_{12}(\xi)\,\frac{1}{x-\xi}\,d\xi + 2\int\limits_0^l \hat{\sigma}_{11}(\xi)\,\ln\frac{|x-\xi|}{l-\xi}\,d\xi - 2\hat{P}\ln\Big(\frac{x+a}{l+a}\Big) = (A-B)(\hat{\sigma}_{11}+\hat{\sigma}_{22}),\\
A\hat{\sigma}_{22} - B\hat{\sigma}_{11} = \int\limits_0^l \hat{\sigma}_{12}(\xi)\,\frac{1}{x-\xi}\,d\xi, \qquad \frac{\partial\hat{\sigma}_{22}}{\partial x} = -2\hat{\sigma}_{12}.
\end{gathered} \tag{12}$$

Основными неизвестными системы (12) являются компоненты тензора напряжения. Так как полагается, что торцевая плоскость начального разреза не нагружена, то имеем

$$\hat{\sigma}_{22}\big|_{x=0} = 0. \tag{13}$$

Следуя [8], при решении задачи полагаем, что разрушение твердого тела представляет собой дискретный процесс, поэтому в пределах элемента слоя взаимодействия длиной δ_0 или единичной безразмерной длины напряженное состояние полагается однородным.

Для построения решения задачи в рамках дискретной модели границу полуплоскости OL разобьем на n единичных элементов. Каждый элемент границы k с координатами ξ_{k-1}, ξ_k, где $k=\overline{1,n}$, характеризуется постоянным (средним по элементу) значением напряжений σ_{11}^k, σ_{22}^k, σ_{12}^k, определяемым следующим образом:

$$\sigma_{ij}^k(x_k) = \int\limits_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} \hat{\sigma}_{ij}(\xi)\,d\xi.$$

Здесь $x_k = (\xi_k+\xi_{k-1})/2$. Интегралы в уравнениях системы (12) можно представить в виде соответствующих сумм. Для дискретизации уравнения равновесия (3) проинтегрируем его по k-му элементу. В результате получим $\sigma_{22}^k - \sigma_{22}^{k-1} = -2\sigma_{21}^k$. Следует отметить, что данный подход близок к методу граничных элементов [9] с постоянной аппроксимацией, но отличается от него тем, что разбиение на элементы меньшего размера не имеет смысла. Как указано выше, выбранный размер обусловлен тем, что задача решается в предположении сплошности среды. Таким образом, система интегральных и дифференциальных уравнений (12), дополненная граничным условием (13), в дискретном представлении принимает вид

$$\begin{gathered}
\sum_{i=1}^n \sigma_{12}^i(x_i)\int\limits_{\xi_{i-1}}^{\xi_i}\frac{1}{x_i-\xi}\,d\xi + 2\sum_{i=1}^n \sigma_{11}^i(x_i)\int\limits_{\xi_{i-1}}^{\xi_i}\ln\frac{|x_i-\xi|}{l-\xi}\,d\xi - 2P\ln\Big(\frac{x_k+a}{n+a}\Big) = \\
= (A-B)(\sigma_{11}^k(x_k)+\sigma_{22}^k(x_k)),\\
A\sigma_{22}^k(x_k) - B\sigma_{11}^k(x_k) = \sum_{i=1}^n \sigma_{12}^i(x_i)\int\limits_{\xi_{i-1}}^{\xi_i}\frac{1}{x_i-\xi}\,d\xi,\\
\sigma_{22}^k - \sigma_{22}^{k-1} = -2\sigma_{21}^k, \quad k=1,\ldots,n, \qquad \sigma_{22}^0 = 0.
\end{gathered} \tag{14}$$

Отметим, что в общем случае линейная система (14) содержит бесконечное количество уравнений ($n\to\infty$). Однако, как показывают расчеты, при анализе результатов можно

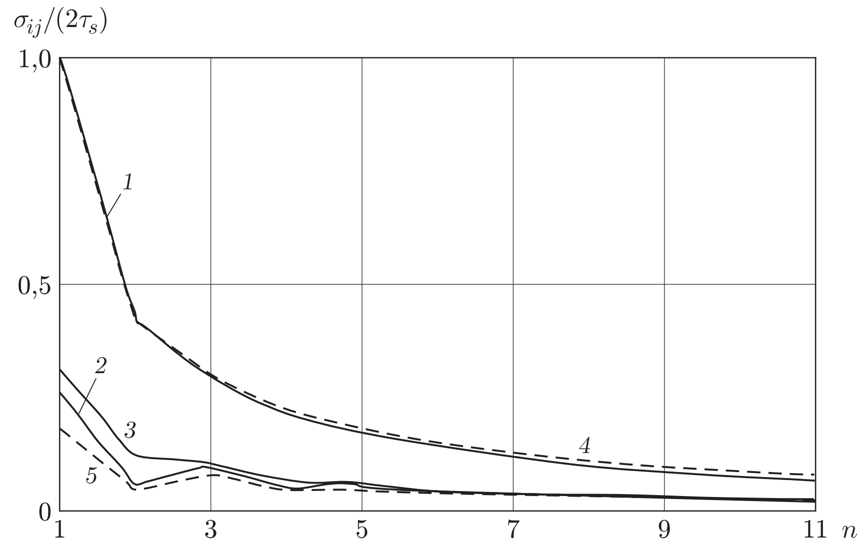

Рис. 2. Напряжения в слое при упругом деформировании:
1–3 — плоское деформированное состояние (*1* — σ_{11}; *2* — σ_{22}; *3* — σ_{33}); *4, 5* — плоское напряженное состояние: $\sigma_{33} \equiv 0$ (*4* — σ_{11}; *5* — σ_{22})

ограничиться конечным числом уравнений. Численное решение системы имеет достаточно хорошую сходимость: при $n = 1000$ результат расчета отличается от результата расчета при $n = 5000$ менее чем на 1 %. Все дальнейшие расчеты выполнены при $n = 5000$.

На рис. 2 кривые *1, 2* и *3* соответствуют напряжениям σ_{11}, σ_{22} и σ_{33} в случае плоской деформации при следующих параметрах задачи: $P = 1$, $a = 5$, $\nu = 0{,}25$. Отметим, что при $\nu = 0$ $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$, для остальных допустимых значений коэффициента Пуассона в случае плоской деформации $\sigma_{22} < \sigma_{33}$.

Считаем, что при достижении определенного критерия материал слоя переходит в пластическое состояние, которое будем описывать в рамках идеально упругопластической модели [10]. Критерием перехода из упругого состояния в пластическое полагаем достижение критического значения максимального касательного напряжения:

$$|\sigma_{ii} - \sigma_{jj}| = 2\tau_s. \tag{15}$$

Здесь τ_s — предел текучести; $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$.

В условиях плоского деформирования в зоне предразрушения из решения упругой задачи следует $\sigma_{11} > \sigma_{33} \geqslant \sigma_{22}$ (см. рис. 2). Таким образом, для данного вида нагружения критерий текучести Треска (15) определяется выражением

$$\hat{\sigma}_{11} - \hat{\sigma}_{22} = 2\hat{\tau}_s, \tag{16}$$

где $\hat{\tau}_s = \beta\tau_s$ — безразмерный предел текучести.

Полагаем, что деформации малы и на стадии упругопластического деформирования справедливо следующее разложение:

$$\varepsilon_{ii} = \varepsilon_{ii}^e + \varepsilon_{ii}^p, \qquad i = 1, 2 \tag{17}$$

(ε_{ii}^e, ε_{ii}^p — упругая и пластическая составляющие полной деформации соответственно). Считаем, что материал пластически несжимаем:

$$\varepsilon_{11}^p + \varepsilon_{22}^p + \varepsilon_{33}^p = 0. \tag{18}$$

Полагаем, что в состоянии плоской деформации упругая и пластическая составляющие поперечной деформации равны нулю:

$$\varepsilon_{33}^e = 0, \qquad \varepsilon_{33}^p = 0. \tag{19}$$

Используя закон Гука (6), (7), с учетом (17)–(19) изменение объема представим в виде
$$\theta(x) = (A - B)(\hat\sigma_{11} + \hat\sigma_{22}). \tag{20}$$

Из выражений (10), (18)–(20), условия равновесия элемента слоя (3) и условия текучести Треска (16) получаем следующую замкнутую систему уравнений, описывающую деформирование пластической области слоя длиной l_p в состоянии плоской деформации:
$$\begin{gathered}\int\limits_0^l \hat\sigma_{12}(\xi)\,\frac{1}{x-\xi}\,d\xi + 2\int\limits_0^l \hat\sigma_{11}(\xi)\,\ln\frac{|x-\xi|}{l-\xi}\,d\xi - 2\hat P\ln\Big(\frac{x+a}{l+a}\Big) = (A-B)(\hat\sigma_{11}+\hat\sigma_{22}),\\ \frac{\partial\hat\sigma_{22}}{\partial x} = -2\hat\sigma_{21}, \qquad \hat\sigma_{11}-\hat\sigma_{22} = 2\hat\tau_s.\end{gathered} \tag{21}$$
Здесь $x \leqslant l_p$.

Отметим, что при сопряжении упругой и пластической областей на границах OS и $O'S'$ (см. рис. 1) используются условие равенства векторов напряжений и условие равенства нормальных перемещений.

В упругой области, где $x > l_p$ и $\hat\sigma_{11} - \hat\sigma_{22} < 2\hat\tau_s$, напряженно-деформированное состояние описывается системой (12). Основными неизвестными систем (21) и (12) (с учетом граничного условия (13)) являются компоненты тензора напряжения, а также длина пластической области.

На основе системы уравнений (21), (12), (13) построим дискретную модель, описывающую упругопластическое деформирование слоя в состоянии плоской деформации. Эта модель состоит из следующих трех подсистем уравнений:

1) уравнения, описывающие поведение материала в пластической области (дискретный аналог системы (21)) на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l_p$:
$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^n \sigma_{12}^i(x_i)\int\limits_{\xi_{i-1}}^{\xi_i}\frac{1}{x_i-\xi}\,d\xi + 2\sum_{i=1}^n\sigma_{11}^i(x_i)\int\limits_{\xi_{i-1}}^{\xi_i}\ln\frac{|x_i-\xi|}{n-\xi}\,d\xi - 2P_{l+1}\ln\Big(\frac{x+a}{n+a}\Big) = \\ = \frac{\pi(\hat\tau_s + \hat\sigma_{22}^k)(1-2\nu)}{1-\nu},\end{gathered} \tag{22}$$
$$\sigma_{22}^k - \sigma_{22}^{k-1} = -2\sigma_{21}^k, \quad \sigma_{11}^k - \sigma_{22}^k = 2\hat\tau_s, \quad k = 1,\dots,l, \qquad \sigma_{22}^0 = 0$$
(l — число элементов, находящихся в пластическом состоянии);

2) уравнения, описывающие переход $(l+1)$-го элемента из упругого состояния в пластическое (дискретный аналог системы (12) при условии, что в этом элементе напряжение достигает предела текучести: $\hat\sigma_{11} - \hat\sigma_{22} = 2\hat\tau_s$):
$$\sigma_{11}^k - \sigma_{22}^k = 2\hat\tau_s,$$
$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^n \sigma_{12}^i(x_i)\int\limits_{\xi_{i-1}}^{\xi_i}\frac{1}{x_i-\xi}\,d\xi + 2\sum_{i=1}^n\sigma_{11}^i(x_i)\int\limits_{\xi_{i-1}}^{\xi_i}\ln\frac{|x_i-\xi|}{l-\xi}\,d\xi - 2P_{l+1}\ln\Big(\frac{x+a}{n+a}\Big) = \\ = \frac{\pi(\sigma_{11}^k(x_k)+\sigma_{22}^k(x_k))(1-2\nu)}{2(1-\nu)},\end{gathered} \tag{23}$$
$$A\sigma_{22}^k(x_k) - B\sigma_{11}^k(x_k) = \sum_{i=1}^n\sigma_{12}^i(x_i)\int\limits_{\xi_{i-1}}^{\xi_i}\frac{1}{x_i-\xi}\,d\xi,$$
$$\sigma_{22}^k - \sigma_{22}^{k-1} = -2\sigma_{21}^k, \qquad k = l+1;$$

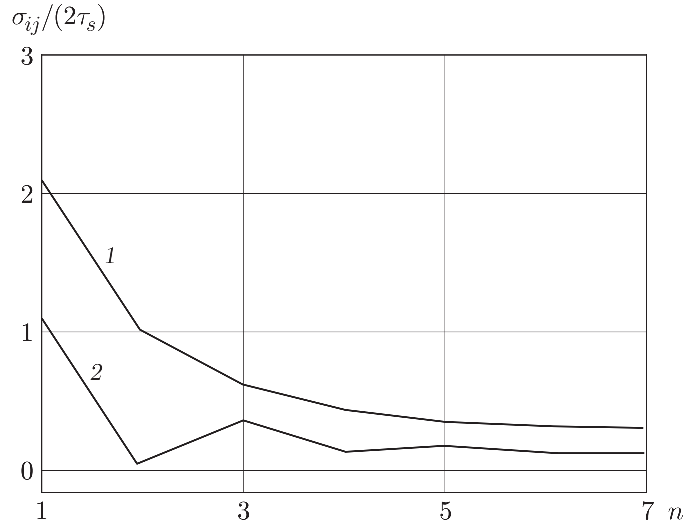

Рис. 3. Напряжения в слое при упругопластическом деформировании в состоянии плоской деформации ($2\tau_s/E = 3 \cdot 10^{-3}$):
1 — σ_{11}; *2* — σ_{22}

3) уравнения, описывающие поведение материала в упругой области (дискретный аналог системы (12)):

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_{12}^i(x_i) \int\limits_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \frac{1}{x_i - \xi}\, d\xi + 2 \sum_{i=1}^{n} \sigma_{11}^i(x_i) \int\limits_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \ln \frac{|x_i - \xi|}{l - \xi}\, d\xi - 2P_{l+1} \ln\Big(\frac{x + a}{n + a}\Big) = \\ = \frac{\pi(\sigma_{11}^k(x_k) + \sigma_{22}^k(x_k))(1 - 2\nu)}{2(1 - \nu)}, \qquad (24)$$

$$A\sigma_{22}^k(x_k) - B\sigma_{11}^k(x_k) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{12}^i(x_i) \int\limits_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \frac{1}{x_i - \xi}\, d\xi,$$

$$\sigma_{22}^k - \sigma_{22}^{k-1} = -2\sigma_{21}^k, \qquad k = l + 2, \ldots, n.$$

Полная система уравнений модели дискретного деформирования, состоящая из подсистем (22)–(24), содержит $3n + 1$ линейное уравнение. Неизвестными являются $3n$ обобщенных напряжений и критическая сила P_{l+1}, обеспечивающая данное напряженное состояние. Поставленную задачу предлагается решать пошагово, определяя на каждом этапе критическую силу и напряженно-деформированное состояние слоя, соответствующее достижению напряжением критерия текучести в $(l + 1)$-м элементе.

На рис. 3 показано распределение напряжений, отнесенных к пределу текучести, по элементам разбиения при достижении предела текучести во втором элементе (нагрузка P_2). Видно, что при плоской деформации напряжения в пластически деформируемом элементе могут превышать предел текучести (см. также [11]). Это объясняется достаточно большим значением гидростатической составляющей напряженного состояния.

2. Упругопластическое деформирование слоя при плоском напряженном состоянии. В плоском напряженном состоянии компоненты напряжения отнесены к параметру $\beta = 2/(\pi E)$, и закон Гука имеет вид

$$\varepsilon_{11} = A\hat{\sigma}_{11} - B\hat{\sigma}_{22}, \qquad \varepsilon_{22} = A\hat{\sigma}_{22} - B\hat{\sigma}_{11}, \qquad \varepsilon_{33} = -B(\hat{\sigma}_{11} + \hat{\sigma}_{22}), \tag{25}$$

где $A = \pi/2$, $B = \pi\nu/2$ — безразмерные постоянные.

Система разрешающих уравнений для упругой области имеет форму (12). Для области, переходящей из упругого состояния в пластическое, с учетом того что $\hat{\sigma}_{33} = 0$, критерий (15) принимается в форме $\hat{\sigma}_{11} = 2\hat{\tau}_s$. Полагаем, что в области развитого пластического деформирования выполняется условие полной пластичности $\hat{\sigma}_{11} = \hat{\sigma}_{22}$ [10, 12, 13]. Тогда условие текучести (15) принимает вид

$$\hat{\sigma}_{11} = \hat{\sigma}_{22} = 2\hat{\tau}_s, \tag{26}$$

где $\hat{\tau}_s = \beta\tau_s$ — безразмерный предел текучести.

С учетом уравнения равновесия (3) из (26) следует, что на границе слоя в пластической области касательные напряжения равны нулю: $\hat{\sigma}_{12} = 0$, поэтому при пластическом течении слоя имеем

$$\hat{\sigma}_{11} = 2\hat{\tau}_s, \qquad \hat{\sigma}_{22} = 2\hat{\tau}_s, \qquad \hat{\sigma}_{12} = 0. \tag{27}$$

В упругой области, где $x > l_p$ и $\hat{\sigma}_{11} < 2\hat{\tau}_s$, к системе (27) добавляется система (12) с постоянными значениями A, B для плоского напряженного состояния. Как и в случае плоского деформированного состояния, основными неизвестными систем (27) и (12) являются компоненты тензора напряжения, а также длина пластической области. Заметим, что в отличие от случая плоской деформации из системы (27) следует однородность напряженного состояния во всей пластической области, а значит, постоянство деформаций по длине пластической зоны, которые равны деформациям на границе перехода слоя из упругого состояния в пластическое. Упругие деформации слоя определяются из выражений (25).

Дискретная модель, построенная на основе уравнений (27), (12), состоит из следующих трех подсистем уравнений:

1) уравнения, описывающие пластическую область (дискретный аналог системы (27)):

$$\sigma_{11}^k = 2\hat{\tau}_s, \qquad \sigma_{22}^k = 2\hat{\tau}_s, \qquad \sigma_{21}^k = 0, \qquad k = 1, \dots, l;$$

2) уравнения, описывающие переход $(l+1)$-го элемента из упругого состояния в пластическое (дискретный аналог системы (12) и условие достижения на элементе напряжением $\hat{\sigma}_{11}$ предела текучести):

$$\sigma_{11}^k = 2\hat{\tau}_s,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_{12}^i(x_i) \int\limits_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \frac{1}{x_i - \xi}\, d\xi + 2\sum_{i=1}^{n} \sigma_{11}^i(x_i) \int\limits_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \ln\frac{|x_i - \xi|}{l - \xi}\, d\xi - 2P_{l+1} \ln\left(\frac{x+a}{n+a}\right) = \\ = \frac{\pi(\sigma_{11}^k(x_k) + \sigma_{22}^k(x_k))(1-\nu)}{2},$$

$$A\sigma_{22}^k(x_k) - B\sigma_{11}^k(x_k) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{12}^i(x_i) \int\limits_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \frac{1}{x_i - \xi}\, d\xi,$$

$$\sigma_{22}^k - \sigma_{22}^{k-1} = -2\sigma_{21}^k, \qquad k = l+1;$$

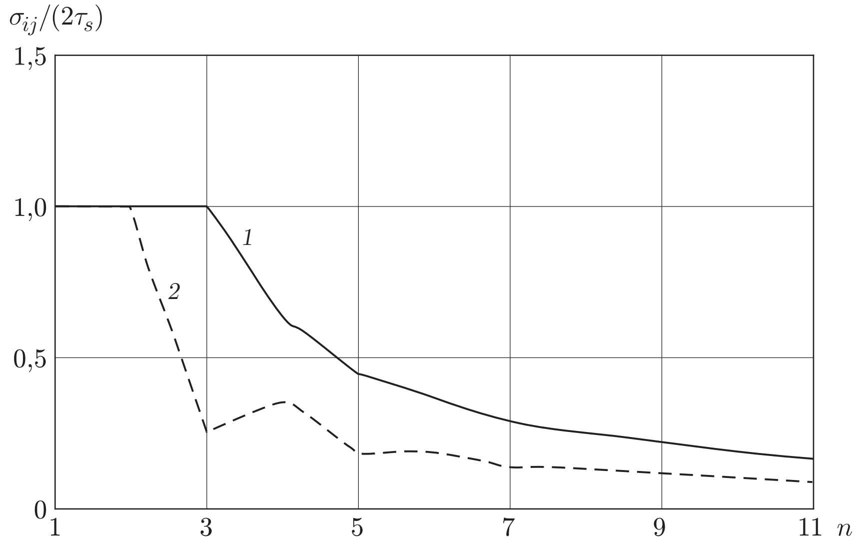

Рис. 4. Напряжения в слое при упругопластическом деформировании в плоском напряженном состоянии ($2\tau_s/E = 3 \cdot 10^{-3}$):
1 — σ_{11}; *2* — σ_{22}

3) уравнения, описывающие упругую область (дискретный аналог системы (12)):

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_{12}^i(x_i) \int\limits_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \frac{1}{x_i - \xi}\, d\xi + 2\sum_{i=1}^{n} \sigma_{11}^i(x_i) \int\limits_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \ln \frac{|x_i - \xi|}{l - \xi}\, d\xi - 2P_{l+1} \ln\Big(\frac{x+a}{n+a}\Big) = \\ = \frac{\pi(\sigma_{11}^k(x_k) + \sigma_{22}^k(x_k))(1-\nu)}{2},$$

$$A\sigma_{22}^k(x_k) - B\sigma_{11}^k(x_k) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{12}^i(x_i) \int\limits_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \frac{1}{x_i - \xi}\, d\xi,$$

$$\sigma_{22}^k - \sigma_{22}^{k-1} = -2\sigma_{21}^k, \qquad k = l+2, \ldots, n.$$

Распределение напряжений на элементах до момента достижения пластического состояния показано на рис. 2. Кривые *4, 5* соответствуют напряжениям σ_{11} и σ_{22} при $P = 1$, $a = 5$, $\nu = 0{,}25$. В случае упругого состояния получаем $\sigma_{11} > \sigma_{22} \geqslant \sigma_{33} = 0$ (см. рис. 2). Следовательно, переход из упругого состояния в пластическое определяется критерием текучести (15) в виде $\hat\sigma_{11} = 2\hat\tau_s$.

На рис. 4 для случая плоского напряженного состояния показано распределение напряжений, отнесенных к пределу текучести, по элементам при переходе третьего элемента в пластическое состояние (нагрузка P_3).

3. Сравнение рассматриваемого подхода и подхода Леонова — Панасюка — Дагдейла. В основе модели Леонова — Панасюка — Дагдейла лежат следующие допущения [1, 2]:

1. Разрез рассматривается как математический; пластическая зона, расположенная на продолжении математического разреза, представляет собой область нулевой толщины и длины l_p.

2. Напряженное состояние в пластической зоне — однородное растяжение с напряжением, равным пределу текучести при растяжении.

3. Упругое состояние вне зоны пластичности определяется по асимптотическим формулам линейной теории упругости. Наличие пластической зоны не оказывает влияния на закон распределения напряжений в упругой области.

4. Длина пластической области рассчитывается из условия конечности напряжений на границе упругой и пластической областей.

Формализуем данные условия применительно к рассматриваемой задаче:

а) толщина слоя взаимодействия принимается равной нулю: $\delta_0 = 0$.

б) $\sigma_0 = \sigma_{11} = 2\tau_s$ при $0 \leqslant x_2 \leqslant l_p$; $\sigma_{ij} = 0$ при $i \neq 1$, $j \neq 1$.

Для формализации условий 3, 4 используем известные асимптотические решения, приведенные в работах [14, 15]. Коэффициент интенсивности напряжений при расклинивающей сосредоточенной нагрузке P, приложенной к полубесконечному разрезу, обозначим через $K_{\rm I}^p$, а соответствующий коэффициент от внешней нагрузки постоянной интенсивности σ_0 — через $K_{\rm I}^0$. Для того чтобы выполнялось условие 4, необходимо потребовать выполнения условия

$$\lim_{x_2 \to l_p} \sigma_{11}(0, x_2) = \mathrm{const}\,. \tag{28}$$

Условие (28) выполняется, если коэффициенты интенсивности удовлетворяют требованию [16]

$$K_{\rm I}^p - K_{\rm I}^0 = 0. \tag{29}$$

Используя результаты, приведенные в работе [15], находим выражения для коэффициентов интенсивности напряжений в рассматриваемой задаче:

$$K_{\rm I}^p = \sqrt{2}\,P/\sqrt{\pi(l_p + a)}, \qquad K_{\rm I}^0 = 2\sigma_0\sqrt{2l_p/\pi}. \tag{30}$$

Из условий (29) и (30) получим зависимость между расклинивающей силой и длиной пластического отрезка:

$$P = 2\sigma_0\sqrt{l_p(l_p + a)}. \tag{31}$$

На рис. 5 показана зависимость длины пластической зоны от приложенной нагрузки, полученная с использованием предлагаемого подхода и классического подхода Леонова — Панасюка — Дагдейла (P_1 — критическая нагрузка, необходимая для перехода первого элемента в пластическое состояние в случае плоского напряженного состояния; P_l — критическая нагрузка при пластическом течении в l первых элементах слоя). Из рис. 5 следует, что предлагаемая модель, в отличие от модели Леонова — Панасюка — Дагдейла, позволяет описать чисто упругое поведение материала. Кривая *3* соответствует зависимости (31). Из анализа кривых *1, 2* следует, что пластическая деформация начинается после достижения силой P_1 критического значения $P_1 = 1$. В то же время из анализа кривой *3* следует, что согласно модели Леонова — Панасюка — Дагдейла пластическая зона появляется при сколь угодно малой внешней нагрузке. Кривые *1, 2* качественно соответствуют экспериментально установленному факту: при плоском напряженном состоянии длина пластической зоны существенно больше, чем в случае плоской деформации.

Заключение. Модель дискретного деформирования позволяет описать развитие зоны пластичности в пределах слоя конечной толщины как для плоского деформированного, так и для плоского напряженного состояния.

Напряженное состояние слоя и длина пластической зоны определяются из решения соответствующих краевых задач, что позволяет (в отличие от подхода Леонова — Панасюка — Дагдейла) учесть перераспределение напряжений в упругой области, обусловленное увеличением зоны пластичности.

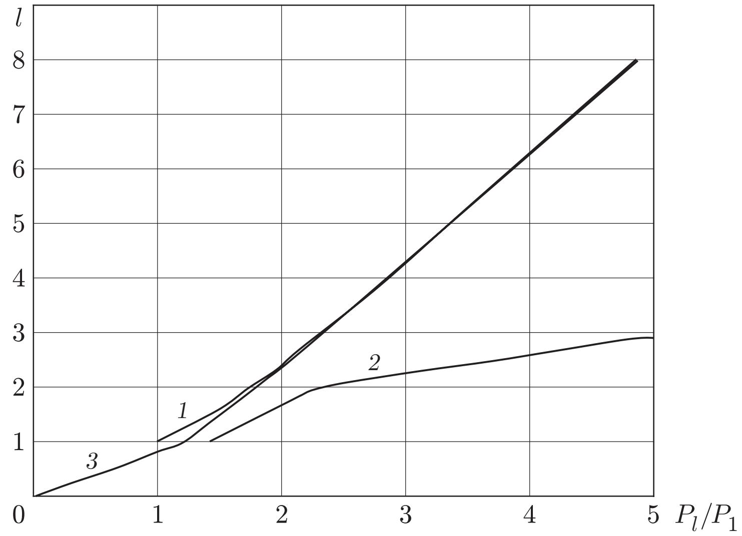

Рис. 5. Зависимость длины пластической зоны от внешней нагрузки:
1, 2 — результаты расчета с использованием предлагаемого подхода (*1* — плоское напряженное состояние, *2* — плоское деформированное состояние); *3* — результаты расчета по модели Леонова — Панасюка — Дагдейла при плоском напряженном состоянии

Установлено, что учет напряжений сжатия-растяжения и упругой сжимаемости в пластической области слоя обусловливает существенное различие законов изменения напряжений и длин пластических зон при плоских деформированном и напряженном состояниях.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Dugdale D. S.** Yielding of steel sheets containing slits // J. Mech. Phys. Solids. 1960. V. 8, N 2. P. 100–108.
2. **Леонов М. Я., Панасюк В. В.** Развитие мельчайших трещин в твердом теле // Прикл. механика. 1959. Т. 5, № 4. С. 391–401.
3. **Irvin G. R.** Linear fracture mechanics, fracture transition, and fracture control // Engng Fract. Mech. 1968. V. 1. P. 241–257.
4. **Маркин А. А., Глаголев В. В.** Термомеханическая модель дискретного разделения упругопластических тел // Изв. Тул. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2006. Т. 12, вып. 2. С. 103–129.
5. **Глаголев В. В., Маркин А. А.** Определение термомеханических характеристик процесса разделения // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2007. № 6. С. 101–112.
6. **Гаврилкина М. В., Глаголев В. В., Маркин А. А.** К решению одной задачи механики разрушения // ПМТФ. 2007. Т. 48, № 4. С. 121–127.
7. **Лурье А. И.** Теория упругости. М.: Наука, 1970.
8. **Новожилов В. В.** О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности // Прикл. математика и механика. 1969. № 2. С. 212–222.
9. **Крауч С.** Методы граничных элементов в механике твердого тела / С. Крауч, А. Старфилд. М.: Мир, 1987.
10. **Ишлинский А. Ю.** Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. М.: Физматлит, 2001.
11. **Нотт Дж. Ф.** Основы механики разрушения. М.: Металлургия, 1978.

12. **Ивлев Д. Д.** О выводе соотношений, определяющих пластическое течение при условии полной пластичности // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. Механика и машиностроение. 1959. № 3. С. 137.
13. **Аннин Б. Д.** Двумерные подмодели идеальной пластичности при условии полной пластичности // Проблемы механики: Сб. ст. М.: Физматлит, 2003. С. 94–99.
14. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
15. **Черепанов Г. П.** Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974.
16. **Гольдштейн Р. В., Перельмутер М. Н.** Рост трещин по границе соединения материалов // Проблемы механики: Сб. ст. М.: Физматлит, 2003. С. 221–239.

Поступила в редакцию 26/V 2008 г.,
в окончательном варианте — 23/X 2008 г.