Если имеет место равномерное засоление до промывки, то и решение имеет вид [1] и др.)

$$C = C_{\text{п}} + \frac{C_0 - C_{\text{п}}}{2}\left[\operatorname{erfc} az_2 + (4a^2z_1 + 1)\exp(4a^2z)\operatorname{erfc} az_1 - \frac{4a}{\sqrt{\pi}}\exp(-a^2z_2^2)\right]$$

Для иллюстрации полученного решения для ряда характерных схем начального засоления сделаны расчеты при следующих данных: $D^* = 2{,}34 \cdot 10^{-3}$ *м²/сутки*, $V_0 = 0.01$ *м/сутки*, $m = 0{,}4$, $C_n = 0$; график построен для $t = 60$ *суткам*.

Приведенные графики (фиг. 2) наглядно иллюстрируют перераспределение солей при промывках в зависимости от начальной схемы засоления.

Автор считает, что предлагаемые формулы могут быть с успехом использованы для прогнозирования перераспределения солей в почвогрунтовом слое с учетом их свойств и свойств грунтов.

Поступила 10 I 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Аверьянов С. Ф. Некоторые вопросы предупреждения засоления орошаемых земель и меры борьбы с ним в Европейской части СССР. Сб. «Орошаемое земледелие в Европейской части СССР», Изд. «Колос», 1965.
2. Бирюкова А. П. Влияние орошения на водный и солевой режим почв южного Заволжья. Изд-во АН СССР, 1962.
3. Веригин Н. Н. Некоторые вопросы химической гидродинамики, предствляющие интерес для мелиорации и гидротехники. Изв. АН СССР. ОТН, 1953, № 10.
4. Веригин Н. Н. О кинематике растворения солей при фильтрации воды в грунтах. Сб. «Растворение и выщелачивание горных пород», Госстройиздат, 1957.
5. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. Гостехиздат, 1948.
6. Лыков А. В. Теория теплопроводности. Гостехиздат, 1952.
7. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. Изд. «Высшая школа», 1965.
8. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Физматгиз, 1961.
9. Аверьянов С. Ф., Цзе Да-лин. К теории промывки засоленных почв. Докл. Тимиряз. с.-х. акад., 1960, вып. 56.

К ЗАДАЧЕ О ШНЕКЕ ПРИ НАЛИЧИИ ТЕПЛООБМЕНА В СЛУЧАЕ ЖИДКОСТИ ПЕРЕМЕННОЙ ВЯЗКОСТИ

***В. П. Беломытцев** (Воронеж)*

В промышленности широкое применение имеют шнековые прессы и транспортеры. Теории шнека посвящен ряд работ [1,2], но при этом не учитывались значительная диссипация энергии в шнеках и зависимость вязкости жидкости от температуры.

В настоящей работе делается попытка учесть указанные факторы в случае следующей упрощенной схемы течения в шнеке, которая является общепринятой в первом приближении: движение жидкости обращается, и рассматривается течение материала в прямой прямоугольной трубе с одной подвижной стенкой при отсутствии градиента давления по оси шнека, т. е. рассматривается ненагруженный шнек.

Принимаем, что вязкость зависит от температуры по экспоненциальному [3] или гиперболическому закону

$$\mu = \mu_0 \exp(U / RT), \quad \mu = \mu_0 [1 + \alpha (T - T_0)]^{-1} \tag{1}$$

Здесь μ_0, U, α, T_0 — постоянные; R — газовая постояннная; T — абсолютная температура.

Поместим начало координат в левом углу прямоугольного сечения со сторонами a и b ($b \leqslant a$) и отнесем все размеры к величине b. Скорость отнесем к величине v_0 — скорости верхней крышки прямоугольного канала, направленной по оси z. Уравнения движения и энергии, учитывая диссипацию и пренебрегая переносом тепла по оси канала, так как скорости течения в шнеках малы, в случае экспоненциального закона (1) в безразмерной форме запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\exp\frac{-\theta}{1+\beta\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\exp\frac{-\theta}{1+\beta\theta}\right)=0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}+\delta\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]\exp\frac{-\theta}{1+\beta\theta}=0 \tag{3}$$

$$w=\frac{v}{v_0},\quad \theta=\frac{U}{RT_0^2}(T-T_0),\quad \beta=\frac{RT_0}{U}$$

$$\delta=\frac{\mu_0 v_0^2 U}{\lambda R T_0^2}\exp\frac{U}{RT_0}$$

Здесь w, θ — безразмерные скорость и температура; β, δ — безразмерные параметры; λ — коэффициент теплопроводности.

Граничные условия для скорости будут $w=1$ при $y=1$; $w=0$ при $x=0$, $x=a/b$, $y=0$.

Для температуры можно поставить различные условия в зависимости от конкретных обстоятельств.

(1) Температура втулки и канала шнека одинакова $T=T_0$, тогда $\theta=0$ всюду на границе.

(2) Температура втулки $T=T_0$, канала шнека $T=T_1$, тогда $\theta=0$ при $y=1$ и $\theta=\theta_1$ на остальной части границы.

(3) Температура втулки $T=T_0$, канал шнека теплоизолирован, т. е. $\partial T/\partial n=0$, тогда $\theta=0$ при $y=1$ и $\partial\theta/\partial n=0$ на остальной части границы.

Сделаем замену в уравнении (2) вида

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}\exp\frac{\theta}{1+\beta\theta},\quad \frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}\exp\frac{\theta}{1+\beta\theta} \tag{4}$$

Следовательно, функция u будет удовлетворять уравнению Лапласа

$$\Delta u=0 \tag{5}$$

Из условия интегрируемости системы (4) относительно w следует, что должно иметь место

$$\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} \tag{6}$$

а тогда [4]

$$\theta=\Psi(u) \tag{7}$$

Подставляя (4) и (7) в (3) и используя (5), имеем для Ψ обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\Psi}{d\omega^2}+\delta\exp\frac{\Psi}{1+\beta\Psi}=0 \tag{8}$$

В случае сильной зависимости вязкости от температуры $\beta\ll 1$ [5], и можно вполне написать

$$\frac{d^2\Psi}{du^2}+\delta\exp\Psi=0 \tag{9}$$

Решение уравнения (9) имеет вид [6]

$$\Psi=\ln\left[c_1^2\,\mathrm{ch}^{-2}\,c_1\sqrt{{}^1\!/_2\,\delta}\,(u-c_2)\right] \tag{10}$$

где c_1 и c_2 — постоянные интегрирования, причем $c_1>0$.

Из (4) и (7) следует

$$w=\int e^{\Psi}du+c \tag{11}$$

Подставляя (10), имеем

$$w=c_1\sqrt{2/\delta}\,\mathrm{th}\,c_1\sqrt{{}^1\!/_2\delta}\,(u-c_2)+c \tag{12}$$

Далее видно, что для u должны быть следующие условия на границе $u=u_1$ там, где $w=0$, и $u=u_0$, где $w=1$; u_1 и u_0 — неизвестные постоянные.

Непосредственная проверка показывает, что u_1 не входит в конечный результат для определения поля скоростей и температур, поэтому сразу полагаем $u_1=0$. Итак, имеем четыре произвольные постоянные для того, чтобы удовлетворить условиям на границе. При условии (1) для температуры $\theta=\Psi$ имеем следующую систему четырех уравнений:

$$c_1 = \operatorname{ch} c_1 \sqrt{{}^1/_2\,\delta}\,(u_0 - c_2),\quad c_1 = \operatorname{ch} c_1 c_2 \sqrt{{}^1/_2\,\delta}, \tag{13}$$

$$c = c_1 \sqrt{2/\delta}\,\operatorname{th} c_1 \sqrt{{}^1/_2\,\delta}\,c_2$$

$$1 - c = c_1 \sqrt{2/\delta}\,\operatorname{th} c_1 \sqrt{{}^1/_2\,\delta}\,(u_0 - c_2)$$

Решая ее относительно c, c_1, c_2, u_0, имеем

$$c = {}^1/_2,\quad c_1 = \sqrt{1 + {}^1/_8\,\delta},\quad c_2 = {}^1/_2\,u_0, \tag{14}$$

$$u_0 = \frac{8}{\sqrt{(8+\delta)\,\delta}} \ln\left[\sqrt{1 + {}^1/_8\,\delta} + \sqrt{{}^1/_8\,\delta}\right] \tag{15}$$

Случаи граничных условий (2) или (3) реализуются аналогично.

Окончательно имеем для поля скоростей и температур в безразмерном виде следующие выражения:

$$\theta = \ln(1 + {}^1/_8\,\delta)\,\operatorname{ch}^{-2} {}^1/_4 \sqrt{(8+\delta)\,\delta}\,(u - {}^1/_2\,u_0) \tag{16}$$

$$w = {}^1/_2 + {}^1/_2 \sqrt{1 + {}^1/_8\,\delta}\,\operatorname{th} \sqrt{(8+\delta)\,\delta}\,(u - {}^1/_2\,u_0)\,{}^1/_4 \tag{17}$$

где u_0 определяется выражением (15), а u — решение краевой задачи для уравнения Лапласа с условием на границе $u = u_0$ при $y = 1$; $u = 0$ при $x = 0$, $x = a / b$, $y = 0$, которое записывается в виде

$$u = \frac{4u_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}(2n+1)\,\pi y b / a}{\operatorname{sh}(2n+1)\,\pi b / a}\,\frac{\sin(2n+1)\,\pi b x / a}{2n+1} \tag{18}$$

Зная поле скоростей (17), можно определить расход жидкости численным интегрированием.

В случае зависимости вязкости от температуры по гиперболическому закону (1) выпишем сразу выражения, определяющие поле скоростей и температур, например при граничных условиях (2)

$$\theta = (1 + \theta_1)\cos\sqrt{\delta}\,u + \frac{\delta - \theta_1(2+\theta_1)}{2\sqrt{\delta}}\sin\sqrt{\delta}\,u - 1 \tag{19}$$

$$w = \frac{1+\theta_1}{\sqrt{\delta}}\sin\sqrt{\delta}\,u + \frac{\delta - \theta_1(2+\theta_1)}{2\delta}(1 - \cos\sqrt{\delta}\,u) \tag{20}$$

где u определяется по формуле (18), но u_0 уже другое и определяется выражением

$$u_0 = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \operatorname{Arccos} \frac{(2+\theta_1)^2 - \delta}{(2+\theta_1)^2 + \delta} \tag{21}$$

В этом случае безразмерный параметр $\delta = \mu_0 V_0^2 \alpha / \lambda$.

В заключение автор благодарит Н. Н. Гвоздкова за постановку задачи.

Поступила 12 V 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванова А. И. Винтообразное движение вязкой несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР. ОТН, 1957, № 12.
2. Кауфман И. Н., Насырова С. В. О течении в экструдере. Механика полимеров, 1966, № 6.
3. Френкель Я. И. Кинетическая теория жидкостей. Изд-во АН СССР, 1959.
4. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики, т. 2, Гостехиздат, 1952.
5. Бостанджиян С. А., Мержанов А. Г., Худяев С. М. О гидродинамическом тепловом взрыве. Доклад АН СССР, 1965, т. 163, № 1.
6. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Физматгиз, 1961.