

Это уравнение можно представить в следующем виде

$$\begin{aligned} \Phi(\rho, \tau) = & \delta - \gamma \left\{ 1 - k\tau/T_0 + \frac{kR^2}{4\alpha T_0} \left[(1 - \rho^2) + \frac{2}{Rh} \right] - \frac{k}{T_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{x_n} J_0(\mu_n \rho) \exp(-x_n \tau) + \right. \\ & + \eta_0 \int_0^{\tau} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-y_n(\tau - t)) \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n A_n}{J_1(\mu_n)} \exp(-x_n(\tau - t)) dt \times \\ & \left. \times \int_0^1 \xi J_0(\mu_n \rho) J_0(\mu_n \xi) \Phi(\xi, t) d\xi \right\}^4 \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь

$$\delta = T_1^4 / (T_1^4 - T_0^4), \quad \gamma = T_0^4 / (T_1^4 - T_0^4), \quad \eta_0 = \eta R^2$$

Интегральное уравнение (21) описывает процесс нагрева поверхности $z = L$ цилиндра, численное решение его получено итерационным методом Ньютона [4].

При «арифметизации» его интеграл по пространственной координате разбивался на конечную сумму по квадратурной формуле Гаусса, а интеграл по времени — по формуле прямоугольников. Таким образом, температурное поле $\theta(r, z, \tau)$ определялось после того, как в результате решения уравнения (21) были найдены значения результирующей плотности потока на поверхности $z = L$ в любой момент времени.

На фиг. 1 представлена зависимость безразмерной температуры поверхности $z = L$ от критерия Фурье для различных радиальных сечений при начальной температуре цилиндра $T_0 = 293^\circ \text{K}$.

На фиг. 2 представлена зависимость безразмерной температуры теплоизолированного основания $z = 0$ цилиндра от безразмерного радиуса для различных значений Фурье и критерия $B_i = 1$ при $T_0 = 293^\circ \text{K}$. Расчеты производились при следующих данных: $R = 0.12 \text{ м}$, $L = 0.015 \text{ м}$, $\alpha = 3.3 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}$, $H = 4.910^{-9} \text{ град}^3/\text{м}$.

Поступила 18 III 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1948.
2. Лаврентьев М. А. Методы теории функций комплексного переменного. Изд. 2, М., Физматгиз, 1958.
3. Бурка А. Л. Несимметричный лучисто-конвективный прогрев неограниченной пластины. ПМТФ, 1966, № 2.
4. Канторович Л. В. О методе Ньютона. Тр. Матем. ин-та им. В. И. Стеклова, 1949, т. 28.

О ВОЗМОЖНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОСТИ КОРРЕЛЯЦИОННЫМ МЕТОДОМ

Н. Ф. Деревянко (Москва)

В работе [1] был описан корреляционный метод измерения пульсаций скорости в стационарных плазменных потоках. При этом величина пульсаций определялась по значению девиации частоты в спектре кросскорреляционной функции оптических флуктуаций в двух близко расположенных точках вдоль по потоку.

В данной работе делается попытка обоснования подобного метода для измерения характеристик турбулентности как плазменных, так и любых низкотемпературных газовых потоков.

1. Влияние турбулентных пульсаций скорости на частотный спектр оптических флуктуаций. Пусть имеется однородное изотропное случайное поле M , элементами которого являются случайные множества гидродинамических характеристик турбулентного потока несжимаемой жидкости.

Будем регистрировать поле оптических флуктуаций N , полагая, что N является образом поля M при отображении g , т. е.

$$g(M) = \{g(X); X \in M\} \quad (1.1)$$

Здесь элемент X — случайное множество.

При этом отображение предполагается взаимно однозначным. То есть если $g: M \rightarrow N$, то для каждого $\alpha \in g(M)$ существует только один элемент $X \in M$, такой, что $g(X) = \alpha$ (α — случайная величина, служащая элементом поля N).

В этом случае поле N также будет однородным и изотропным.

Сформулированные выше предположения фактически должны иметься в виду во всех оптических методах измерения турбулентности.

Как известно [2], условие однородности случайного поля означает, что его среднее значение постоянно, а корреляционная функция не меняется при одновременном смещении пары точек $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ в одном направлении на одну величину, т. е.

$$\langle \bar{N}(\mathbf{r}) \rangle = \text{const}, \quad B_N(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = B(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (1.2)$$

Условие изотропности, кроме того, требует, чтобы $B_N(\mathbf{r})$ зависела лишь от $r = |\mathbf{r}|$, т. е. только от расстояния между точками наблюдения, а спектральная плотность, следовательно, являлась бы функцией лишь одной переменной — модуля вектора κ :

$$\Phi(\kappa) = \frac{1}{2\pi^2\kappa} \int_0^\infty B_N(r) \sin \kappa r dr \quad (1.3)$$

Трехмерная спектральная плотность $\Phi(\kappa)$ изотропного случайного поля связана простым соотношением с одномерной спектральной плотностью $S_N(\kappa)$

$$\Phi(\kappa) = -\frac{1}{2\pi\kappa} \frac{dS_N(\kappa)}{d\kappa} \quad (1.4)$$

При переходе от пространственных спектров к временным, полученным при измерениях в точке, часто пользуются моделью «замороженной» турбулентности [2-4]. То есть считают, что все временные изменения $N(\mathbf{r}, t)$ связаны с переносом пространственного распределения поля с постоянной скоростью $\mathbf{v}$, при этом перенос происходит без какой-либо эволюции:

$$B(\mathbf{r}, \tau) = B(\mathbf{r} - \mathbf{v}\tau) \quad (1.5)$$

$$\Phi(\kappa) = -\frac{v^2}{2\pi\kappa} W(\kappa v) \quad (1.6)$$

где $W(\kappa v)$ — временной спектр изотропного «замороженного» поля.

Соответственно одномерная пространственная спектральная плотность (например, составляющей поля N_x) связана с временным спектром в точке A , лежащей на оси x , соотношением

$$S_{N_x}(\kappa) = u W_A(u\kappa) \quad (1.7)$$

На примере выражения (1.7) ясно видно, что при несоблюдении условий «замороженности» частотный спектр в точке будет смещаться по шкале частот и деформироваться в зависимости от скорости переноса пространственного распределения поля.

Поэтому следующим шагом, как нам кажется, будет модель, согласно которой перенос пространственного распределения поля осуществляется без эволюции, но с переменной во времени скоростью. В этом случае

$$N(\mathbf{r}, t + t') = N\left(\mathbf{r} - \int_0^{t'} \mathbf{v}(t) dt, t\right)$$

$$\begin{aligned} B_N(\mathbf{r}, \tau) &= \langle N(\mathbf{r} + \mathbf{r}_1, t + \tau) N(\mathbf{r}_1, t) \rangle = \\ &= \left\langle N\left(\mathbf{r} + \mathbf{r}_1 - \int_0^{t+\tau} \mathbf{v}(t) dt, 0\right) N\left(\mathbf{r}_1 - \int_0^t \mathbf{v}(t) dt, 0\right) \right\rangle = B_N\left(\mathbf{r} - \int_0^\tau \mathbf{v}(\tau) d\tau\right) \end{aligned}$$

т. е. для «замороженного» поля, перемещающегося с переменной скоростью $\mathbf{v}(t)$, выполняется соотношение

$$B_N(\mathbf{r}, t) = B_N\left(\mathbf{r} - \int_0^t \mathbf{v}(\tau) d\tau\right) \quad (1.8)$$

или для составляющей поля вдоль оси x :

$$B(x, t) = B\left(x - \int_0^t u(\tau) d\tau\right) \quad (1.9)$$

Для однородного случайного поля интегральное каноническое представление пространственной корреляционной функции составляющей N_x имеет вид

$$B_{N_x}(r - r') = \int_{-\infty}^{\infty} S_N(\kappa) e^{i\kappa r} e^{-i\kappa r'} d\kappa \quad (1.10)$$

Ему соответствует интегральное каноническое представление стационарной случайной функции $N_x(r)$:

$$N_x(r) = m_{N_x} + \int_{-\infty}^{\infty} V(\kappa) e^{i\kappa r} d\kappa \quad (1.11)$$

Полагая в (1.10) $r = \int_0^t u(t) dt$, в случае «замороженного» поля, перемещающегося с переменной по времени скоростью, для данной точки получаем

$$N_x(t) = m_{N_x} + \int_{-\infty}^{\infty} V\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda} \int_0^t u(t) dt\right) d\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) \quad (1.12)$$

где $\lambda = 2\pi / \kappa$.

Каков физический смысл этого выражения? Если $u(t) = \langle u \rangle + u'(t)$, где $u'(t)$ — центрированная стационарная случайная функция, то

$$\begin{aligned} N_x(t) &= m_{N_x} + \int_{-\infty}^{\infty} V\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) \exp\left\{i \frac{2\pi}{\lambda} \left[\langle u \rangle t + \int_0^t u'(t) dt\right]\right\} d\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) = \\ &= m_{N_x} + \int_{-\infty}^{\infty} V\left(\frac{\omega_0}{\langle u \rangle}\right) \frac{1}{\langle u \rangle} \exp\left\{i \left(\omega_0 t + \int_0^t \omega(t) dt\right)\right\} d\omega_0 \end{aligned} \quad (1.13)$$

То есть $N_x(t)$ представляет собой результат частотной модуляции случайным процессом $u(t)$ некоторой случайной функции $\varepsilon(t)$, равной

$$\varepsilon(t) = m_\varepsilon + \int_{-\infty}^{\infty} V\left(\frac{\omega_0}{\langle u \rangle}\right) \frac{1}{\langle u \rangle} e^{i\omega_0 t} d\omega_0 \quad (1.14)$$

Последняя может интерпретироваться как составляющая поля N_x при перемещении «замороженного» поля с постоянной скоростью $\langle u \rangle$. При наличии пульсаций скорости она модулируется по частоте.

Перепишем (1.13) в виде

$$\begin{aligned} N_x(t) &= m_{N_x} + \int_{-\infty}^{\infty} V\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) \exp\left\{i \frac{2\pi}{\lambda} \left[\langle u \rangle t + \int_0^t u'(t) dt\right]\right\} d\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) = \\ &= m_{N_x} + \int_{-\infty}^{\infty} V\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) \exp\left\{i \frac{2\pi}{\lambda} [\langle \xi \rangle + \xi']\right\} d\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) \end{aligned} \quad (1.15)$$

Здесь $\langle \xi \rangle$ — координата точки составляющей поля N_x в момент t при постоянной скорости переноса, ξ' — пульсация этой координаты при движении с переменной скоростью.

Для нахождения дисперсии $\langle \xi^2(t) \rangle$ можно воспользоваться основной формулой теории турбулентной диффузии [4]:

$$\langle \xi^2(t) \rangle = 2K_u(0) \int_0^t (t-\tau) R_u(\tau) d\tau \quad (1.16)$$

Здесь $K_u(0)$ — дисперсия скорости, $R_u(\tau)$ — коэффициент корреляции между пульсациями скорости в различные моменты времени.

Из выражения (1.16) следует, что амплитудой модулирующей функции является среднеквадратичная пульсация скорости. Это значит, что девиация частоты каждой элементарной гармоники процесса $\dot{E}(t)$ может быть определена по формуле

$$\Delta\omega_v = \frac{2\pi}{\lambda_v} \sqrt{\overline{\kappa_u^2(t)}} = \frac{\omega_v}{\langle u \rangle} \sqrt{K_u(0)} \quad (1.17)$$

Рассмотрим (1.16) при больших t , так что $t \gg t^*$, где t^* — момент времени, начиная с которого $R_u(\tau)$ повсюду приближенно равна нулю.

Тогда имеем

$$\langle \xi^2(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} 2K_u(0)(t) \int_0^{\infty} R_u(\tau) d\tau = \lim_{T \rightarrow \infty} 2K_u(0) t \mathcal{T}_\vartheta \quad (1.18)$$

где $\mathcal{T}_\vartheta$ — эйлеров интегральный масштаб времени.

Найдем из (1.18) величину, обратную интегральному масштабу времени

$$\frac{1}{\mathcal{T}_\vartheta} \left[\frac{1}{T} \right] = \frac{2K_u(0)t}{\langle \xi^2(t) \rangle} \left[\frac{U^2 T}{U^2 T^2} \right] \quad (1.19)$$

Первая часть (1.19) представляет собой среднеквадратичную пульсацию частоты т. е. рабочую частоту модуляции. Таким образом, частота модуляции непосредственно определяется интегральным масштабом времени

$$\Omega_m = 2\pi \frac{1}{\mathcal{T}_\vartheta}, \quad \mathcal{T}_\vartheta = \frac{2\pi}{\Omega_m} \quad (1.20)$$

Это имеет определенный физический смысл, так как величина интегрального масштаба времени может служить мерой наиболее длительного интервала времени, в течение которого перенос пространственного распределения поля происходит в среднем в данном направлении, т. е. является максимальным периодом модуляции.

Из соотношения (1.20) следует, что чем больше интегральный масштаб времени, тем ниже рабочая частота модуляции. В предельном случае, когда $\mathcal{T}_\vartheta = \infty$, $\Omega_m = 0$ соответствует отсутствию модуляции (перенос «замороженного» поля с постоянной скоростью).

Напротив, когда $\mathcal{T}_\vartheta \rightarrow 0$, то $\Omega_m \rightarrow \infty$, т. е. при приближении характера пульсаций скорости к белому шуму частота модуляции становится бесконечно большой.

Таким образом, случайная функция $N_x(t)$ несет в себе информацию о турбулентности в форме модулирующей функции.

Поскольку индекс модуляции, определяемый интенсивностью турбулентности, обычно много меньше единицы, то представляет интерес остановиться на вопросе ЧМ (частотная модуляция) с малым индексом одного случайного процесса другим.

2. Частотная модуляция с малым индексом случайного процесса $\varepsilon(t)$ случайным процессом $u(t)$. Пусть имеется стационарная случайная функция $\varepsilon(t)$, заданная в каноническом представлении:

$$\varepsilon(t) = m_\varepsilon + \int_{-\infty}^{\infty} V(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.1)$$

Для простоты положим $m_\varepsilon = 0$.

Преобразуем процесс $\varepsilon(t)$ таким образом, чтобы процесс $u(t)$, также являющийся стационарной случайной функцией, был модулирующей функцией по отношению к частоте каждой элементарной гармонике $\varepsilon(t)$.

Если $u(t) = \sum_{\Omega} V(\Omega) e^{i\Omega t}$, а $\langle u(t) \rangle = 0$, то частота каждой элементарной гармонике процесса $\varepsilon(t)$ будет изменяться по закону

$$\omega_1(t) = \omega_j + \sum_{\Omega} V(\Omega) e^{i\Omega t}$$

Элементарная функция приобретает вид

$$y_j = V(\omega_j) \cos \int_0^t \omega_j(t) dt + iV(\omega_j) \sin \int_0^t \omega_j(t) dt = V(\omega_j) \exp \left\{ i \int_0^t \omega_j(t) dt \right\} \quad (2.2)$$

или

$$\begin{aligned} y_j &= V(\omega_j) \cos \left[\omega_j t + \int_0^t \sum_{\Omega} V(\Omega) e^{i\Omega t} dt \right] + iV(\omega_j) \sin \left[\omega_j t + \int_0^t \sum_{\Omega} V(\Omega) e^{i\Omega t} dt \right] = \\ &= V(\omega_j) \cos \left[\omega_j t + \sum_{\Omega} \frac{V(\Omega)}{i\Omega} e^{i\Omega t} \right] + iV(\omega_j) \sin \left[\omega_j t + \sum_{\Omega} \frac{V(\Omega)}{i\Omega} e^{i\Omega t} \right] \end{aligned} \quad (2.3)$$

Находя косинус суммы и синус суммы, получаем

$$y_j = V(\omega_j) \left[\cos \omega_j t \cos \sum_{\Omega} \beta e^{i\Omega t} - \sin \omega_j t \sin \sum_{\Omega} \beta e^{i\Omega t} \right] + \\ + iV(\omega_j) \left[\sin \omega_j t \cos \sum_{\Omega} \beta e^{i\Omega t} + \cos \omega_j t \sin \sum_{\Omega} \beta e^{i\Omega t} \right]$$

При малом β получим

$$y_j = V(\omega_j) \left[\cos \omega_j t - \sum_{\Omega} \beta e^{i\Omega t} \sin \omega_j t \right] + \\ + iV(\omega_j) \left[\sin \omega_j t + \sum_{\Omega} \beta e^{i\Omega t} \cos \omega_j t \right] \quad (2.4)$$

Просуммируем по всем элементарным гармоникам

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} V(\omega_j) \cos \omega_j t d\omega_j - \int_{-\infty}^{\infty} V(\omega_j) \sum_{\Omega} \beta e^{i\Omega t} \sin \omega_j t d\omega_j + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} iV(\omega_j) \sin \omega_j t d\omega_j + \int_{-\infty}^{\infty} iV(\omega_j) \sum_{\Omega} \beta e^{i\Omega t} \cos \omega_j t d\omega_j = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} V(\omega_j) e^{i\omega_j t} d\omega_j + \int_{-\infty}^{\infty} V(\omega_j) \sum_{\Omega} \beta e^{i\Omega t} e^{-i\Omega t} d\omega_j = \\ = \varepsilon(t) + \sum_{\Omega} \beta e^{i\Omega t} \varepsilon(t) = \varepsilon(t) \left[1 + \sum_{\Omega} \frac{V(\Omega)}{i\Omega} e^{i\Omega t} \right] = \varepsilon(t) [1 + u^*(t)]$$

Следовательно, ЧМ с малым индексом одного случайного процесса другим сводится к произведению двух случайных функций.

3. Статистический спектр записи оптических флуктуаций в фиксированной точке. Перепишем (2.5) в виде

$$x(t) = Z(t) \varepsilon(t)$$

где $Z(t) = 1 + u^*(t)$.

Если процессы $Z(t)$ и $\varepsilon(t)$ независимы, то, как известно [5], корреляционная функция произведения этих случайных процессов равна произведению их корреляционных функций, т. е.

$$K_{xx}(\tau) = K_{zz}(\tau) K_{\varepsilon\varepsilon}(\tau) \quad (3.1)$$

где

$$K_{zz}(\tau) = M \{ [1 + u^*(t)] [1 + u^*(t')] \} = M \{ 1 + u^*(t') + u^*(t) + u^*(t)u^*(t') \} = \\ = 1 + K_{u^*u^*}(\tau)$$

при $M \{ u^*(t') \} = M \{ u^*(t) \} = 0, \quad t' = t + \tau$

Таким образом,

$$K_{xx}(\tau) = K_{\varepsilon\varepsilon}(\tau) + K_{u^*u^*}(\tau) K_{\varepsilon\varepsilon}(\tau) \quad (3.2)$$

Отсюда

$$S_x(\omega) = S_{\varepsilon}(\omega) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{u^*}(\Omega) S_{\varepsilon}(\omega - \Omega) d\Omega \quad (3.3)$$

Предположим, что функции спектральной плотности процессов $\varepsilon(t)$ и $u^*(t)$ имеют вид гауссовых кривых, т. е.

$$S_{\varepsilon}(\omega) = \frac{1}{\sigma_{\omega} \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(\omega - \langle \omega \rangle)^2}{2\sigma_{\omega}^2} \right\} \quad S_{u^*}(\omega) = \frac{1}{\sigma_{\Omega} \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(\Omega - \langle \Omega \rangle)^2}{2\sigma_{\Omega}^2} \right\} \quad (3.4)$$

Тогда

$$S_x(\omega) = \frac{1}{\sigma_\omega \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(\omega - \langle \omega \rangle)^2}{2\sigma_\omega^2} \right] + \quad (3.5)$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma_\Omega \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(\Omega - \langle \Omega \rangle)^2}{2\sigma_\Omega^2} \right] \frac{1}{\sigma_\omega \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{[(\omega - \omega) - \Omega]^2}{2\sigma_\omega^2} \right] d\Omega$$

Спектральная плотность, заданная первым членом правой части (3.5), имеет максимум при $\omega = \langle \omega \rangle$ и симметрична относительно нее.

Исследуем, как ведет себя спектральная плотность, заданная вторым членом правой части (3.5) при ω , близких к $\langle \omega \rangle$.

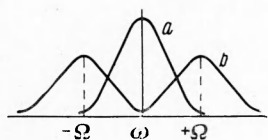
В точке $\omega = \langle \omega \rangle$ этот член равен ($\langle \Omega \rangle = 0$ для простоты):

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma_\Omega \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{\Omega^2}{2\sigma_\Omega^2} \right] \frac{1}{\sigma_\omega \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{\Omega^2}{2\sigma_\omega^2} \right] d\Omega =$$

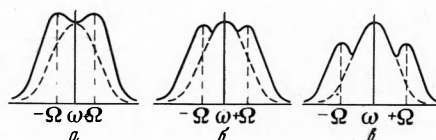
$$= \frac{1}{2\pi^2 \sigma_\Omega \sigma_\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\Omega^2 \left(\frac{1}{2\sigma_\Omega^2} + \frac{1}{2\sigma_\omega^2} \right) \right] d\Omega \equiv 0$$

Таким образом, при $\omega = \langle \omega \rangle$ и $\omega = \infty$ спектральная плотность, задаваемая вторым членом, уменьшается до нуля.

Очевидно, что приближаясь к $\omega = \langle \omega \rangle$ со стороны «отрицательных» частот, можно получить такое же уменьшение до нуля спектральной плотности, как и при приближении со стороны положительных ω .



Фиг. 1



Фиг. 2

Первый член спектральной плотности (3.5) изображен на фиг. 1 кривой *a*. Следующий член — *b*.

На фиг. 2 (*a*, *b*, *v*) иллюстрируются примеры результирующих спектральных функций (в порядке возрастания математического ожидания частоты модулирующей функции).

Если считать, что функция спектральной плотности $S_x(\omega)$ повторяет закон распределения плотности вероятности по частотам, то величина эффективной девиации $\Delta\omega_{эфф}$ может быть вычислена по формуле

$$\Delta\omega_{эфф} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \langle \omega \rangle)^2 S_x(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega} \quad (3.6)$$

Последняя, в свою очередь, связана с величиной среднеквадратичной пульсации скорости соотношением (1.17).

4. Заключение. Таким образом, на основании модели «замороженного» поля, переносимого с переменной во времени скоростью, для измерения турбулентности может быть применен корреляционный метод.

Модель «замороженного» поля, переносимого с переменной во времени скоростью, так же как и первая модель «замороженного» поля, в реальных турбулентных средах справедлива лишь в пределах масштаба турбулентности. Действительно, в пределах $l \ll L_0$ можно считать, что скорость во всех точках поля одна и та же и меняется только во времени.

Однако, если для выполнения первой модели необходимо прибегать к методу структурных функций, во второй модели их применение не может дать желаемого результата.

Нетрудно показать, что если в первой точке записать функцию

$$X_1(t) = [1 + u^*(t)] \varepsilon(t)$$

а во второй, расположенной на расстоянии $l \ll L_0$ вниз по потоку,

$$X_2(t) = [1 + u^*(t + \varphi)] \varepsilon(t)$$

то структурная функция $D(x, t)$ не будет в явном виде нести в себе информацию о турбулентных пульсациях скорости.

В то же время кросскорреляционная функция, подавляя влияние шумов, воспроизводит искомый частотно-модулированный сигнал [1].

Спектр кросскорреляционной функции будет содержать информацию как о величине продольной составляющей турбулентных пульсаций скорости, так и о спектрах модулируемого $\varepsilon(t)$ и модулирующего $u(t)$ случайных процессов.

Вместе с тем, применение структурных функций должно уточнить границы спектра модулируемого процесса. В связи с этим совместное использование структурных функций наряду с кросскорреляционными можно считать целесообразным.

Поступила 26 XII 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Деревянко Н. Ф. и Трохан А. М. О применении корреляционного метода для измерения скорости плазменных потоков. Измерительная техника, 1966, № 10.
2. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М., Изд-во «Наука», 1967.
3. Townsend A. A. Experimental evidence for the theory of local isotropy. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1948, vol. 44, No. 4.
4. Хинце И. О. Турбулентность. М., Физматгиз, 1963.
5. Пугачев В. С. Теория случайных функций. М., Физматгиз, 1962.

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЛН КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ НА ПОВЕРХНОСТЬ ГЛУБОКОЙ ЖИДКОСТИ

В. Е. Захаров

(Новосибирск)

Исследуется устойчивость установившихся нелинейных волн на поверхности бесконечно глубокой жидкости [1,2]. В п. 1 уравнения гидродинамики идеальной жидкости со свободной поверхностью приводятся к каноническим переменным; этими переменными оказываются форма поверхности $\eta(r, t)$ и гидродинамический потенциал на поверхности $\Psi(r, t)$. Введение канонических переменных позволяет рассматривать задачу об устойчивости поверхностных волн, как часть более общей задачи о нелинейных волнах в средах с дисперсией [3,4]. Результаты остальной части статьи также легко переносятся на общий случай.

В п. 2 при помощи метода, аналогичного методу Ван дер Поля, получены упрощенные уравнения, описывающие нелинейные волны в приближении малой амплитуды. Эти уравнения особенно упрощаются, если предположить, что волновой пакет является узким. Полученные уравнения имеют точное решение, аппроксимирующее периодическую волну конечной амплитуды.

В п. 3 исследуются неустойчивости периодических волн конечной амплитуды. Найдены неустойчивости двух типов. Первый тип неустойчивостей — распадные неустойчивости вполне аналогичные распадным неустойчивостям волн в плазме [5,6]. При этих неустойчивостях одновременно возбуждается пара волн, сумма частот которых кратна частоте исходной волны. Наиболее быстрая распадная неустойчивость имеет место для капиллярных волн, более медленная — для гравитационных. Второго типа неустойчивостей — неустойчивость типа отрицательного давления — возникает за счет зависимости скорости нелинейной волны от амплитуды и приводит к неограниченному росту глубины модуляции волны. Эта неустойчивость имеет место для нелинейных волн в любых средах, в которых знак второй производной закона дисперсии по волновому числу $d^2\omega/dk^2$ и знак сдвига частоты за счет нелинейности не совпадают.

Как сообщили А. Н. Литвак и В. И. Таланов [7], эта же неустойчивость независимо была обнаружена ими для нелинейных электромагнитных волн.